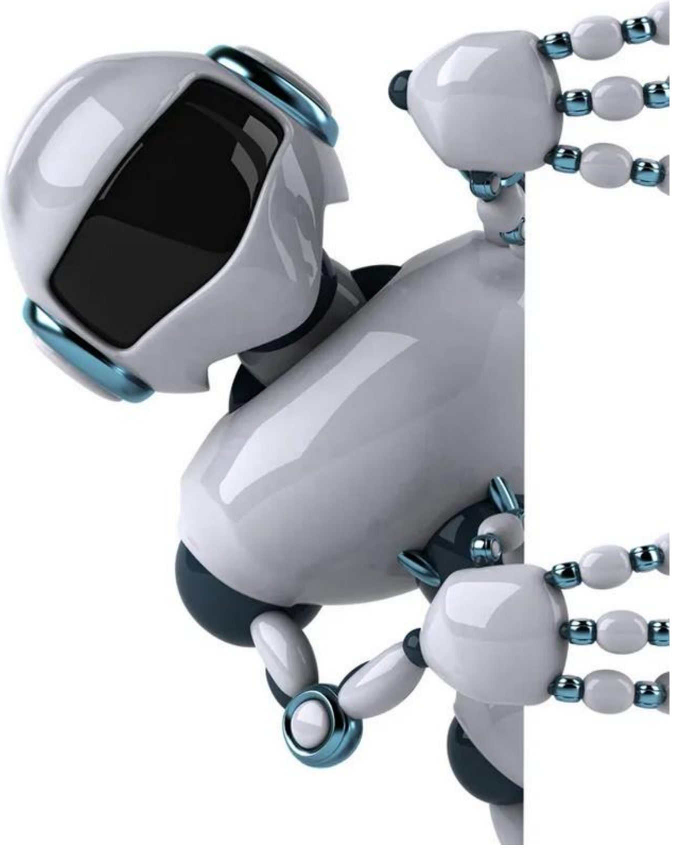
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ

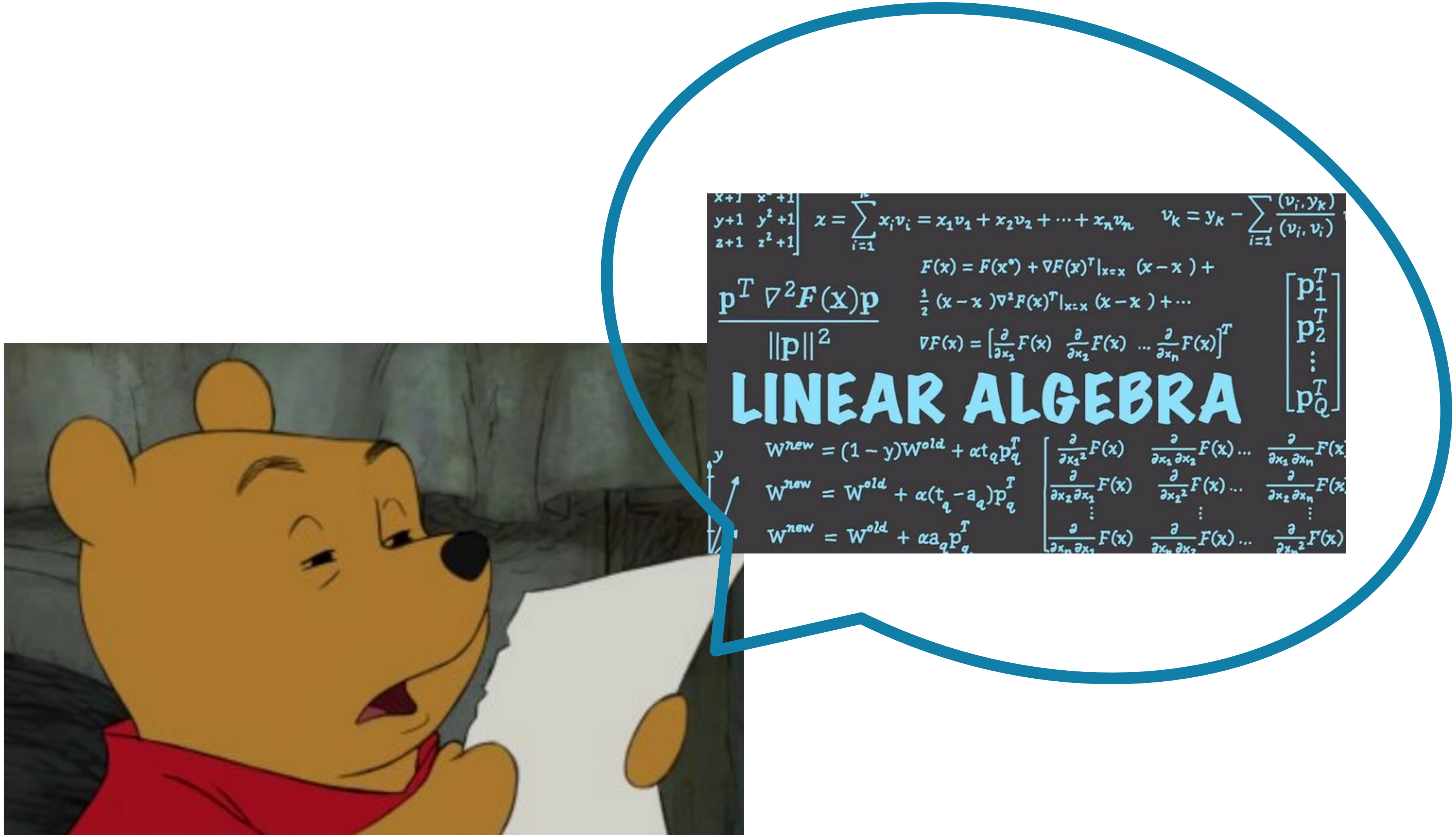
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΣΑΡΑΝΤΟΓΛΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

gsarantoglou@uniwa.gr

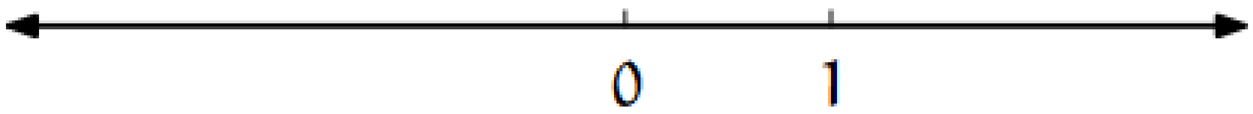


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

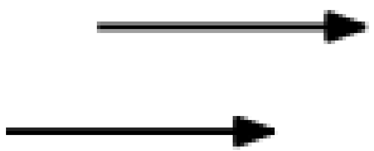
- Έστω ο χώρος $\mathcal{R}$ που έχει όλους τους αριθμούς.
- Έστω τα σημεία 0 και 1
- Αν θέλουμε να βρούμε το σημείο +2.47, τότε ξεκινάμε από το 0 και πηγαίνουμε προς την κατεύθυνση του 1 (κατεύθυνση), και μετράμε 2.47 φορές (μέτρο).
- Άρα έχουμε μια κατεύθυνση και ένα μέτρο που μας ορίζουν ένα διάνυσμα.



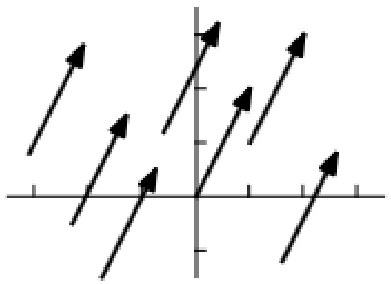
ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Ένα αντικείμενο στον χώρος $\mathcal{R}^n$ που μια κατεύθυνση και ένα μέτρο το λέμε διάνυσμα. Το ζωγραφίζουμε σαν να έχει κάποιο μήκος και μια κατεύθυνση.
- Τα διανύσματα στην εικόνα (Β) , παρότι ξεκινούν από διαφορετικά σημεία έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση. Άρα είναι ίσα.
- Μπορούμε να σκεφτούμε τα διανύσματα σαν μια μετατόπιση. Τα διανύσματα στην εικόνα Β έχουν την ίδια μετατόπιση παρότι ξεκινούν από διαφορετικά σημεία.
- Άρα τα διανύσματα στην εικόνα Γ είναι όλα ίσα (μετατόπιση μια δεξιά και δύο πάνω)

Εικόνα Α



Εικόνα Β



Εικόνα Γ

ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Στο δισδιάστατο χώρο, δύο διανύσματα είναι ίσα αν έχουν ίδια μετατόπιση ανάμεσα στα πρώτα μέλη τους και την ίδια μετατόπιση ανάμεσα στα δεύτερα μέλη τους.
- Το διάνυσμα που πάει από το σημείο (a_1, a_2) στο (b_1, b_2) είναι ίδιο με εκείνο που πάει από το (c_1, c_2) στο (d_1, d_2), αν και μόνο αν $(b_1 - a_1 = d_1 - c_1)$ και $(b_2 - a_2 = d_2 - c_2)$.
- Αντί να λέμε κάθε φορά «**Το διάνυσμα που πάει από το σημείο $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ στο $(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$**», το γράφουμε μαθηματικά ως:

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Φυσική θέση ενός διανύσματος

- Συχνά ζωγραφίζουμε ένα διάνυσμα από το σημείο Ο $(0,0,\ldots,0)$ Ν μηδενικά για τον χώρο $\mathcal{R}^N$.
- Όταν λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι στη φυσική του θέση, τότε εννοούμε ότι το μετράμε από το Ο

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 - 0 \\ v_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Τυπικά λέμε "το σημείο $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$", αντί να λέμε «το τελικό σημείο της φυσική θέσης» αυτού του διανύσματος.

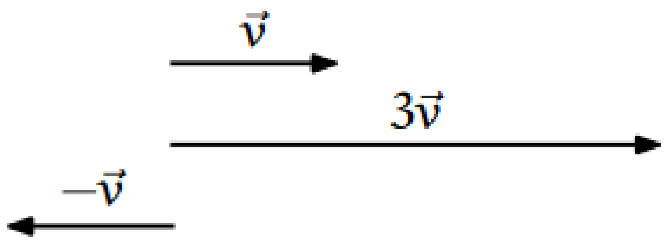
Κλιμάκωση και Άθροιση

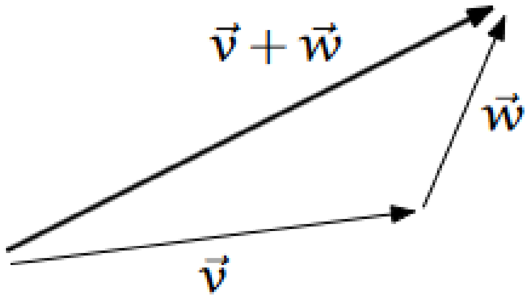
- Ορίζουμε ως κλιμάκωση ενός διανύσματος $\vec{v}$, με έναν αριθμό r έναν αριθμό την πράξη:

$$\overrightarrow{v'} = r\vec{v} = r\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv_1 \\ rv_2 \end{pmatrix}$$

- Ορίζουμε την άθροιση δύο διανυσμάτων $\vec{v}, \vec{w}$ που οδηγούν σε ένα νέο διάνυσμα $\vec{g}$, την πράξη:

$$g = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$





Μέτρο και Γωνία

- Ορίζουμε ως μέτρο ενός διανύσματος $\vec{v} \in \mathcal{R}^N$, την ευκλείδεια απόσταση από το σημείο 0 στο σημείο v.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2}$$

- Για κάθε διάνυσμα $\vec{v}$ (πλην του $\vec{0}$), μπορούμε να πούμε ότι το μέτρο $|\vec{v}|$, κανονικοποιεί το πρώτο σε μέτρο 1, όταν:

$$\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$$

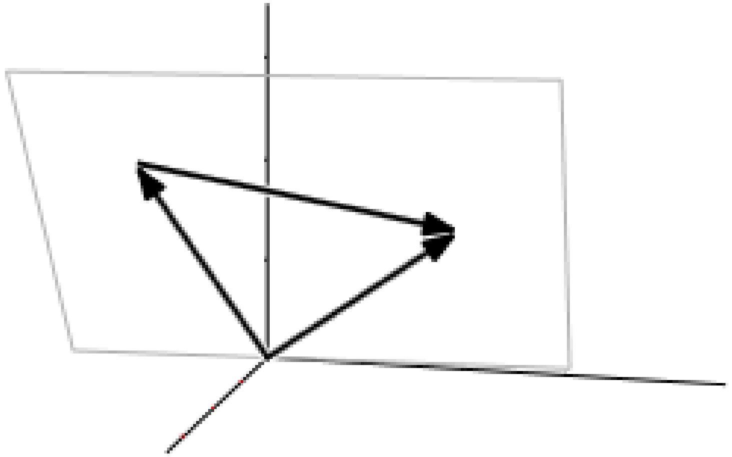
Μέτρο και Γωνία

- Έστω δύο διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ στον χώρο $\mathcal{R}^3$. Δημιουργούν έναν επίπεδο χώρο.
- Σε αυτό το χώρο έχουμε ένα τρίγωνο με πλευρές $\vec{v}, \vec{u}, \vec{u} - \vec{v}$.
- Εφαρμόζοντας τον νόμο συνημιτόνων στο τετράγωνο του μέτρου του $\vec{u} - \vec{v}$ έχουμε:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

- Εδώ θ είναι η γωνία ανάμεσα στα δύο διανύσματα.
- Ο αριστερός όρος δίνει:

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$
$$= u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_3^2 + v_3^1 - 2u_3v_3$$



Μέτρο και Γωνία

- Ο δεξιός όρος δίνει:

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

- Από τους δύο όρους διώχνουμε τα τετράγωνα $u_1^2, \dots, v_3^2$ και διαιρώντας με το 2 έχουμε τελικά:

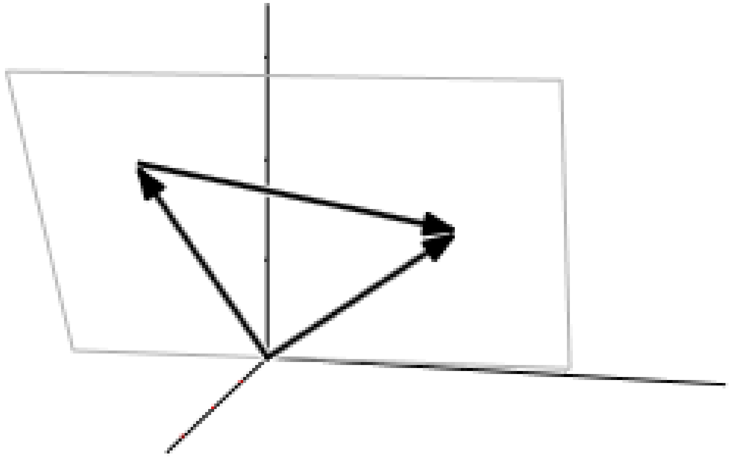
$$\cos(\theta) = \frac{(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

- Ο αριθμητής είναι το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$, που ορίζεται ως:

$$\vec{u}\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_Nv_N$$

- Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}\,\vec{v} = v_1v_1 + v_2v_2 + \cdots + v_Nv_N$$



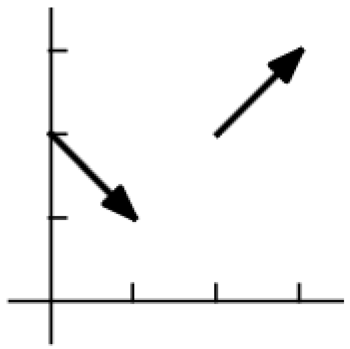
Ορθογώνια διανύσματα

- Δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι ορθογώνια όταν:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

- Άρα βλέπουμε ότι:

$$\cos\theta = 0 = \vec{u}\vec{v}$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Μοναδιαία διανύσματα

- Έστω τα διανύσματα:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Όλα έχουν μέτρο 1 και είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- Ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{v}$ γράφεται ως:

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \hat{x} + v_2 \hat{y} + v_3 \hat{z}$$

- Άρα τα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κάθε άξονα, με βάση τα οποία μπορεί να γραφεί κάθε διάνυσμα στον χώρο.

Προβολή στους άξονες των μοναδιαίων διανυσμάτων

- Έστω τα διανύσματα:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Έστω και το διάνυσμα $\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)^T$.
- Έχουμε ότι το εσωτρικό γινόμενο του $\vec{v}$ και των $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι:

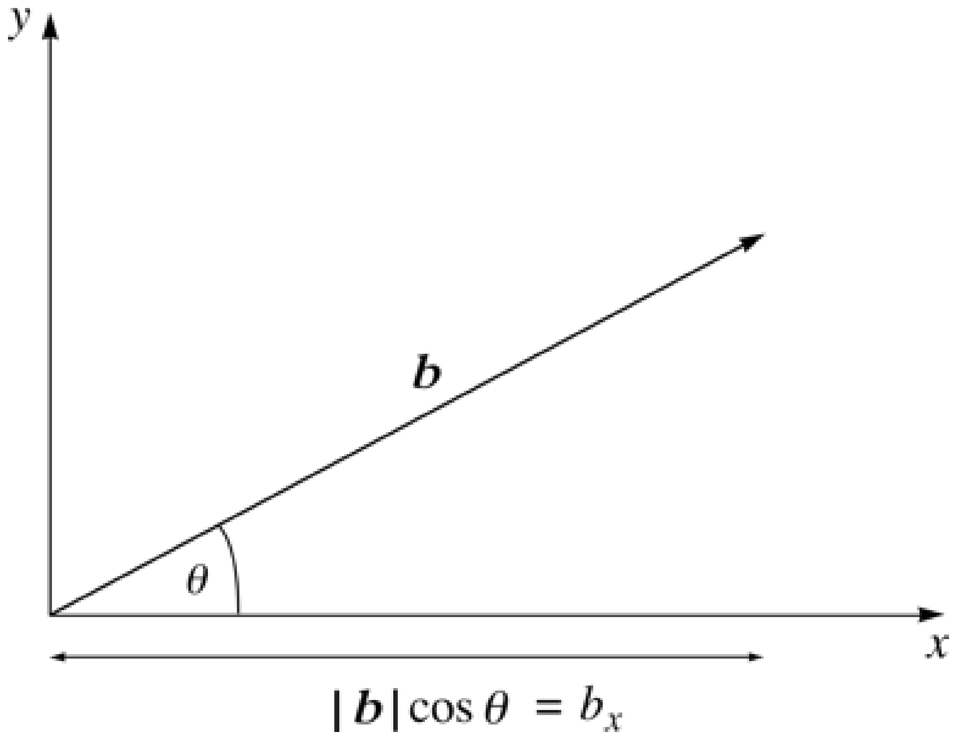
$$\vec{v}\hat{x} = v_x, \vec{v}\hat{y} = v_y, \vec{v}\hat{z} = v_z$$

- Όμως ξέρουμε επίσης ότι για τα εσωτερικά γινόμενα ισχύει ότι $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$ επομένως:

$$v_x = |\vec{v}| \cos\theta_{vx}, v_y = |\vec{v}| \cos\theta_{vy}, v_z = |\vec{v}| \cos\theta_{vz}$$

Προβολή στους άξονες των μοναδιαίων διανυσμάτων

- Άρα κάθε στοιχείο του διανύσματος $\vec{v}$ είναι η προβολή του διανύσματος στον αντίστοιχο άξονα (έστω x άξονας), η οποία δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος με το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα (π.χ $v_x = \vec{v}\hat{x} = |v| \cos \theta_{vx}$).



Πίνακας

- Ένας πίνακας $A \in \mathcal{R}^{N\times M}$ είναι ένα αντικείμενο που γράφεται ως:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}$$

- Ο πολλαπλασιασμός του πίνακα A με το διάνυσμα v δίνει το διάνυσμα u:

$$\mathbf{u} = A\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 + \dots + a_{1M}v_M \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 + \dots + a_{2M}v_M \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 + \dots + a_{3M}v_M \\ \vdots \\ a_{N1}v_1 + a_{N2}v_2 + a_{N3}v_3 + \dots + a_{NM}v_M \end{pmatrix}$$

Πίνακας

- Μπορούμε να δείξουμε τις διαστάσεις ενός πίνακα $A \in \mathcal{R}^{N\times M}$, γράφοντας τον ως $A_{N\times M}$, όπου N ο αριθμός των γραμμών και M ο αριθμός των στηλών (ζωγραφίστε ένα «Γ» από κάτω προς τα επάνω και μετρήστε στοιχεία)

$$A = \begin{array}{cc} & M \\ N & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{v} = \begin{array}{cc} & 1 \\ M & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix} \end{array}$$

- Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{v} \in \mathcal{R}^{M}$, γράφεται και ως $v_{M\times 1}$

- Για να γίνεται ο πολλαπλασιασμός πρέπει τα γειτονικά μεγέθη στους δείκτες να είναι ίδια. Δηλαδή:

$$\checkmark \quad u_{1\times N} = A_{N\times M} v_{M\times 1} \qquad\qquad u_{1\times N} = A_{M\times N} v_{M\times 1} \quad \times$$

X X

Πίνακες και Ρομποτική

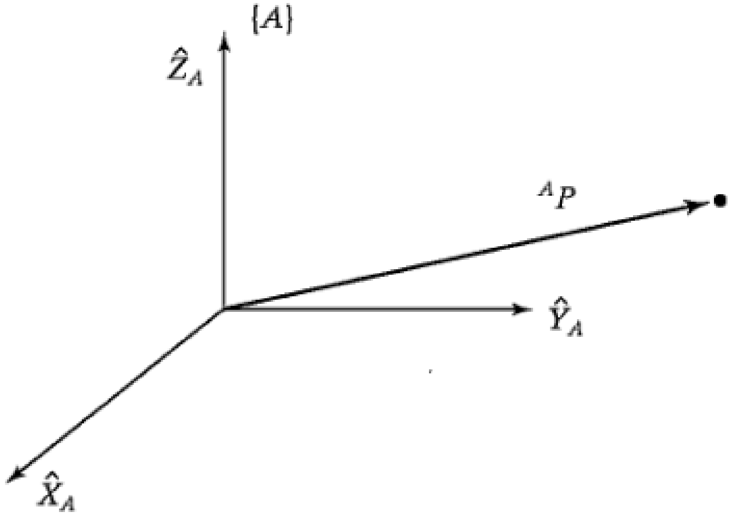
- Ο πίνακας $A \in R^{NxM}$, όταν πολλαπλασιάζεται με ένα διάνυσμα $\vec{v} \in \mathcal{R}^M$, μετασχηματίζει το διάνυσμα αυτό σε ένα νέο διάνυσμα $\vec{u} \in \mathcal{R}^N$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{v}$, που μπορεί να εκφράζει συντεταγμένες ή γενικά κάποια πληροφορία σε έναν χώρο διάστασης M, μεταφέρεται (ή μετατρέπεται) σε έναν νέο χώρο διάστασης N μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού που περιγράφεται από τον πίνακα A.
- Στη ρομποτική, ο χώρος στον οποίο κινείται ο τελικός επενεργητής (π.χ. το χέρι του ρομπότ ή ένα εργαλείο) είναι συνήθως ο τρισδιάστατος χώρος $\mathcal{R}^3$. Αν ο τελικός επενεργητής βρίσκεται στη θέση $z_1 \in \mathcal{R}^3$, τότε ο πίνακας $A \in R^{3x3}$ μπορεί να περιγράψει έναν μετασχηματισμό (όπως περιστροφή ή μετατόπιση) που θα μεταφέρει τη θέση του σε μία νέα θέση $z_2 \in \mathcal{R}^3$.
- Ο πίνακας αυτός μπορεί να περιγράφει, για παράδειγμα, τις κινήσεις που προκαλούνται από τις αρθρώσεις ενός ρομποτικού βραχίονα. Κάθε άρθρωση αλλάζει τη θέση και τη γωνία του βραχίονα, και οι αλλαγές αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού A.

Σύστημα Συντεταγμένων

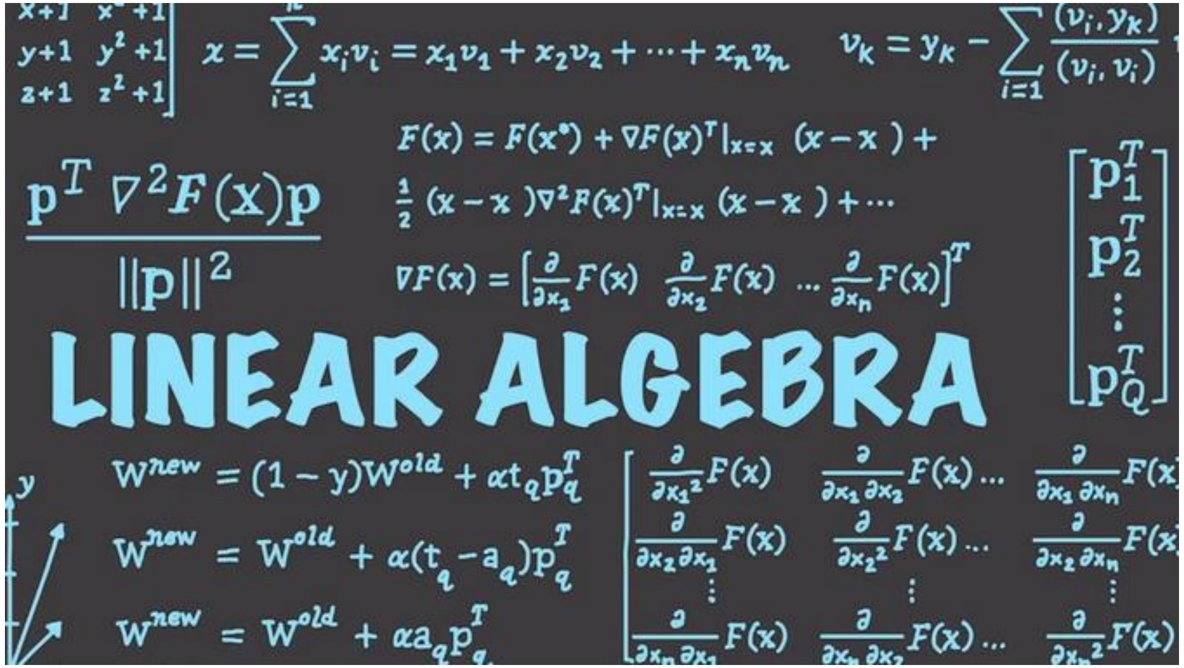
- Ένα σύστημα συντεταγμένων είναι ένας τρόπος αναπαράστασης των σημείων σε έναν γεωμετρικό ή φυσικό χώρο μέσω αριθμητικών τιμών, που ονομάζονται συντεταγμένες. Οι συντεταγμένες προσδιορίζουν τη θέση ενός σημείου στον χώρο, με βάση ένα σύνολο αξόνων που έχουν οριστεί εκ των προτέρων και είναι ίσος με τον αριθμό τιμών (διάσταση) κάθε στοιχείου. Κάθε σύστημα συντεταγμένων ορίζει έναν συγκεκριμένο τρόπο περιγραφής του χώρου και της θέσης των αντικειμένων μέσα σε αυτόν.

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} $$

- Άξονες: Οι γραμμές που ορίζουν τις διαστάσεις του χώρου. Ένα σημείο στον χώρο προσδιορίζεται με βάση την απόστασή του από αυτούς τους άξονες.
- Διαστάσεις: Κάθε διάσταση αντιστοιχεί σε έναν άξονα. Για παράδειγμα, στον δισδιάστατο χώρο έχουμε δύο άξονες (συνήθως x και y), ενώ στον τρισδιάστατο χώρο έχουμε τρεις άξονες (συνήθως x, y και z).
- Σημείο Αναφοράς (αρχή): Το σημείο στο οποίο οι άξονες τέμνονται, συνήθως το σημείο οο για όλους τους άξονες, γνωστό ως αρχή των αξόνων.



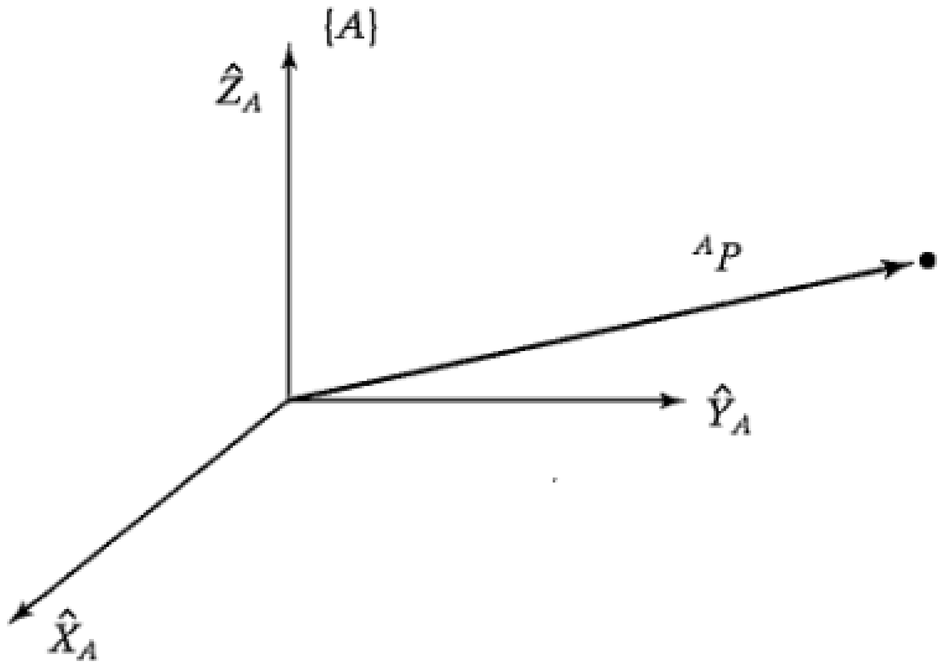
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ



Θέση του τελικού επενεργητή στο χώρο

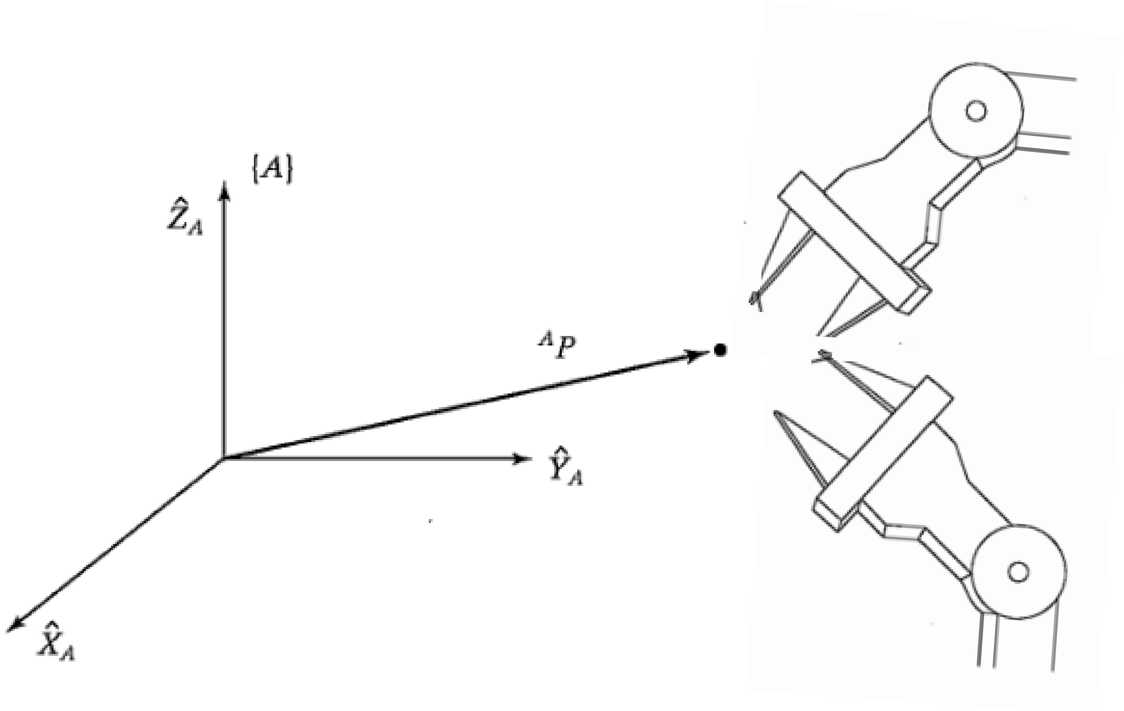
- Ο τελικός επενεργητής θα έχει μια συγκεκριμένη θέση στο τρισδιάστατο χώρο.
- Ονομάζουμε το σύστημα συντεταγμένων ως A.
- Άρα ένα σημείο στο χώρο P θα ορίζεται ως προς το σύστημα συντεταγμένων A ως:

$$^{A}P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$



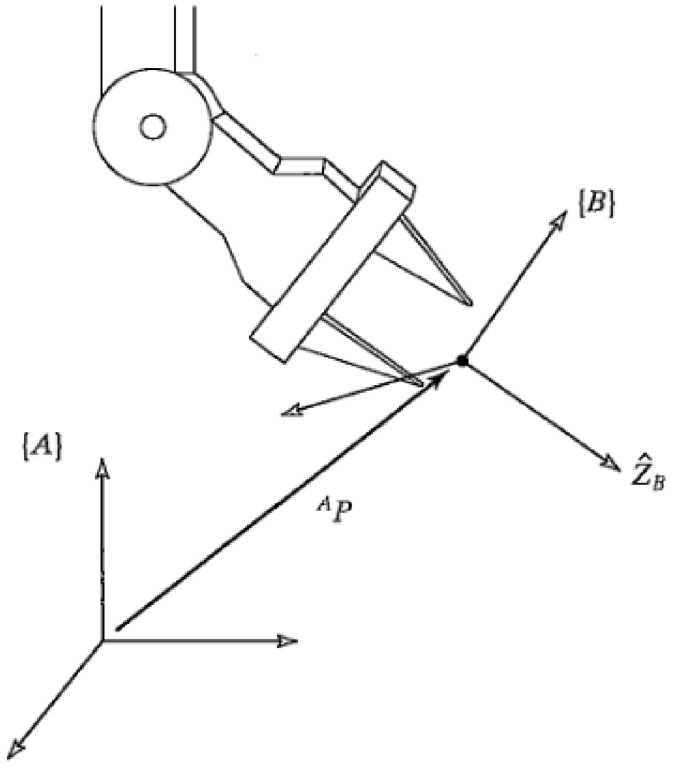
Προσανατολισμός τελικού επενεργητή

- Δεν αρκεί να ξέρουμε μόνο την θέση του τελικού επενεργητή αλλά και τον προσανατολισμό του.
- Στην εικόνα και οι δύο επενεργητές έχουν την ίδια θέση αλλά είναι διαφορετικά στραμμένοι.



Προσανατολισμός τελικού επενεργητή

- Για να ορίσουμε τον προσανατολισμό, ορίζουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων B, το οποίο έχει κέντρο πάνω στη θέση του επενεργητή και είναι στραμένο ως προς το σύστημα συντεταγμένων A.
- **Άρα οι θέσεις αντικειμένων του ρομπότ (πχ τελικός επενεργητής) ορίζονται με ένα διάνυσμα από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων A , ενώ η περιστροφή τους με ένα στραμμένο σύστημα συντεταγμένων ως προς το A.**



Προσανατολισμός τελικού επενεργητή

- Το σύστημα συντεταγμένων Β έχει τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B$.
- Κάθε ένα από τα μοναδιαία αυτά διανύσματα είναι περιστραμένα ως προς το σύστημα συντεταγμένων Α.
- Αν τα δούμε από την πλευρά του συστήματος συντεταγμένων Α, τότε γράφονται ως: ${}^{A}\hat{x}_B, {}^{A}\hat{y}_B, {}^{A}\hat{z}_B$.
- Συμφέρει αυτά τα διανύσματα να τα μαζέψουμε ως στήλες ενός πίνακα ${}^{A}_{B}R \in \mathcal{R}^3$, που λέγεται πίνακας περιστροφής.

$$
{}^{A}_{B}R = [{}^{A}\hat{x}_B, {}^{A}\hat{y}_B, {}^{A}\hat{z}_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B\hat{x}_A & \hat{y}_B\hat{x}_A & \hat{z}_B\hat{x}_A \\ \hat{x}_B\hat{y}_A & \hat{y}_B\hat{y}_A & \hat{z}_B\hat{y}_A \\ \hat{x}_B\hat{z}_A & \hat{y}_B\hat{z}_A & \hat{z}_B\hat{z}_A \end{bmatrix}
$$

- Κάθε στοιχείο δίνει μια γωνία. Π.χ. $\hat{x}_B\hat{y}_A = |\hat{x}_B||\hat{y}_A| \cos\theta_{x_B y_A}$. Είναι η γωνία που είναι στραμμένος ο άξονας $\hat{x}_B$ ως προς το $\hat{y}_A$.

Προσανατολισμός τελικού επενεργητή

- Παρατηρούμε το εξής:

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}p_x \\ {}^{A}p_y \\ {}^{A}p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B\hat{x}_A & \hat{y}_B\hat{x}_A & \hat{z}_B\hat{x}_A \\ \hat{x}_B\hat{y}_A & \hat{y}_B\hat{y}_A & \hat{z}_B\hat{y}_A \\ \hat{x}_B\hat{z}_A & \hat{y}_B\hat{z}_A & \hat{z}_B\hat{z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}p_x \\ {}^{B}p_y \\ {}^{B}p_z \end{bmatrix}$$

- Άρα:

$$^{A}p_x = \hat{x}_B\hat{x}_A\,{}^{B}p_x + \hat{y}_B\hat{x}_A\,{}^{B}p_y + \hat{z}_B\hat{x}_A\,{}^{B}p_z$$
$$^{A}p_x = (\hat{x}_B\,{}^{B}p_x + \hat{y}_B\,{}^{B}p_y + \hat{z}_B\,{}^{B}p_z)\hat{x}_A$$
$$^{A}p_x = {}^{B}P\hat{x}_A$$

- Το $^{A}p_x$ είναι η προβολή του ^{B}P πάνω στον άξονα x του A, με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{x}_A$.

Άσκηση

- Έστω ότι γυρνάμε ως προς το άξονα Z τον {A} κατά 30 μοίρες και παίρνουμε το πλαίσιο {B}. Ποιος είναι ο πίνακας περιστροφής και πως περιγράφεται το σημείο:

$$^{B}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

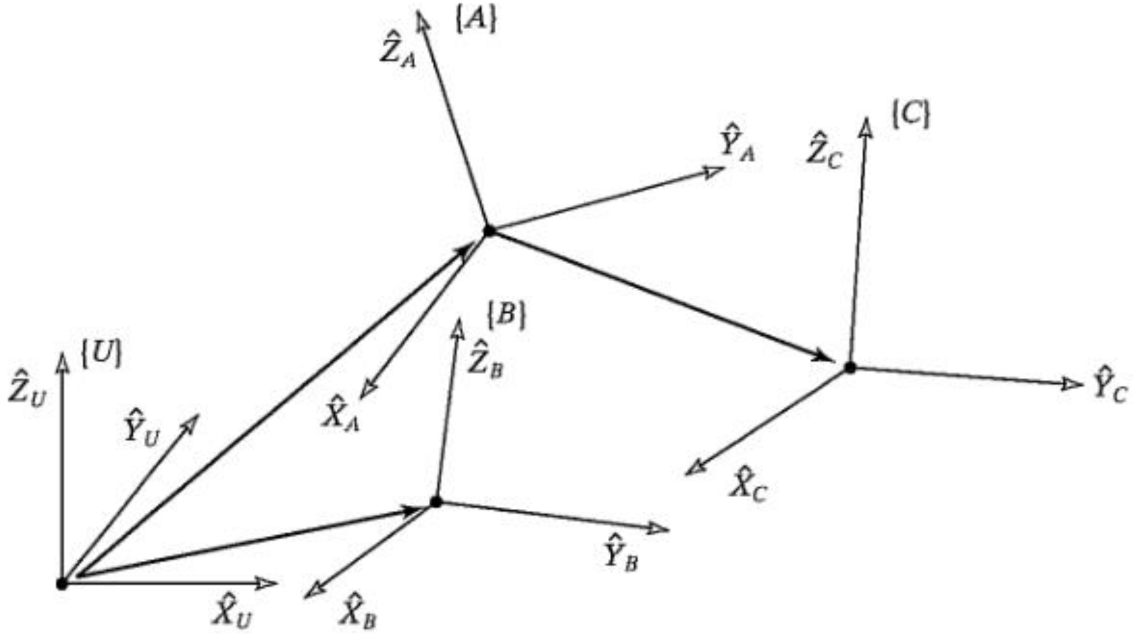
ως προς το A;

Πλαίσιο

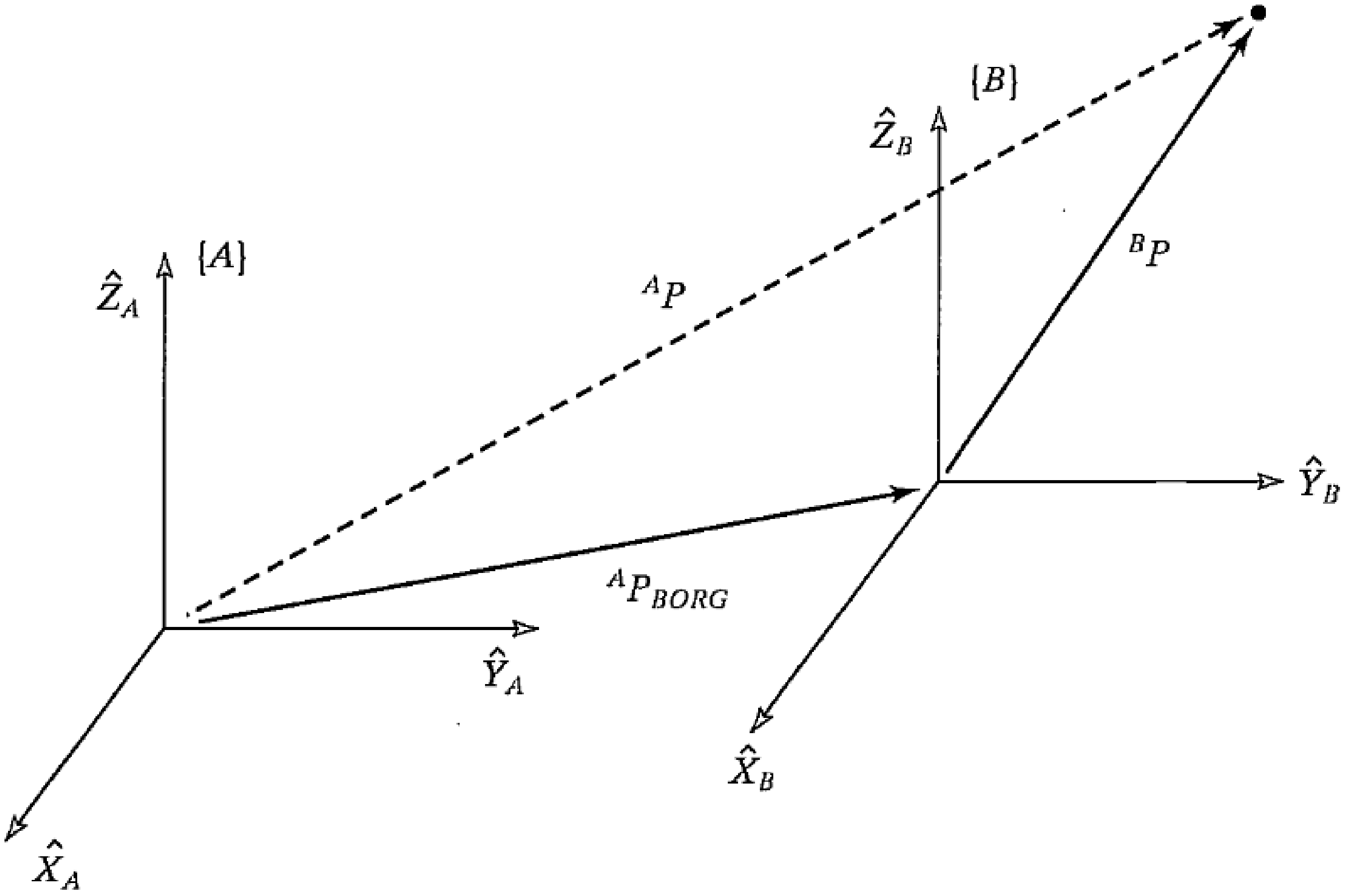
- Είδαμε ότι για να ορίσουμε την θέση ενός επενεργητή ως προς το σύστημα συνεταγμένων A θέλουμε ένα διάνυσμα θέσης ${}^{A}P$ και ένα σύστημα συντεταγμένων B με τρία διανύσματα περιστροφής${}^{A}\hat{x}_B$, ${}^{A}\hat{y}_B$, ${}^{A}\hat{z}_B$, που ομαδοποιούνται στον πίνακα περιστροφής ${}^{A}_{B}R$: 4 διανύσματα σύνολο που ονομάζονται πλαίσιο.
- Ένα πλαίσιο $\{B\}$ γράφεται:

$$\{B\} = \{{}^{A}_{B}R, {}^{A}P_{\mathrm{BORG}}\}$$

- Στην εικόνα τα πλαίσια $\{A\}$, $\{B\}$ είναι γνωστά ως προς το πλαίσιο $\{U\}$, και το $\{C\}$ ως προς το $\{A\}$.
- Άρα ένα πλαίσιο περιγράφει την αναπαράσταση ενός συστήματος συντεταγμένων ως προς ένα άλλο.



Αντιστοιχήσεις (αλλαγή περιγραφής από πλαίσιο σε πλαίσιο)



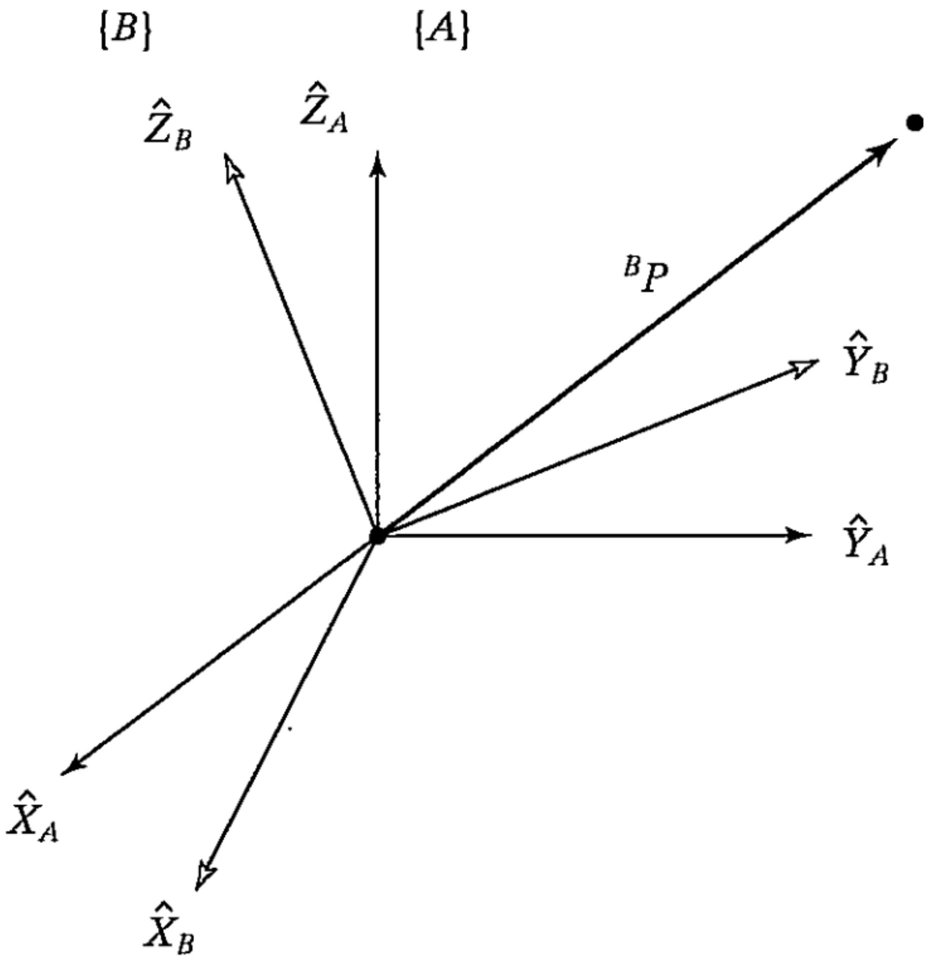
Αντιστοιχήσεις (αλλαγή περιγραφής από πλαίσιο σε πλαίσιο)

- Στην εικόνα θέλουμε την περιγραφή του πλαισίο $\{B\}$ ως προς το πλαίσιο $\{\mathrm{A}\}$. Βλέπουμε ότι ο προσανατολισμός των δύο συστημάτων συντεταγμένων είναι ίδιος, αλλά η θέση του κεντρικού σημείου αλλάζει.
- Η περιγραφή ενός σημείου P, ως προς το B είναι ${}^{B}\mathrm{P}$ και ως προς το A είναι ${}^{\mathrm{A}}\mathrm{P}$
- Άρα:

$$ {}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = {}^{B}\mathrm{P} + {}^{A}P_{\mathrm{B}ORG} $$

- Προσοχή. Το σημείο P δεν αλλάζει. Μόνο η περιγραφή του ανάλογα με από ποιο σύστημα συντεταγμένων το κοιτάμε.

Αντιστοιχήσεις (αλλαγή περιγραφής από πλαίσιο σε πλαίσιο)



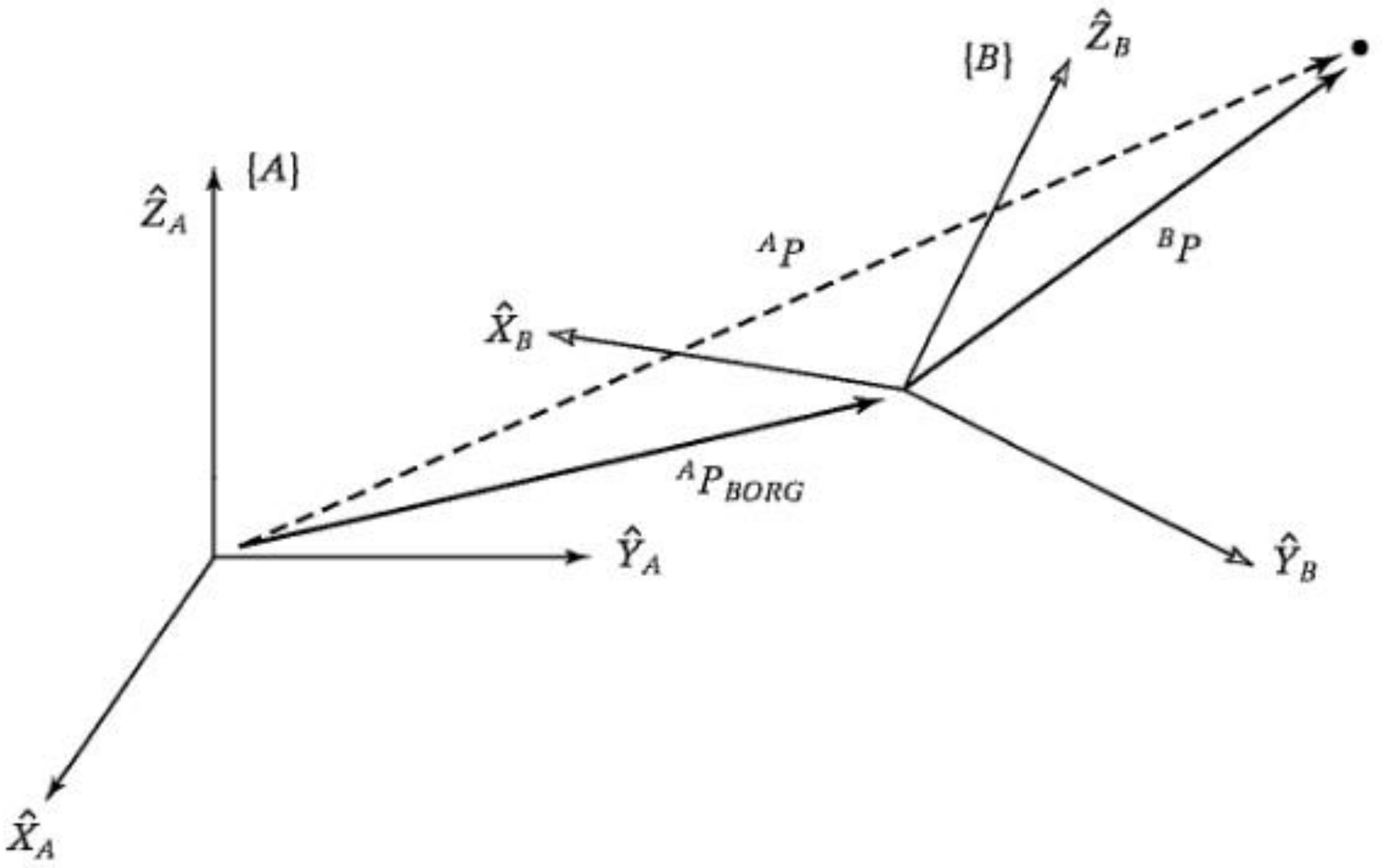
Αντιστοιχήσεις (αλλαγή περιγραφής από πλαίσιο σε πλαίσιο)

- Στην εικόνα θέλουμε πάλι την περιγραφή ενός σημείου το πλαίσιο $\{B\}$ ως προς το πλαίσιο $\{\mathrm{A}\}$.
- Εδώ η θέση δεν αλλάζει, αλλά αλλάζει ο προσανατολισμός.
- Η περιγραφή ενός σημείου ως προς το B είναι ${}^{B}\mathrm{P}$ και ως προς το A είναι ${}^{\mathrm{A}}\mathrm{P}$
- Άρα:

$$ {}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = {}^{A}_{B}\mathrm{R}\ {}^{B}\mathrm{P} $$

- Προσοχή. Το σημείο P δεν αλλάζει. Μόνο η περιγραφή του ανάλογα με από ποιο σύστημα συντεταγμένων το κοιτάμε.

Αντιστοιχήσεις (αλλαγή περιγραφής από πλαίσιο σε πλαίσιο)



Αντιστοιχήσεις (αλλαγή περιγραφής από πλαίσιο σε πλαίσιο)

- Εδώ έχουμε και περιστροφή αλλά και μετατόπιση του πλαισίου {B} ως προς το $\{A\}$, άρα ένα σημείο ${}^{B}P$ ως προς το A είναι:

$$ {}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} = {}^{A}P_{BORG} + {}^{A}_{B}\mathrm{R}\,{}^{B}\mathrm{P} $$

- Αυτός λέγεται γενικευμένος μετασχηματισμός.
- Είναι πιο elegant να τον γράφαμε σε μορφή:

$$ {}^{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{P}} = {}^{A}_{B}\mathrm{T}\,{}^{B}\overline{\mathrm{P}} $$

- Εδώ έχουμε έναν γενικό μετασχηματισμό ${}^{A}_{B}\mathrm{T}$.
- Για αυτό προσθέτουμε έναν άσσο στις συντεταγμένες των ${}^{\mathrm{A}}\mathrm{P}$, ${}^{\mathrm{B}}\mathrm{P}$ και γράφουμε:

$$ \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{A}}\mathrm{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}p_x \\ {}^{A}p_y \\ {}^{A}p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathrm{R} & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{B}}\mathrm{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & q_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & q_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}p_x \\ {}^{B}p_y \\ {}^{B}p_z \\ 1 \end{bmatrix} $$

- Ο 4x4 πίνακας ${}^{A}_{B}\mathrm{T}$ λέγεται **ομογενής μετασχηματισμός**.

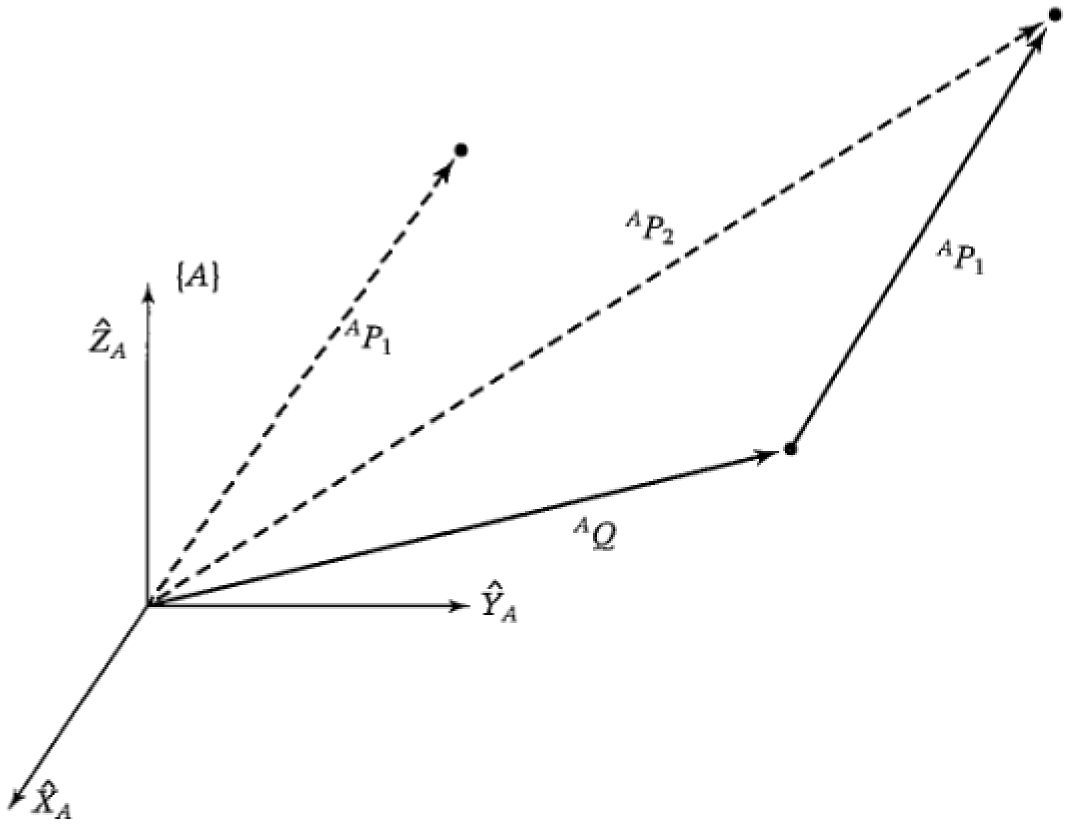
Άσκηση

- Βλέπουμε ένα πλαίσιο {B} που έχει μετατοπιστεί 10 μονάδες ως προς το $\hat{x}_A$, 5 μονάδες ως προς το $\hat{y}_A$ και έχει περιστραφεί 30 μοίρες ως προς τον άξονα $\hat{z}_A$. Βρείτε τον ομογενή μετασχηματισμό ${}^A_B\mathrm{T}$. Πως φαίνεται το παρακάτω σημείο από το πλαίσιο {A} ;

$$ {}^{B}P = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} $$

ΠΡΑΞΕΙΣ : ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ, ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ, ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- Οι ίδιοι μετασχηματισμοί που αλλάζουν αναπαράσταση ανάμεσα σε πλαίσια, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μετακινήσουμε ή να περιστρέψουμε πλαίσια (άρα αντικείμενα) στον χώρο.



ΠΡΑΞΕΙΣ : ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ, ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ, ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- Στην εικόνα βλέπουμε πως το σημείο ${}^{A}P_1$ μετατοπίζεται στο σημείο ${}^{A}P_2$.

$$ {}^{A}P_2 = {}^{A}P_1 + {}^{A}Q $$

- Μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή ομεγενούς μετασχηματισμού χωρίς περιστροφή ως:

$$ {}^{A}\bar{P}_2 = \mathrm{D_Q(q)}\,{}^{A}\bar{P}_1 $$

$$ \mathrm{D_Q(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

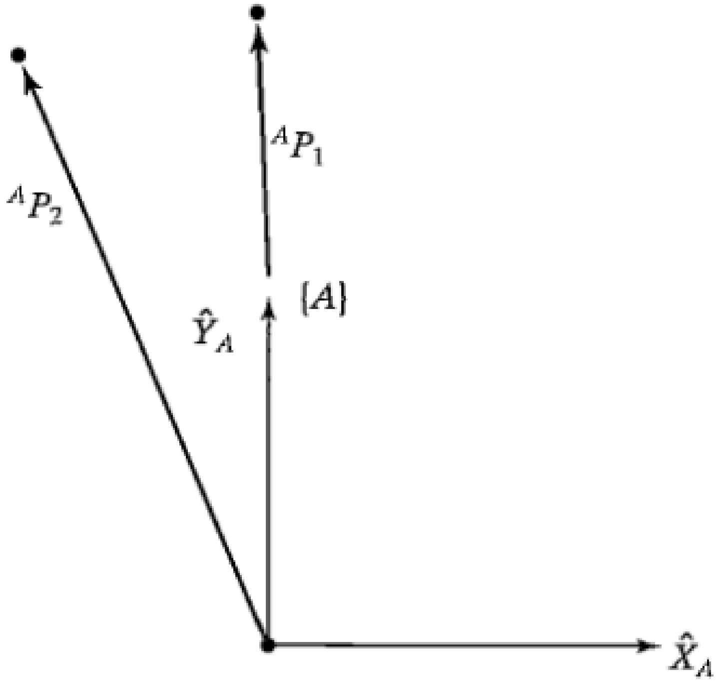
ΠΡΑΞΕΙΣ : ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ, ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ, ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- Για την περιστροφή ενός πλαισίου στον χώρο, έχουμε την σχέση.

$$^{A}\bar{P}_2 = R_K(\theta)\,^{A}\bar{P}_1$$

- Το $R_K(\theta)$ είναι ένας ομογενής μετασχηματισμός που σημαίνει περιστροφή του αντικειμένου ως προς το άξονα Κ κατά γωνία θ.

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ΠΡΑΞΕΙΣ : ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ, ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ, ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

- Όπως και προηγουμένως στην περίπτωση των πλαισίων μπορούμε να ορίσουμε έναν γενικό ομογενή μετασχηματισμό T που μετατοπίζει και περιστρέφει ένα διάνυσμα στο χώρο.

$${}^{A}\bar{P}_2 = \mathrm{T}\ {}^{A}\bar{P}_1$$

- Άρα ένας μετασχηματισμός μπορεί να εξηγηθεί από 2 σκοπιές:
- Είναι η περιγραφή ενός σημείο ως προς άλλο πλαίσιο.
- Είναι η μετατόπιση, περιστροφή ενός αντικειμένου στο χώρο, που ορίζεται ως προς το σημείο P.

Άσκηση

- Έστω ένα διάνυσμα στο χώρο ${}^{A}P_1$. Θέλουμε να το περιστρέψουμε ως προς τον άξονα Z κατά 30 μοίρες και να το μετατοπίσουμε ως προς το X κατά 10 μονάδες και ως προς το Y κατά 5 μονάδες. Βρείτε το νέο διάνυσμα ${}^{A}P_2$.

$${}^{A}P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

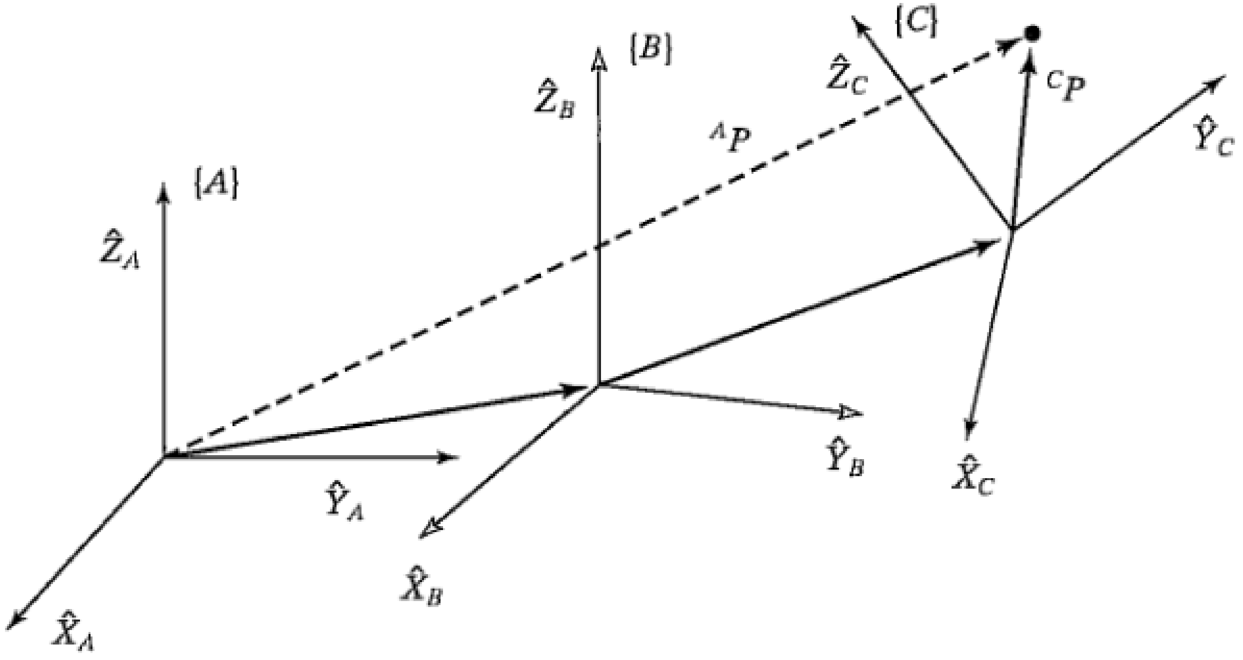
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

- Αφού ορίσαμε τι είναι ο μετασχηματισμός, τώρα θα δούμε τις αριθμητικές πράξεις μεταξύ μετασχηματισμών.

- Αυτές είναι δύο:

❖ Αλυσιδωτοί μετασχηματισμοί (πολλαπλασιασμός)

❖ Αναστροφή



ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

- Ξέρουμε το πλαίσιο $\{C\}$ ως προς το {B} και το {B} ως προς το {A}. Γνωρίζοντας ένα σημείο ${}^{C}P$ πως μπορούμε να το αναπαραστήσουμε ως προς το πλαίσιο {A} ;
- Ξέρουμε ότι : ${}^{\mathrm{B}}P = {}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}}\mathrm{T}\,{}^{\mathrm{C}}P$ και ${}^{\mathrm{A}}P = {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{T}\,{}^{B}P$
- Άρα:

$$ {}^{A}\mathrm{P} = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{\mathrm{C}}P $$

$$ {}^{A}_{\mathrm{C}}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T $$

- Μπορούμε να εμφανίσουμε και τη περιστροφή και την μετατόπιση ως:

$$ {}^{A}_{\mathrm{C}}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{\mathrm{B}}\mathrm{R} & {}^{A}P_{\mathrm{BORG}} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}_{\mathrm{C}}\mathrm{R} & {}^{B}P_{\mathrm{CORG}} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\mathrm{R}\,{}^{B}_{\mathrm{C}}\mathrm{R} & {}^{A}_{B}\mathrm{R}\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{\mathrm{BORG}} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

- Κάποιες φορές ενώ ξέρουμε ένα πλαίσιο {B} ως προς το {A} (${}^{A}_{B}T$), θέλουμε να μάθουμε το {A} ως προς το {B} (${}^{\mathrm{B}}_{A}T$).
- Για την περιστροφή ισχύει:

$$ {}^{\mathrm{B}}_{A}\mathrm{R} = {}^{\mathrm{A}}_{B}\mathrm{R}^{\mathrm{T}} $$

- Μετά θέλουμε να δούμε την μετατόπιση του A ως προς το B, ${}^{B}P_{AORG}$. Για αυτό αλλάζουμε την περιγραφή του ${}^{\mathrm{A}}P_{\mathrm{BORG}}$ στο B. Προσέξτε ότι από την σκοπιά του B το σημείο ${}^{\mathrm{A}}P_{\mathrm{BORG}}$ είναι το σημείο 0.

$$ {}^{B}\left({}^{\mathrm{A}}\bar{P}_{\mathrm{BORG}}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{B}_{A}T\,{}^{\mathrm{A}}\bar{P}_{\mathrm{BORG}} = \begin{bmatrix} {}^{B}_{\mathrm{A}}\mathrm{R} & {}^{B}P_{AORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{A}}P_{\mathrm{BORG}} \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ 0 = {}^{B}_{\mathrm{A}}\mathrm{R}\,{}^{\mathrm{A}}P_{\mathrm{BORG}} + {}^{B}P_{AORG} $$

$$ {}^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{\mathrm{A}}\mathrm{R}\,{}^{\mathrm{A}}P_{\mathrm{BORG}} $$

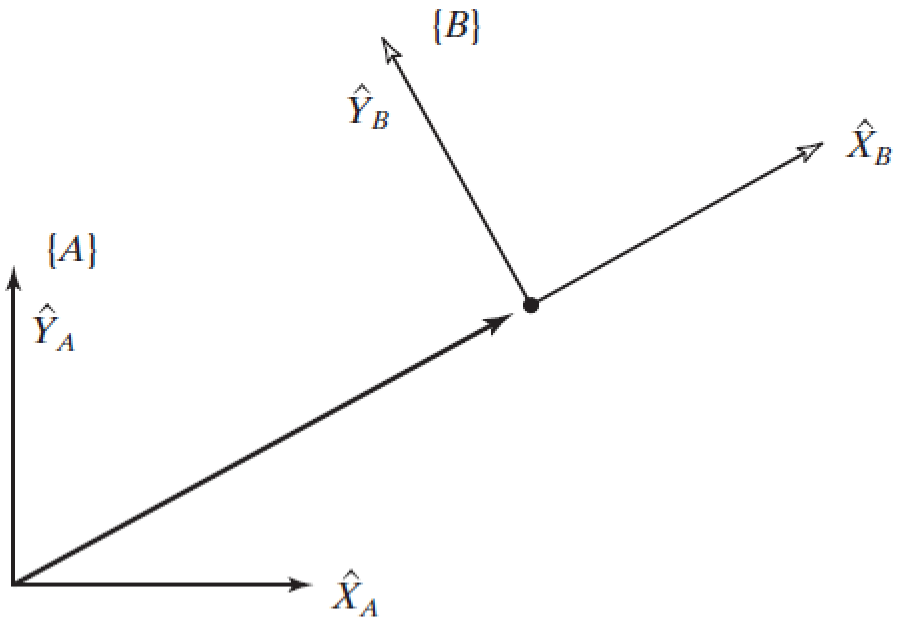
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

- Άρα η γενική σχέση αναστροφής είναι:

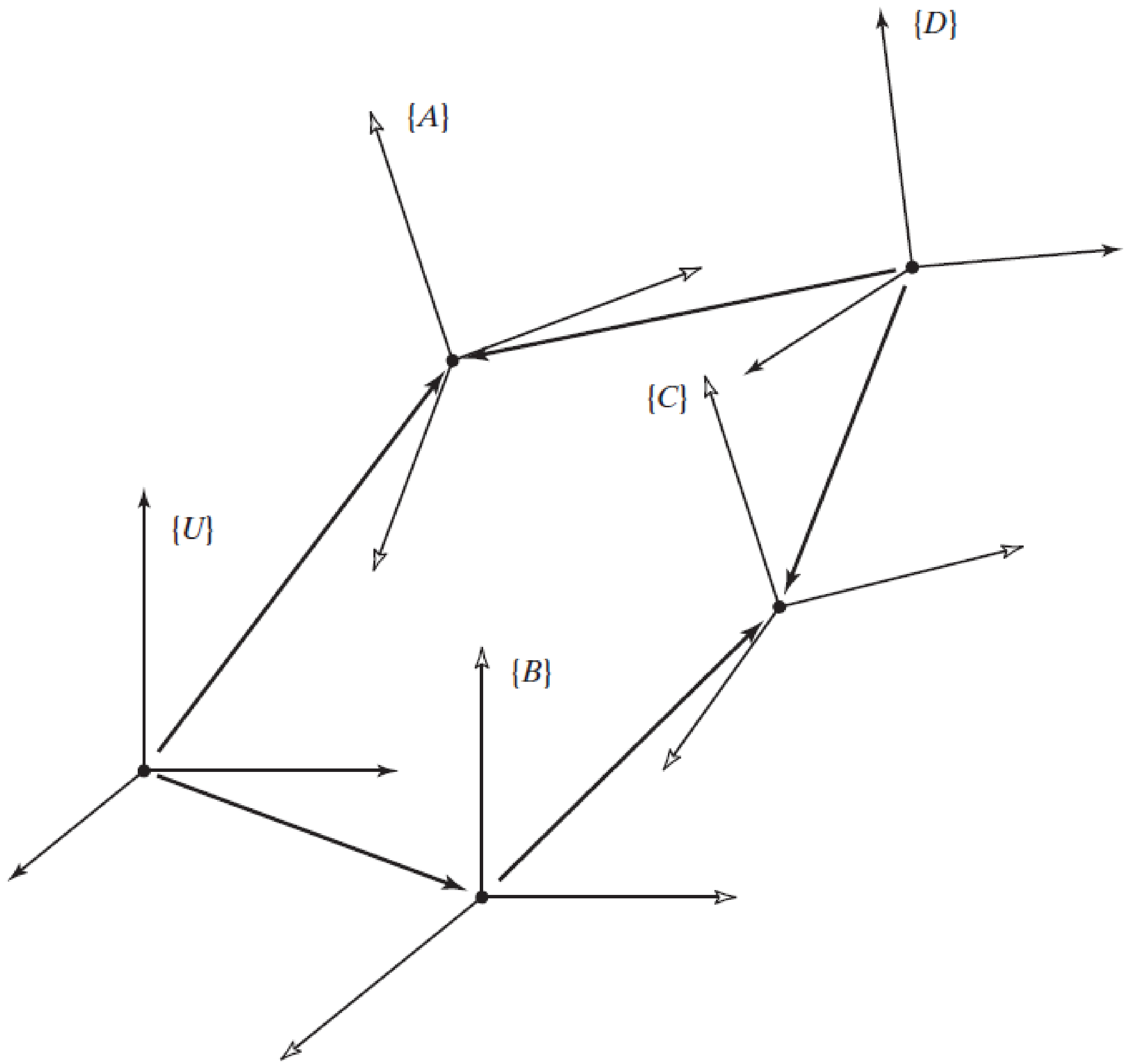
$$ {}^{\mathrm{B}}_{A}T = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{A}}_{B}\mathrm{R}^{\mathrm{T}} & -{}^{B}_{\mathrm{A}}\mathrm{R}\,{}^{\mathrm{A}}P_{\mathrm{B}ORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}T^{-1} $$

ΑΣΚΗΣΗ

- Στην παρακάτω εικόνα πάμε από το {A} στο {B} περιστρεφόμενοι ως προς το $\hat{z}_A$ κατά 30 μοίρες και μετατοπιζόμενοι ως προς το $\hat{x}_A$ κατά 4 μονάδες και ως προς το $\hat{y}_A$ κατά 3 μονάδες. Βρείτε τον ομογενή μετασχηματισμό ${}^{A}_{B}T$ και μετά τον ανάστροφο ${}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}T$.



Κλειστές Αλυσίδες



Κλειστές Αλυσίδες

- Μπορώ να περιγράψω το C ως προς το U με δύο τρόπους:

$$ {}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{C}}T = {}^{A}_{U}T \, {}^{D}_{A}T^{-1} \, {}^{D}_{C}T $$

$$ {}^{\mathrm{U}}_{\mathrm{C}}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T $$

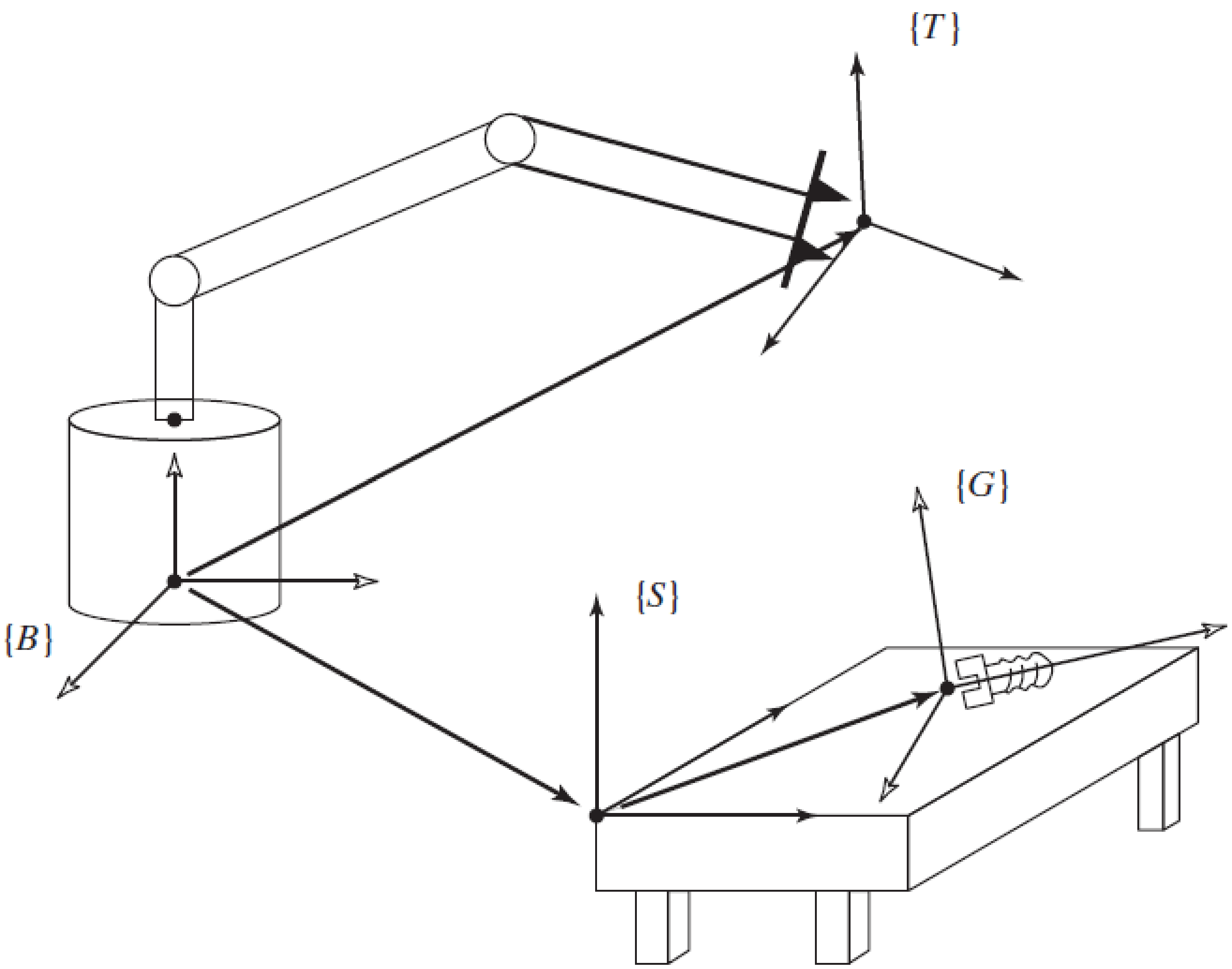
- Άρα σχηματίζω την κλειστή εξίσωση:

$$ {}^{A}_{U}T \, {}^{D}_{A}T^{-1} \, {}^{D}_{C}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T $$

- Αν λοιπόν ψάχνουμε το ${}^{A}_{U}T$ σαν άγνωστο, τότε μπορούμε να πούμε:

$$ {}^{A}_{U}T = {}^{U}_{B}T \, {}^{B}_{C}T \, {}^{D}_{C}T^{-1} \, {}^{D}_{A}T $$

Άσκηση



Άσκηση

- Έστω ότι ξέρουμε την θέση του τελικού επενεργητή ως προς την βάση του ρομπότ , την θέση του τραπεζιού ως προς την βάση του ρομπότ και την θέση της βίδας ως προς το τραπέζι. Βρείτε την θέση του τελικού επενεργητή ως προς την βίδα.

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΞΑΝΑ

- Μέχρι τώρα για να ορίσουμε έναν πίνακα περιστροφής έπρεπε να ορίσουμε 9 τιμές:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Όμως αυτές τις τιμές είναι αλληλένδετες. Θα θέλαμε ο χρήστης αντί να υπολογίζει 9 νούμερα, να επιλέγει λίγες παραμέτρους και ο πίνακας να υπολογίζεται αυτόματα.
- Ξέρουμε ότι η ορίζουσα του R είναι 1.
- Κάθε τέτοιος πίνακας μπορεί να γραφεί ως:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

Όπου:

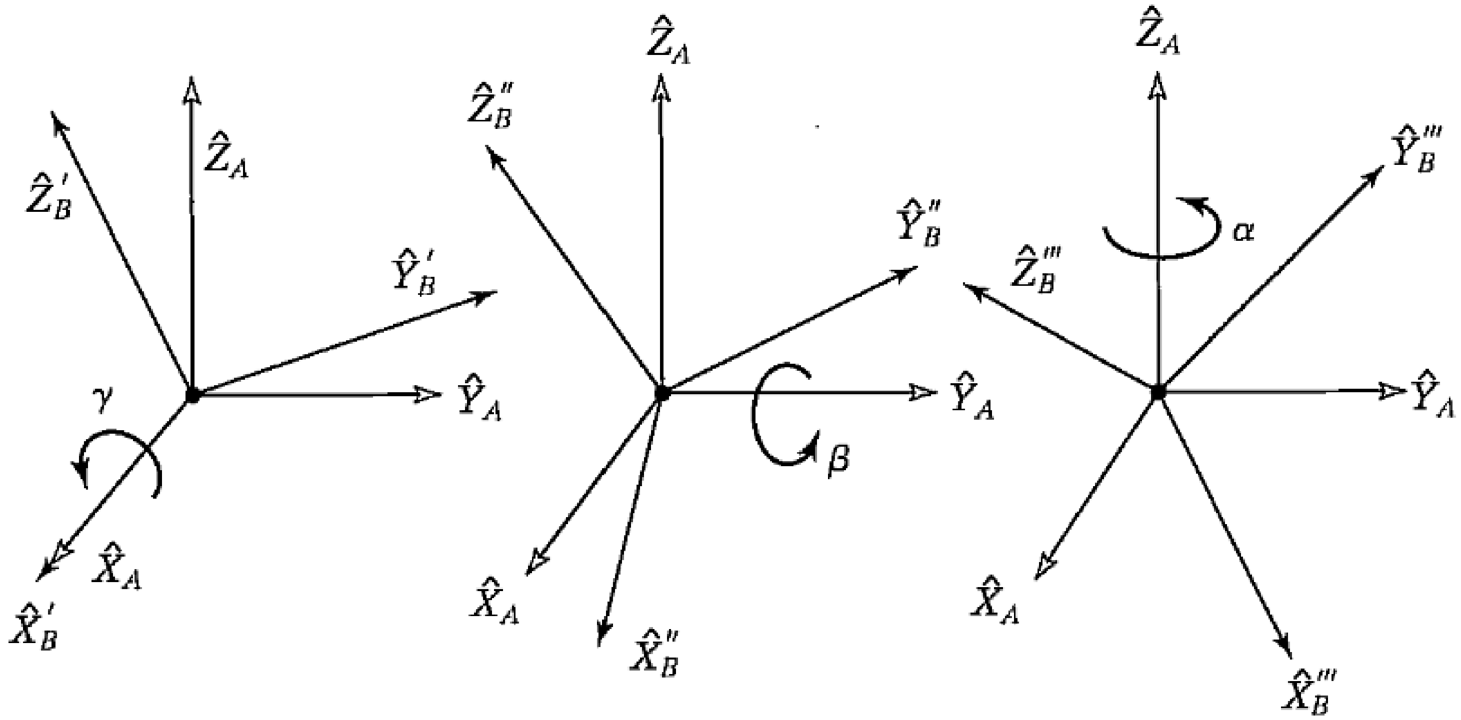
$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_x & s_y \\ s_x & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Άρα κάθε πίνακας R μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από 3 παραμέτρους.

XYZ **fixed** γωνίες

- Για να φτάσουμε σε ένα πλαίσιο B από το A μπορούμε να πούμε:

«Τοποθετούμε το πλαίσιο B ακριβώς πάνω στο A. Το περιστρέφουμε ως προς τον **σταθερό** X_A άξονα κατά γωνία γ, μετά ως προς τον **σταθερό** Y_A άξονα κατά γωνία β και μετά ως προς τον **σταθερό** Z_A άξονα κατά γωνία α.»



XYZ **fixed** γωνίες

- Για να φτάσουμε σε ένα πλαίσιο B από το A μπορούμε να πούμε:

$$ {}^{A}_{\mathrm{B}}\mathrm{R}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) = \begin{bmatrix} ca & -sa & 0 \\ sa & ca & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}_{\mathrm{B}}\mathrm{R}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} cac\beta & cas\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & cas\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ sac\beta & sas\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & sas\beta c\gamma - c\alpha c\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} $$

- Άρα με 3 γωνίες, καθορίσαμε όλον τον πίνακα ${}^{A}_{\mathrm{B}}\mathrm{R}(\gamma,\beta,\alpha)$.
- Προσοχή στη σειρά. Στις fixed γωνίες γράφω τους πίνακες R_X, R_Y, R_Z με ανάποδη σειρά ώστε το γινόμενο να δώσει το ${}^{A}_{\mathrm{B}}\mathrm{R}(\gamma,\beta,\alpha)$.

XYZ **fixed** γωνίες

- Συχνά μας ενδιαφέρει το ανάποδο πρόβλημα:

«Δοθέντος ενός πίνακα περιστροφής R , ποιες είναι οι γωνίες που τον σχημάτισαν;»

- Γράφουμε τον R ως:

$$
{}^{A}_{B}\mathrm{R}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cac\beta & r_{12} & r_{13} \\ sac\beta & r_{22} & r_{23} \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

- Βλέπουμε ότι:

$$
r_{11}^2 + r_{21}^2 = ca^2 c\beta^2 + sa^2 c\beta^2 = \ c\beta^2 \rightarrow \beta = \arctan\left(-\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}}\right)
$$

XYZ **fixed** γωνίες

- Αν και μόνο αν $c\beta \neq 0$ τότε:

$$\tan\alpha = \frac{s\alpha}{c\alpha} = \frac{r_{21}}{r_{11}} \rightarrow a = \arctan\frac{r_{21}}{r_{11}}$$

- Ομοίως αν και μόνο αν $c\beta \neq 0$ τότε :

$$tan\gamma = \frac{s\gamma}{c\gamma} = \frac{r_{32}}{r_{33}} \rightarrow \gamma = \arctan\frac{r_{32}}{r_{33}}$$

- Γενικά λόγω συμμετρίας υπάρχουν δύο λύσεις για το β, μία για κάθε μισό του τριγωνικού κύκλου. Εμείς ενδιαφερόμαστε συνήθως μόνο για μία λύση που είναι στο πρώτο μισό $[-90, 90]$ μοίρες. Όμως κάποιες φορές θέλουμε να υπολογίσουμε όλες τις λύσεις (πιο πολλά στην ανάστροφη κινηματική).

XYZ **fixed** γωνίες

- Τι γίνεται όταν $\beta = \pm 90$ μοίρες και $c\beta = 0$;
- Τότε μπορώ να βρω μόνο το άθροισμα ή την διαφορά των γωνιών α, γ.
- Μία τυπική σύμβαση είναι να θεωρήσω $\alpha = 0$.
- Άρα αν $\beta = 90$: $r_{12} = cas\beta s\gamma - s\alpha c\gamma = s\beta s\gamma = s\gamma$ και $r_{22} = sas\beta s\gamma + c\alpha c\gamma = c\gamma$.

$$\gamma = \arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)$$

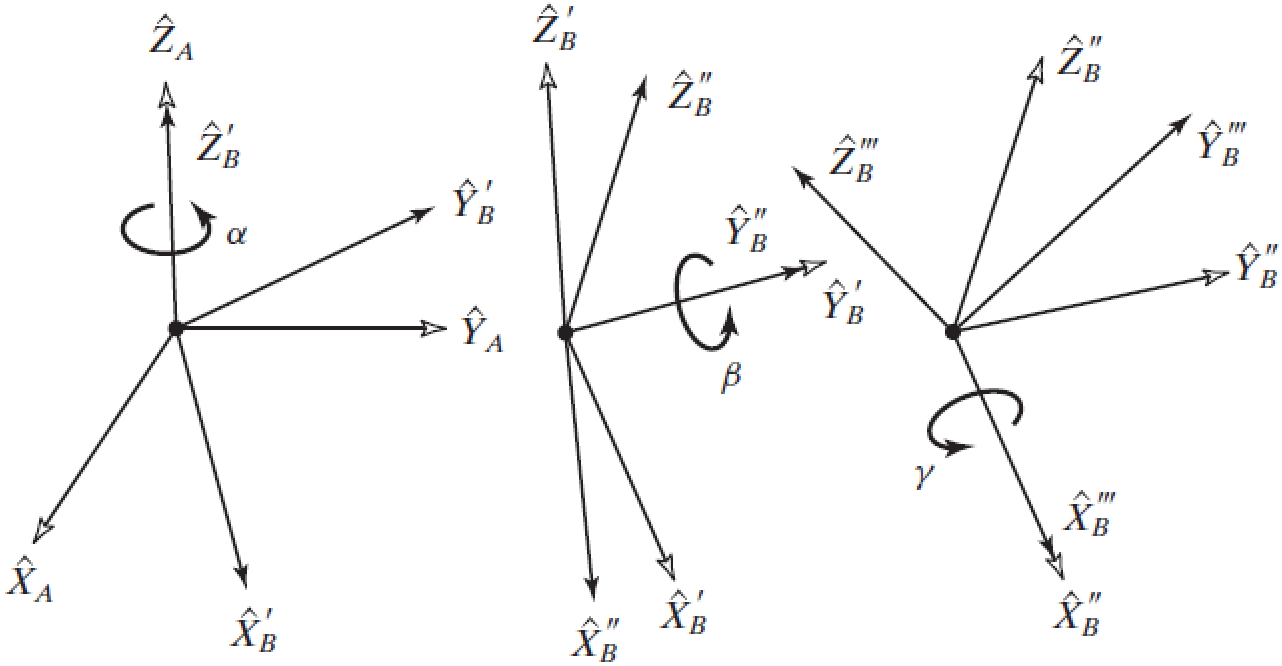
- Αλλιώς αν $\beta = -90$: $r_{12} = cas\beta s\gamma - s\alpha c\gamma = s\beta s\gamma = -s\gamma$ και $r_{22} = c\gamma$, άρα

$$\gamma = -\arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)$$

XYZ γωνίες Euler

- Για να φτάσουμε σε ένα πλαίσιο B από το A μπορούμε να πούμε και κάτι διαφορετικό:

«Τοποθετούμε το πλαίσιο B ακριβώς πάνω στο A. Το περιστρέφουμε ως προς τον περιστρεφόμενο $\mathrm{Z_A}$ άξονα κατά γωνία α. Φτάνουμε στο πλαίσιο B'. Το περιστρέφουμε ως προ τον $\Upsilon_{\mathrm{B}'}$ κατά γωνία β και φτάνω στο πλαίσιο B''. Το περιστρέφουμε ως προ τον $X_{\mathrm{B}''}$ κατά γωνία γ και φτάνω στο B.»



XYZ FIXED ΓΩΝΙΕΣ

- Για να φτάσουμε σε ένα πλαίσιο B από το A μπορούμε να πούμε:

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{A}_{B'}R \, {}^{B'}_{B''}R \, {}^{B''}_{B}R $$

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) = \begin{bmatrix} ca & -sa & 0 \\ sa & ca & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} cac\beta & cas\beta s\gamma - sac\gamma & cas\beta c\gamma + sas\gamma \\ sac\beta & sas\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta c\gamma - cas\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} $$

- Ίδιος με τον πίνακας περιστροφής για τις fixed γωνίες.
- Οι γωνίες εδώ λέγονται Euler γιατί σε αντίθεση με πριν υπολογίζονται ως προς διαφορετικά πλαίσια κατά την περιστροφή (B′,B″), ενώ πριν τα υπολογίζαμε ως προς το σταθερό πλαίσιο A.

Z–Y–Z EULER ΓΩΝΙΕΣ

- Για να φτάσουμε σε ένα πλαίσιο B από το A μπορούμε να πούμε και κάτι διαφορετικό:

«Τοποθετούμε το πλαίσιο B ακριβώς πάνω στο A. Το περιστρέφουμε ως προς τον περιστρεφόμενο $\mathrm{Z_A}$ άξονα κατά γωνία α. Φτάνουμε στο πλαίσιο B'. Το περιστρέφουμε ως προ τον $\Upsilon_{\mathrm{B}'}$ κατά γωνία β και φτάνω στο πλαίσιο B''. Το περιστρέφουμε ως προ τον $\mathrm{Z_{B''}}$ κατά γωνία γ και φτάνω στο B.»

- Φτάνουμε έτσι στον πίνακα περιστροφής, όπως πριν:

$$
{}^{A}_{\mathrm{B}}\mathrm{R}_{Z'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}
$$

Z–Y–Z EULER ΓΩΝΙΕΣ

- Για να βρούμε τις γωνίες από τον πίνακα ${}^{A}_{B}\mathrm{R}_{Z'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha)$, τον γράφουμε ως:

$$ {}^{A}_{B}\mathrm{R}_{Z'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

- Αν $sin\beta = 0$, τότε:

$$ \beta = \arctan(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}/r_{33}) $$

$$ \alpha = \arctan(r_{23}/r_{13}) $$

$$ \gamma = \arctan(r_{32}/-r_{31}) $$

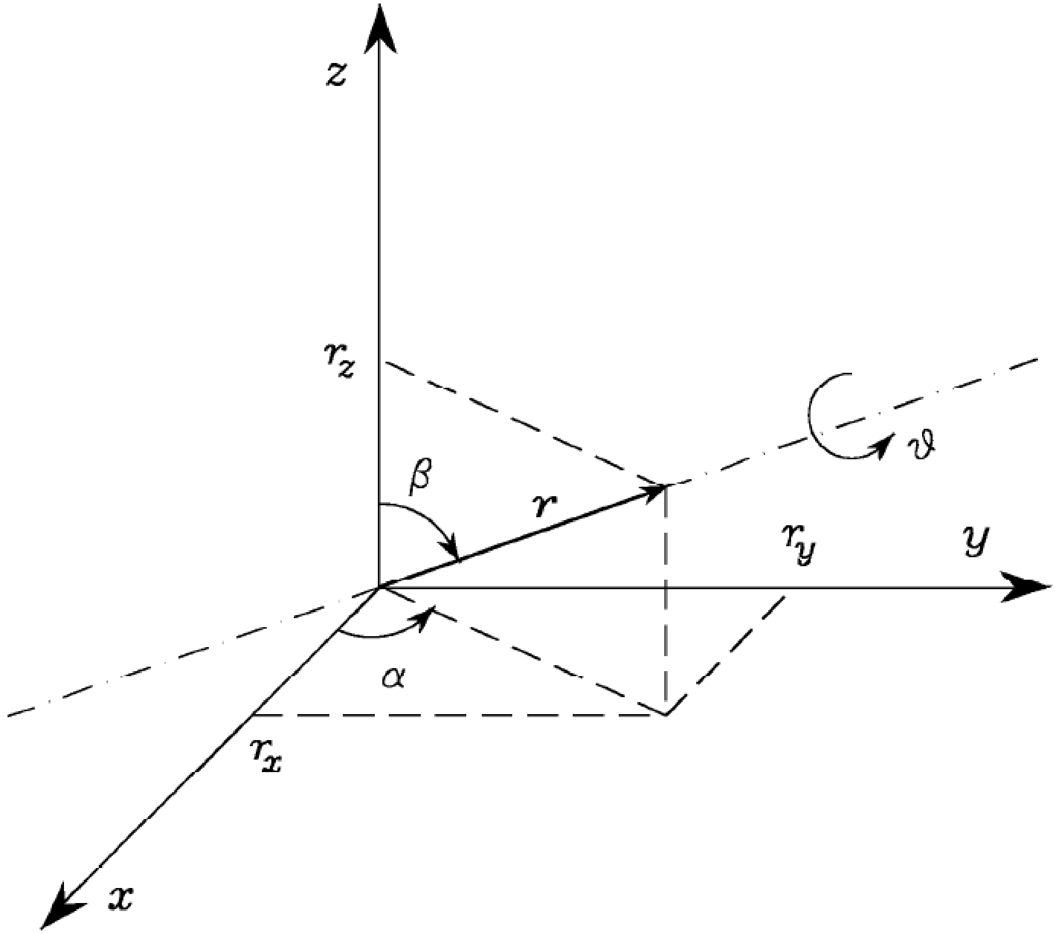
- Αν $\beta = 0 \rightarrow \alpha = 0, \gamma = \arctan(-r_{12}/r_{11})$.
- Αν $\beta = 180 \rightarrow \alpha = 0, \gamma = \arctan(r_{12}/-r_{11})$

ΓΙΑΤΙ ΚΑΙ EULER ΚΑΙ FIXED ΓΩΝΙΕΣ ;

- Όταν θέλουμε να δούμε μια περιστροφή από σταθερό σύστημα συντεταγμένων, τότε χρησιμοποιούμε fixed γωνίες. (Π.χ. βλέπουμε τον τελικό επενεργητή να περιστρέφεται ως προς την σταθερή βάση του ρομπότ).
- Όταν θέλουμε να δούμε μια περιστροφή από το μεταβαλλόμενο σύστημα συντεταγμένων, τότε χρησιμοποιούμε Euler γωνίες (π.χ. κινούμενο ρομπότ ή σε βραχίονα ορίζουμε την περιστροφή από το σύστημα συντεταγμένων του επενεργητή) :
- Για τις Euler και τις Fixed γωνίες έχουμε 24 συνδυασμούς (12 για κάθε τύπο γωνιών) XYZ, ZYZ, ZYY, XYY, κτλ. Είναι όλοι ισοδύναμοι μεταξύ τους, αλλά στη βιβλιογραφία παρουσιάζονται όλοι.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑ-ΑΞΟΝΑ

- Γράφοντας $R_X(30)$ εννοούμε ότι έχουμε περιστροφή ως προς τον $\hat{x}$ άξονα κατά 30 μοίρες. Τι γίνεται όταν έχουμε περιστροφή όχι ως προς έναν από τους $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ άξονες αλλά προς έναν άλλον άξονα $\hat{r}$; Δηλαδή ποιο είναι το $R_r(\theta)$;



ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑ-ΑΞΟΝΑ

- Γράφοντας $R_X(30)$ εννοούμε ότι έχουμε περιστροφή ως προς τον $\hat{x}$ άξονα κατά 30 μοίρες. Τι γίνεται όταν έχουμε περιστροφή όχι ως προς έναν από τους $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ άξονες αλλά προς έναν άλλον άξονα $\hat{r}$; Δηλαδή ποιο είναι το $R_r(\theta)$;

$$R_r(\theta) = \begin{bmatrix} r_x^2 v\theta + c\theta & r_x r_y v\theta - r_z s\theta & r_x r_z v\theta + r_y s\theta \\ r_x r_y v\theta + r_z s\theta & r_y^2 v\theta + c\theta & r_y r_z v\theta - r_x s\theta \\ r_x r_z v\theta - r_y s\theta & r_y r_z v\theta + r_x s\theta & r_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

Εδώ $v\theta = 1 - \cos\theta$ και ${}^{A}\hat{r} = \left(r_x, r_y, r_z\right)^T$.

- Σε αντίθεση με πριν ορίζω την περιστροφή με 4 αριθμούς (r_x, r_y, r_z, θ) αντί για 3 (α, β, γ)

ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΩΝΙΑ-ΑΞΟΝΑ

- Λύνεται άραγε το πρόβλημα της απροσδιοριστίας που είχαμε πριν;

$$R_r(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

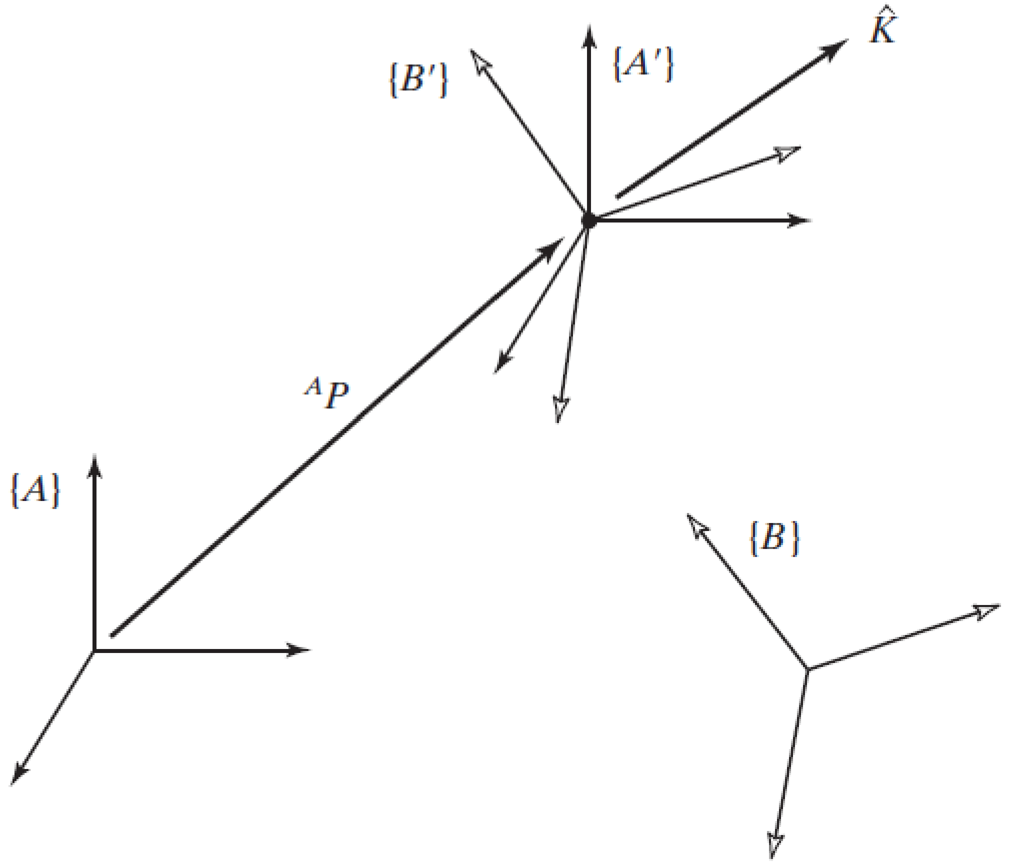
$$\theta = \arccos\left(\frac{(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)}{2}\right)$$

$$\hat{r} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

- Αν $\theta = 0, 180$, τότε το $\hat{r}$ απειρίζεται !.

ΑΣΚΗΣΗ

- Το πλαίσιο B είναι αρχικά ίδιο με το Α. Στη συνέχεια το περιστέφουμε κατά 30 μοίρες ως προς το διάνυσμα ${}^{A}\widehat{\mathrm{K}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^{T}$ που περνάει από το ${}^{A}P = (1,2,3)^{T}$. Βρείτε το ${}^{A}_{\mathrm{B}}T$.
- Έστω Α’ που είναι το νέο πλαίσιο μετακινημένο ως προς το Α και το Β′ που είναι το νέο πλαίσιο μετακινημένο ως προς το Β. Το Α′ και το Β′ έχουν στροφή ως προς το Κ σύμφωνα με τον τύπο.
- Άρα ${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{T} = {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}'}\mathrm{T}\,{}^{\mathrm{A}'}_{\mathrm{B}'}\mathrm{T}\,{}^{\mathrm{B}'}_{\mathrm{B}}\mathrm{T} = {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}'}\mathrm{T}\,{}^{\mathrm{A}'}_{\mathrm{B}'}\mathrm{T}\,{}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}'}\mathrm{T}^{-1}$



EULER ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

- Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε μια περιστροφή με 4 παραμέτρους, είναι οι παράμετροι Euler.

$$\epsilon_1 = r_x \sin\frac{\theta}{2}, \epsilon_2 = r_y \sin\frac{\theta}{2}, \epsilon_3 = r_z \sin\frac{\theta}{2}, \epsilon_4 = \cos\frac{\theta}{2}$$

- Παρατηρούμε ότι : $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1$.

$$R_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3\epsilon_4) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_4) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_4) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

EULER ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

- Λύνοντας τον πίνακα ως προς τις παραμέτρους Euler έχουμε:

$$\epsilon_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4\epsilon_4}, \text{ and}$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}.$$

- Αν $\theta = 180$, τότε $\epsilon_4 = \cos\frac{\theta}{2} = 0$, όμως το $\epsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \neq 0$. Άρα μπορούμε να βρούμε πάντα λύσεις για όλα τα $\theta \in [-\pi, \pi]$. Δεν υπάρχει singularity.