Εισαγωγή στη Ρομποτική

5. Σχεδιασμός τροχιάς

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ
E-Mail: pasv@uniwa.gr

1

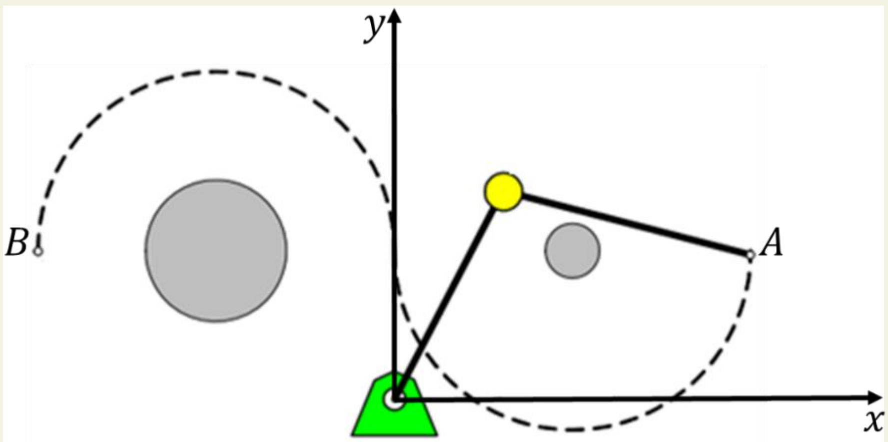
Εισαγωγή

- **Τροχιά τελικού επενεργητή**: οι θέσεις από τις οποίες διέρχεται ο τελικός επενεργητής, ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο για να καταλήξει σε ένα τελικό σημείο στον χώρο.
- Η θέση (x, y, z) του τελικού επενεργητή μεταβάλλεται με τον χρόνο:
  - $x = x(t)$
  - $y = y(t)$
  - $z = z(t)$

2

Εισαγωγή

- Κάτοψη της διαδρομής στο επίπεδο $x-y$ του τελικού επενεργητή ενός απλού βραχίονα για την αποφυγή δύο εμποδίων



Εισαγωγή

- **Γραμμική Ταχύτητα**:
  - Μεταβολή της θέσης στη μονάδα του χρόνου.
  - Μαθηματικά, δίνεται από τη χρονική παράγωγο **1ης τάξης** της θέσης.
- **Επιτάχυνση**:
  - Μεταβολή της ταχύτητας στη μονάδα του χρόνου.
  - Μαθηματικά, δίνεται από τη χρονική παράγωγο 1ης τάξης της ταχύτητας ⇔ χρονική παράγωγος **2ης τάξης** της θέσης.

Εισαγωγή

- Ορισμός γραμμικής ταχύτητας:
  - κατά μήκος του άξονα x: $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
  - κατά μήκος του άξονα y: $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$
  - κατά μήκος του άξονα z: $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$
- Ορισμός επιτάχυνσης:
  - κατά μήκος του άξονα x: $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$
  - κατά μήκος του άξονα y: $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$
  - κατά μήκος του άξονα z: $\ddot{z}(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$

5

Παράδειγμα 5-1

Έστω ένας βραχίονας που κινείται στο επίπεδο $x-y$ (δηλαδή $z(t)=0$ κάθε χρονική στιγμή) με $x(t) = 20t^3 - 30t^2 + 4$ και $y(t) = 9t^3 - 9t^2 + 6$, όπου η χρονική μεταβλητή t είναι σε δευτερόλεπτα και οι συντεταγμένες σε εκατοστά. Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή 0,5 s.

6

Παράδειγμα 5-1 (Λύση)

$x(t) = 20t^3 - 30t^2 + 4 \Rightarrow \dot{x}(t) = 60t^2 - 60t \Rightarrow \ddot{x}(t) = 120t - 60$

$y(t) = 9t^3 - 9t^2 + 6 \Rightarrow \dot{y}(t) = 27t^2 - 18t \Rightarrow \ddot{y}(t) = 54t - 18$

Τη χρονική στιγμή $0{,}5\ s$ ($t = 0{,}5\ \mathrm{s}$)

Ταχύτητα:

$\dot{x}(0{,}5) = 60(0{,}5)^2 - 60(0{,}5) = -15\ \mathrm{cm/s}$

$\dot{y}(0{,}5) = 27(0{,}5)^2 - 18(0{,}5) = -2{,}25\ \mathrm{cm/s}$

Επιτάχυνση:

$\ddot{x}(0{,}5) = 120(0{,}5) - 60 = 0\ \mathrm{cm/s^2}$

$\ddot{y}(0{,}5) = 54(0{,}5) - 18 = 9\ \mathrm{cm/s^2}$

Εισαγωγή

- **Σχεδιασμός τροχιάς**: *εύρεση συναρτήσεων που περιγράφουν πως μεταβάλλονται με τον χρόνο οι τρεις συντεταγμένες* (x, y, z) *του τελικού επενεργητή*.
- Δεδομένα:
  1. **Διάρκεια κίνησης**
  2. **Αρχικές συνθήκες**: αρχικό και τελικό σημείο και (προαιρετικά) ταχύτητα και επιτάχυνση στα σημεία αυτά.
  3. **Μορφή τροχιάς**: καθορίζεται εάν η τροχιά θα είναι ευθύγραμμη, καμπυλόγραμμη ή αν ο τελικός επενεργητής θα πρέπει να περάσει από συγκεκριμένα ενδιάμεσα σημεία.

Εισαγωγή

- Συμβολισμοί:
  - Χρονική διάρκεια κίνησης: T (θεωρείται ότι η κίνηση ξεκινάει τη στιγμή 0 s)
  - Συντεταγμένες αρχικού σημείου: (x_0, y_0, z_0)
  - Συντεταγμένες τελικού σημείου: (x_T, y_T, z_T)
  - Ταχύτητα στο αρχικό σημείο: $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$
  - Ταχύτητα στο τελικό σημείο: $(\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T)$
  - Επιτάχυνση στο αρχικό σημείο: $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0)$
  - Επιτάχυνση στο τελικό σημείο: $(\ddot{x}_T, \ddot{y}_T, \ddot{z}_T)$

9

Ευθύγραμμη τροχιά

- Είναι γνωστά δεδομένα στις δύο οριακές θέσεις (αρχικό και τελικό σημείο και προαιρετικά ταχύτητα, επιτάχυνση σε αυτά)
- Εξίσωση ευθείας στις 3 διαστάσεις:

$$y = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x - x_0)$$

$$z = z_0 + \frac{z_T - z_0}{x_T - x_0}(x - x_0)$$

- Εάν εξαχθεί η χρονική συνάρτηση $x(t)$, τότε με χρήση των προηγούμενων σχέσεων θα προκύψουν και οι $y(t)$ και $z(t)$.

10

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό και τελικό σημείο γνωστά

- Δίνονται (x_0, y_0, z_0) και (x_T, y_T, z_T).
- Η χρονική συνάρτηση $x(t)$ επιλέγεται να έχει πολυωνυμική μορφή.
- Αφού είναι γνωστές δύο τιμές, επιλέγουμε ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού:

$$x(t) = a_1 t + a_0$$

- Οι συντελεστές α_0, α_1 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = x_0$$
$$x(T) = x_T$$

11

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό και τελικό σημείο γνωστά

$$x(0) = x_0 \Rightarrow a_0 = x_0$$

$$x(T) = x_T \Rightarrow a_1 T + a_0 = x_T \Rightarrow a_1 = \frac{x_T - x_0}{T}$$

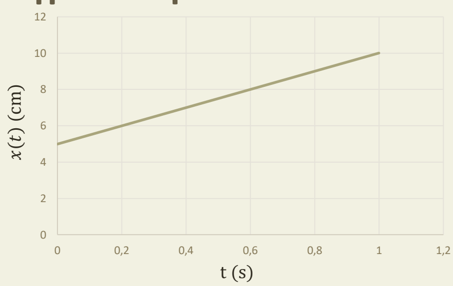
$$\boldsymbol{x(t) = \frac{x_T - x_0}{T} t + x_0}$$

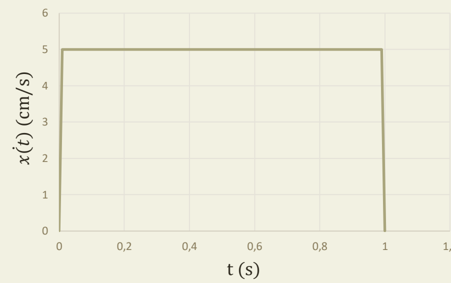
$$y = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x - x_0) \Rightarrow \boldsymbol{y(t) = \frac{y_T - y_0}{T} t + y_0}$$

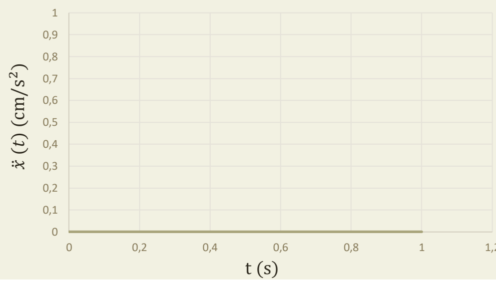
$$z = z_0 + \frac{z_T - z_0}{x_T - x_0}(x - x_0) \Rightarrow \boldsymbol{z(t) = \frac{z_T - z_0}{T} t + z_0}$$

12

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό και τελικό σημείο γνωστά







Παράδειγμα 5-2

Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x-y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (10,0,0) και το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (0,10,0). Η διάρκεια της κίνησης είναι $1\ s$. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού.

Παράδειγμα 5-2 (Λύση)

$(x_0, y_0, z_0) = (10,0,0)\ \ (x_T, y_T, z_t) = (0,10,0)\quad T = 1\text{ s}$

$$x(t) = a_1 t + a_0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 10 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_0} = \mathbf{10} \\ x(1) = 0 \Rightarrow a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_1 + 10 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a_1} = \mathbf{-10} \end{cases}$$

$\boldsymbol{x(t) = -10t + 10}$

$$y(t) = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x(t) - x_0) \Rightarrow y(t) = 0 + \frac{10-0}{0-10}(x(t) - 10) \Rightarrow$$

$y(t) = 10 - x(t) \Rightarrow \boldsymbol{y(t) = 10t}$

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο και ταχύτητες γνωστά

- Δίνονται (x_0, y_0, z_0), (x_T, y_T, z_T), $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ και $(\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T)$.
- Η χρονική συνάρτηση $x(t)$ επιλέγεται να έχει πολυωνυμική μορφή.
- Αφού είναι γνωστές 4 τιμές, επιλέγουμε ένα πολυώνυμο 3[ου] βαθμού:

$$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

- Η ταχύτητα θα είναι:

$$\dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο και ταχύτητες γνωστά

$$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$
$$\dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

$t = 0$:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_0 = x_0}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = \dot{x}_0}$$

$t = T$:

$$x(T) = x_T \Rightarrow a_3 T^3 + a_2 T^2 + a_1 T + a_0 = x_T \Rightarrow T^3 a_3 + T^2 a_2 = x_T - x_0 - \dot{x}_0 T$$

$$\dot{x}(T) = \dot{x}_T \Rightarrow 3a_3 T^2 + 2a_2 T + a_1 = \dot{x}_T \Rightarrow \quad 3T^2 a_3 + 2T a_2 = \dot{x}_T - \dot{x}_0$$

$$\boldsymbol{\alpha_2 = \frac{3(x_T - x_0) - (\dot{x}_T + 2\dot{x}_0)T}{T^2}} \qquad \boldsymbol{\alpha_3 = \frac{-2(x_T - x_0) + (\dot{x}_T + \dot{x}_0)T}{T^3}}$$

17

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο και ταχύτητες γνωστά

- Ειδική περίπτωση: $\dot{x}_0 = \dot{x}_T = 0$

$$\alpha_0 = x_0$$

$$\alpha_1 = 0$$

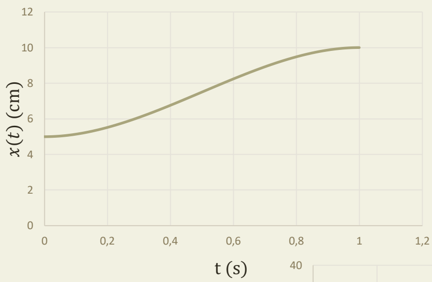
$$\alpha_2 = -\frac{3(x_0 - x_T)}{T^2}$$

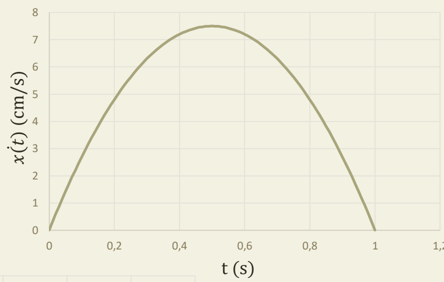
$$\alpha_3 = \frac{2(x_0 - x_T)}{T^3}$$

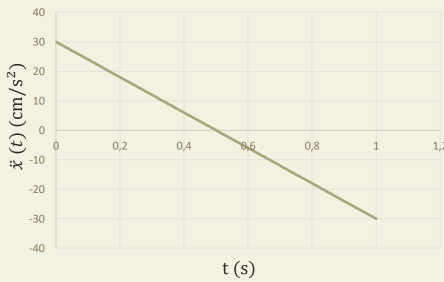
$$x(t) = 2(x_0 - x_T)\frac{t^3}{T^3} - 3(x_0 - x_T)\frac{t^2}{T^2} + x_0$$

18

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο και ταχύτητες γνωστά







Παράδειγμα 5-3

Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (10,0,0) και το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (0,10,0). Η ταχύτητα στα δύο σημεία είναι μηδενική και η διάρκεια της κίνησης είναι $1\ s$. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού.

Παράδειγμα 5-3 (Λύση)

$(x_0, y_0, z_0) = (10,0,0)\ (x_T, y_T, z_t) = (0,10,0)$ $T = 1\text{ s}$

$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (0,0,0)\quad (\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T) = (0,0,0)$

$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \qquad \dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$

$t = 0$ s:

$x(0) = 10 \Rightarrow \alpha_0 = 10 \qquad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + 10 \qquad \dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t$

$t = 1$ s:

$$\left.\begin{aligned} x(1) = 0 &\Rightarrow a_3 + a_2 + 10 = 0 \Rightarrow a_3 + a_2 = -10 \\ \dot{x}(1) = 0 &\Rightarrow 3a_3 + 2a_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_2 &= -30 \\ \alpha_3 &= 20 \end{aligned}\right\}$$

21

Παράδειγμα 5-3 (Λύση)

$\alpha_3 = 20\ \ \alpha_2 = -30\ \ \alpha_1 = 0\ \ \alpha_0 = 10$

$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = 20t^3 - 30t^2 + 10}$

$$y(t) = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x(t) - x_0) \Rightarrow y(t) = 0 + \frac{10 - 0}{0 - 10}(x(t) - 10) \Rightarrow$$

$y(t) = 10 - x(t) \Rightarrow \boldsymbol{y(t) = -20t^3 + 30t^2}$

22

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο ταχύτητες και επιταχύνσεις γνωστά

- Δίνονται (x_0, y_0, z_0), (x_T, y_T, z_T), $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, $(\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T)$, $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0)$ και $(\ddot{x}_T, \ddot{y}_T, \ddot{z}_T)$.
- Η χρονική συνάρτηση $x(t)$ επιλέγεται να έχει πολυωνυμική μορφή.
- Αφού είναι γνωστές 6 τιμές, επιλέγουμε ένα πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού:

$$x(t) = \alpha_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

- Η ταχύτητα θα είναι:

$$\dot{x}(t) = 5a_5 t^4 + 4\alpha_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

- Η επιτάχυνση θα είναι:

$$\ddot{x}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2$$

23

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο ταχύτητες και επιταχύνσεις γνωστά

- Πρέπει να ισχύει ότι:

$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$
$$\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$$
$$x(T) = x_T$$
$$\dot{x}(T) = \dot{x_T}$$
$$\ddot{x}(T) = \ddot{x_T}$$

- Από τις 3 πρώτες σχέσεις παίρνουμε ότι:

$$\alpha_0 = x_0$$
$$a_1 = \dot{x}_0$$
$$a_2 = 0{,}5\ddot{x}_0$$

24

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο ταχύτητες και επιταχύνσεις γνωστά

- Από τις υπόλοιπες 3 σχέσεις, προκύπτει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους και επιλύοντας το σύστημα έχουμε:

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2T^3}(20x_0 - 20x_T + 12T\dot{x}_0 + 8T\dot{x}_T + 3T^2\ddot{x}_0 - T^2\ddot{x}_T)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2T^4}(30x_0 - 30x_T + 16T\dot{x}_0 + 14T\dot{x}_T + 3T^2\ddot{x}_0 - 2T^2\ddot{x}_T)$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2T^5}(12x_0 - 12x_T + 6T\dot{x}_0 + 6T\dot{x}_T + T^2\ddot{x}_0 - T^2\ddot{x}_T)$$

25

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο ταχύτητες και επιταχύνσεις γνωστά

- Ειδική περίπτωση: $\dot{x}_0 = \dot{x}_T = 0\ \mathrm{m/s}$, $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_T = 0\ \mathrm{m/s^2}$:

$$\alpha_0 = x_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{10}{T^3}(x_0 - x_T)$$

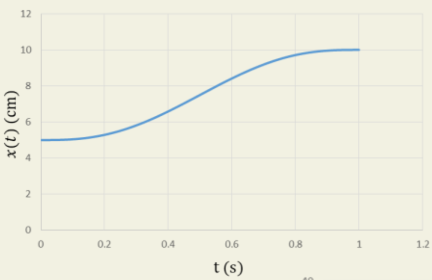
$$\alpha_4 = \frac{15}{T^4}(x_0 - x_T)$$

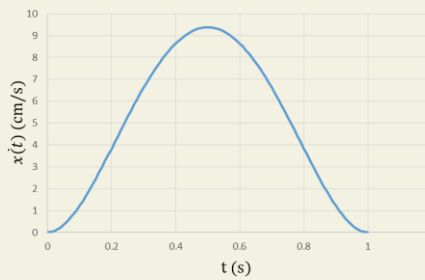
$$\alpha_5 = -\frac{6}{T^5}(x_0 - x_T)$$

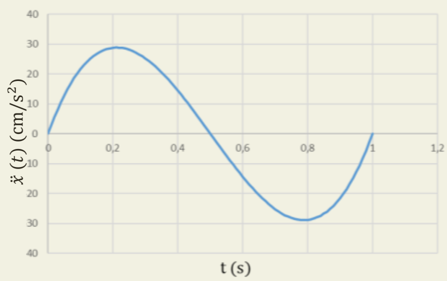
$$x(t) = -6(x_0 - x_T)\frac{t^5}{T^5} + 15(x_0 - x_T)\frac{t^4}{T^4} - 10(x_0 - x_T)\frac{t^3}{T^3} + x_0$$

26

Ευθύγραμμη τροχιά – Αρχικό, τελικό σημείο ταχύτητες και επιταχύνσεις γνωστά

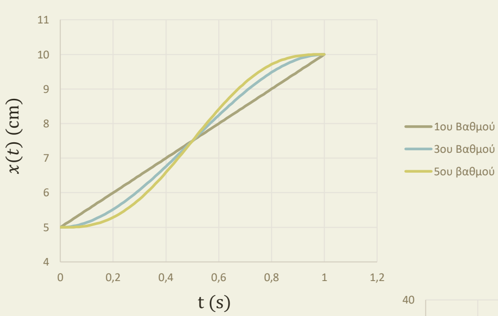


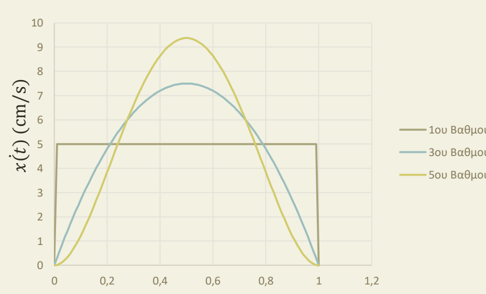


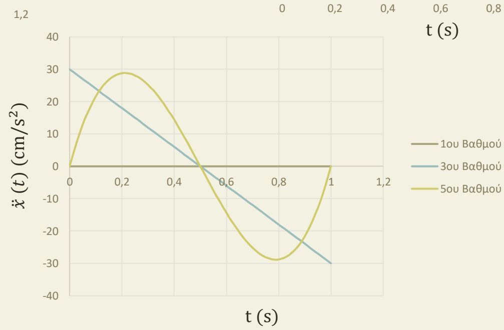


27

Ευθύγραμμη τροχιά







28

Παράδειγμα 5-4

Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (10,0,0) και το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (0,10,0). Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στα δύο σημεία είναι μηδενικές και η διάρκεια της κίνησης είναι 1 s. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 5ου βαθμού.

29

Παράδειγμα 5-4 (Λύση)

$$(x_0, y_0, z_0) = (10{,}0{,}0) \quad (x_T, y_T, z_t) = (0{,}10{,}0)$$
$$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (0{,}0{,}0) \quad (\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T) = (0{,}0{,}0) \quad T = 1\ s$$
$$(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0) = (0{,}0{,}0) \quad (\ddot{x}_T, \ddot{y}_T, \ddot{z}_T) = (0{,}0{,}0)$$

$$\alpha_0 = x_0 = 10$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{10}{T^3}(x_0 - x_T) = -100$$
$$\alpha_4 = \frac{15}{T^4}(x_0 - x_T) = 150$$
$$\alpha_5 = -\frac{6}{T^5}(x_0 - x_T) = -60$$

30

Παράδειγμα 5-4 (Λύση)

$x(t) = -60t^5 + 150t^4 - 100t^3 + 10$

$y(t) = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x(t) - x_0) \Rightarrow y(t) = 0 + \frac{10 - 0}{0 - 10}(x(t) - 10)$
$\Rightarrow y(t) = 10 - x(t) \Rightarrow$

$y(t) = 60t^5 - 150t^4 + 10t^3$

Καμπυλόγραμμη τροχιά

- Στην περίπτωση που η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη, αλλά καμπυλόγραμμη (για παράδειγμα για να παρακάμπτεται ένα εμπόδιο), ο τρόπος εργασίας είναι εξακολουθεί να είναι παρόμοιος με πριν.
- Η μόνη διαφοροποίηση έχει να κάνει με τις εξισώσεις που περιγράφουν την τροχιά στον χώρο.

Παράδειγμα 5-5

Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται σε τμήμα κυκλικής τροχιάς αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (6,2,0), το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (1,7,0), ενώ επίσης περνάει και από το ενδιάμεσο σημείο (4,6,0). Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο είναι μηδενικές και η διάρκεια της κίνησης είναι 1 s. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συνταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 5^{ου} βαθμού.

33

Παράδειγμα 5-5 (Λύση)

Αρχικό σημείο (σημείο Α): $(x_0, y_0, z_0) = (6{,}2{,}0)$

Ενδιάμεσο σημείο (σημείο Β) : $(x_1, y_1, z_1) = (4{,}6{,}0)$

Τελικό σημείο (σημείο Γ): $(x_T, y_T, z_t) = (1{,}7{,}0)$

Διάρκεια κίνησης: $T = 1\ s$

Εξίσωση κύκλου με κέντρο (x_c, y_c) και ακτίνα r:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

34

Παράδειγμα 5-5 (Λύση)

Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήμα ΑΒ και ΒΓ. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων στα δύο ευθύγραμμα τμήματα.

Μέσο τμήματος ΑΒ: $\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right) = (5,4)$

Μέσο τμήματος ΒΓ: $\left(\frac{x_T+x_1}{2}, \frac{y_T+y_1}{2}\right) = (2.5,6.5)$

Το τμήμα ΑΒ έχει κλίση: $\lambda_{AB} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{4}{-2} = -2$

Το τμήμα ΒΓ έχει κλίση: $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_T-y_1}{x_T-x_1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

35

Παράδειγμα 5-5 (Λύση)

Η μεσοκάθετος στο τμήμα ΑΒ έχει κλίση: $\frac{-1}{\lambda_{AB}} = 0.5$

Η μεσοκάθετος στο τμήμα ΒΓ έχει κλίση: $\frac{-1}{\lambda_{B\Gamma}} = 3$

Η μεσοκάθετος στο ΑΒ έχει εξίσωση: $y = 4 + 0.5(x-5)$

Η μεσοκάθετος στο ΒΓ έχει εξίσωση: $y = 6.5 + 3(x-2.5)$

Το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων, το οποίο είναι και το κέντρο του κύκλου, βρίσκεται από την επίλυση των δύο εξισώσεων.

Προκύπτει εύκολα ότι αυτό είναι: $(x_c, y_c) = (1,2)$.

36

Παράδειγμα 5-5 (Λύση)

Η ακτίνα του κύκλου ισούται με την απόσταση οποιοδήποτε από τα 3 σημεία από το κέντρο. Χρησιμοποιώντας το σημεία Α, προκύπτει:

$$r^2 = (6-1)^2 + (2-2)^2 = 25$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Επιλύοντας ως προς y:

$$y = 2 + \sqrt{25 - (x-1)^2}$$

37

Παράδειγμα 5-5 (Λύση)

Θεωρούμε πολυώνυμο 5ου βαθμού για το $x(t)$:

$$x(t) = \alpha_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Για μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο:

$$\alpha_0 = x_0 = 6$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{10}{T^3}(x_0 - x_T) = -50$$

$$\alpha_4 = \frac{15}{T^4}(x_0 - x_T) = 75$$

$$\alpha_5 = -\frac{6}{T^5}(x_0 - x_T) = -30$$

38

Παράδειγμα 5-5 (Λύση)

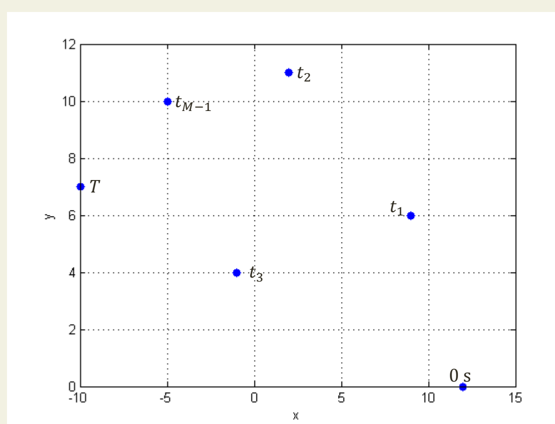
$$x(t) = -30t^5 + 75t^4 - 50t^3 + 6$$
$$y(t) = 2 + \sqrt{25 - [x(t) - 1]^2}$$

Επαλήθευση οριακών συνθηκών για $y(t)$

39

Τροχιά από ενδιάμεσα σημεία

- Είναι διαθέσιμα $M + 1$ σημεία $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots,$ $(x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1}), (x_T, y_T, z_T)$.
- Δίνονται οι $M + 1$ χρονικές στιγμές $\{0, t_1, \dots, t_{M-1}, T\}$ κατά τις οποίες ο τελικός επενεργητής θα πρέπει να βρίσκεται σε κάθε σημείο.



40

Τροχιά από ενδιάμεσα σημεία

- Κάθε μία χρονική συνάρτηση $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μίας από τις μεθόδους:
  - **Πολυωνυμική παρεμβολή**
  - **Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων**
  - **Παρεμβολή με spline**

41

Πολυωνυμική παρεμβολή

- Η πολυωνυμική παρεμβολή είναι μία μεθοδολογία με την οποία βρίσκονται οι συντελεστές ενός πολυωνύμου για κάθε χρονική συνάρτηση $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ ξεχωριστά.
- Ο βαθμός κάθε πολυωνύμου ισούται με το πλήθος των σημείων μείον ένα.
- Στη γενική περίπτωση $M+1$ σημείων όπου υπάρχουν και συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, θα έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $K=M+4$:

$$x(t)=a_K t^K + a_{K-1}t^{K-1}+\cdots+\alpha_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

42

Πολυωνυμική παρεμβολή

- Θέτουμε:
  - $x(t_i) = x_i \ (i = 0,1,2, \dots, M-1)$
  - $x(T) = x_T$
  - $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$
  - $\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$
  - $\dot{x}(T) = \dot{x}_T$
  - $\ddot{x}(T) = \ddot{x}_T$

43

Πολυωνυμική παρεμβολή

- Προκύπτει σύστημα εξισώσεων:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$$

  $\mathbf{A}$: πίνακας $(K+1) \times (K+1)$

  $\mathbf{b}$: διάνυσμα $(K+1) \times 1$

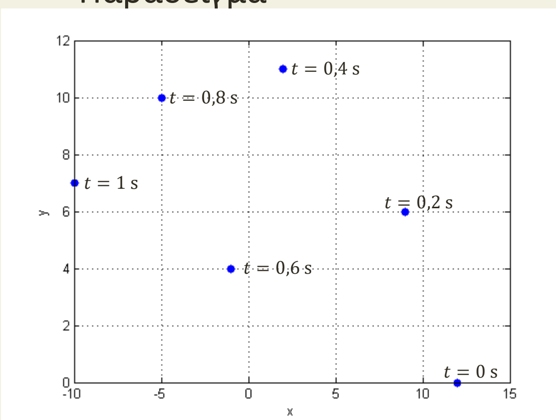
  $\mathbf{p}$: διάνυσμα με τους $K+1$ άγνωστους συντελεστές του πολυωνύμου.

- Επίλυση με αριθμητική μέθοδο στον υπολογιστή.

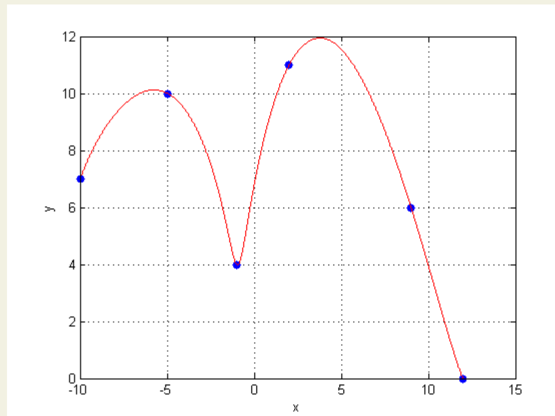
44

Πολυωνυμική παρεμβολή

Παράδειγμα



Σημεία τροχιάς με μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση στην αρχή και στο τέλος



Τροχιά με χρήση πολυωνύμου 9^{ου} βαθμού

45

Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

- Η πολυωνυμική παρεμβολή έχει νόημα να χρησιμοποιηθεί όταν ο αριθμός των διαθέσιμων σημείων είναι μικρός (κάτω από 10).
- Αν ο αριθμός των σημείων από τα οποία πρέπει να περάσει ο τελικός επενεργητής είναι μεγάλος τότε θα χρειαστεί να δημιουργηθεί ένα πολυώνυμο αντίστοιχα μεγάλης τάξης, το οποίο σημαίνει ότι θα υπάρχει σημαντικό υπολογιστικό κόστος.
- Εναλλακτικά. θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα πολύωνυμο μικρότερου βαθμού (ή κάποια άλλη συνάρτηση), ώστε να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος, αλλά με τίμημα ότι πλέον ο επενεργητής δεν θα περνάει ακριβώς από το δοσμένα σημεία, αλλά παραπλήσια.

46

Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

- Για $M+1$ σημεία χωρίς συνθήκες για την ταχύτητα και την, χρησιμοποιούμε πολυώνυμο βαθμού $P<M$.
- Προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων $\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{b}$ όπου ο πίνακας $\mathbf{A}$ δεν είναι τετραγωνικός (έχει περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους).
- Σύμφωνα με την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων, δημιουργείται ένα νέο σύστημα εξισώσεων της μορφής

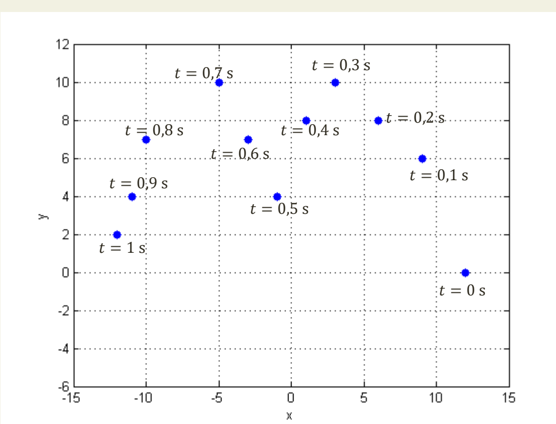
$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)\mathbf{p}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

- Ο πίνακας $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ είναι πλέον τετραγωνικός και το προηγούμενο σύστημα μπορεί να επιλυθεί εύκολα.

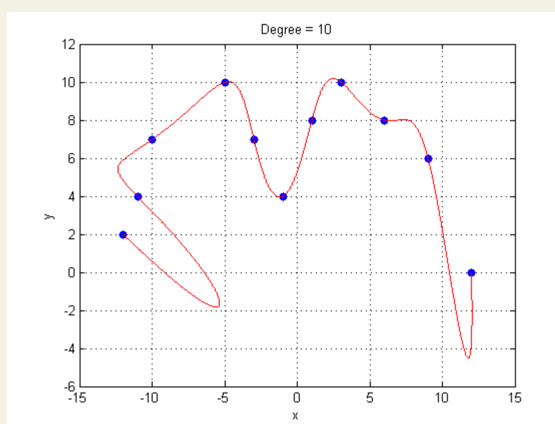
47

Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

Παράδειγμα



Σημεία τροχιάς

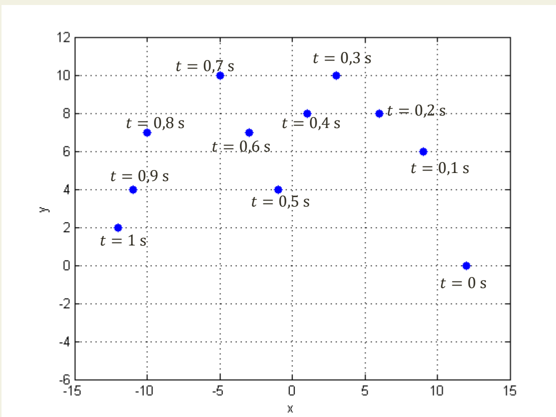


Τροχιά με χρήση πολυωνύμου 10^{ου} βαθμού

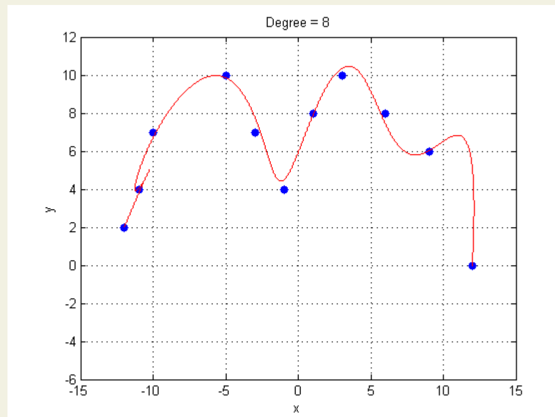
48

Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

Παράδειγμα



Σημεία τροχιάς

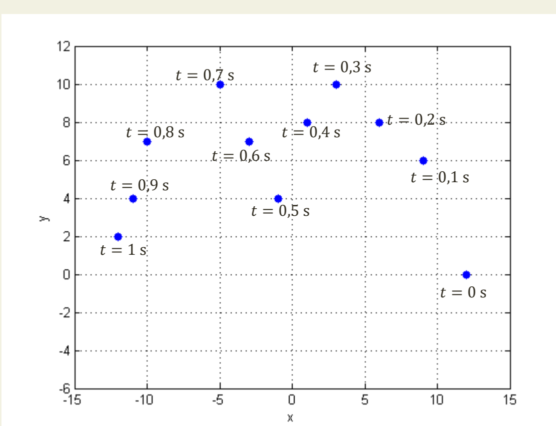


Τροχιά με χρήση πολυωνύμου 8^{ου} βαθμού

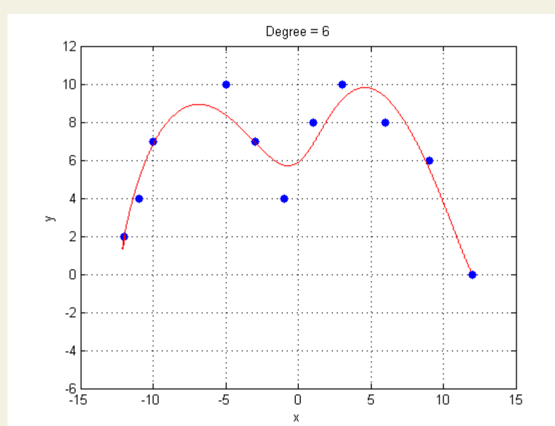
49

Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

Παράδειγμα



Σημεία τροχιάς

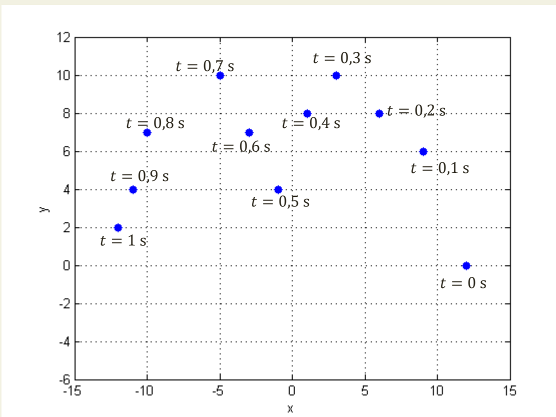


Τροχιά με χρήση πολυωνύμου 6^{ου} βαθμού

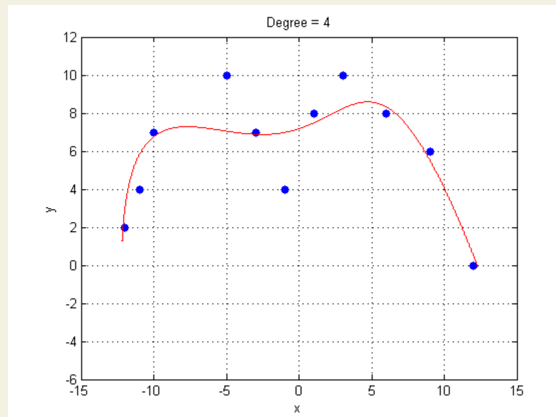
50

Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

Παράδειγμα



Σημεία τροχιάς



Τροχιά με χρήση πολυωνύμου 4^{ου} βαθμού

51

Παρεμβολή κυβικών spline

- Όπως αναφέρθηκε, η χρήση ενός πολυωνύμου μεγάλου βαθμού συνεπάγεται μεγάλο υπολογιστικό κόστος.
- Επιπλέον, μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλα πιθανά σφάλματα σε ενδιάμεσες θέσεις.
- Η δημιουργία σφαλμάτων προκύπτει γενικά από το γεγονός ότι ένα πολυώνυμο μεγάλου βαθμού έχει πολλά μέγιστα ή ελάχιστα (δηλαδή κορυφές και κοιλάδες στη γραφική του παράσταση), τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε θέσεις ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές.

52

Παρεμβολή κυβικών spline

- Η εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιηθούν πολλά πολυώνυμα μικρού βαθμού (3ου βαθμού ή μικρότερου).
- Σε κάθε διάστημα χρονικών στιγμών $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0,1, \dots, M-1)$ με $t_0 = 0$ και $t_M = T$ δημιουργείται ένα πολυώνυμο $S_i(t)$ 3ου βαθμού L:
$$S_i(t) = a_i(t-t_i)^3 + b_i(t-t_i)^2 + c_i(t-t_i) + d_i$$
- Καθώς υπάρχουν M το πλήθος πολυώνυμα 3ου βαθμού, συνολικά υπάρχουν $4M$ συντελεστές που πρέπει να υπολογιστούν.

53

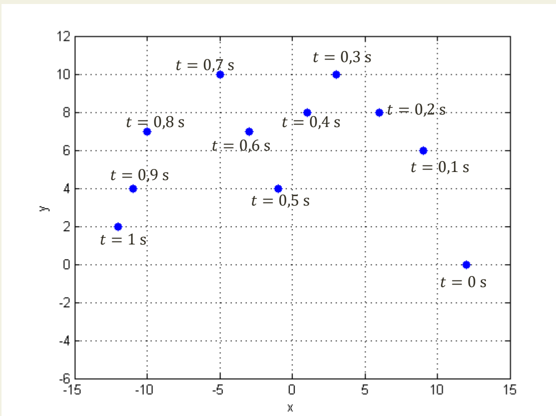
Παρεμβολή κυβικών spline

- Πρέπει να βρεθούν $4M$ εξισώσεις για τους συντελεστές αυτούς.
- Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις ακόλουθες συνθήκες:
  - $S_i(t_i) = x_i$ και $S_i(t_{i+1}) = x_{i+1}$ $(\, i = 0,1, \dots, M-1 \,)$ ($2M$ εξισώσεις).
  - $\dot{S_i}\,(t_{i+1}) = \dot{S}_{i+1}(t_{i+1})$ $(i = 0,1, \dots, M-2)$ $(M-1$ εξισώσεις).
  - $\ddot{S}_i(t_{i+1}) = \ddot{S}_i(t_{i+1})$ $(i = 0,1, \dots, M-2)$ $(M-1$ εξισώσεις).
  - $\ddot{S}_0(t_0) = \ddot{S}_{M-1}(T) = 0.$ (2 εξισώσεις)

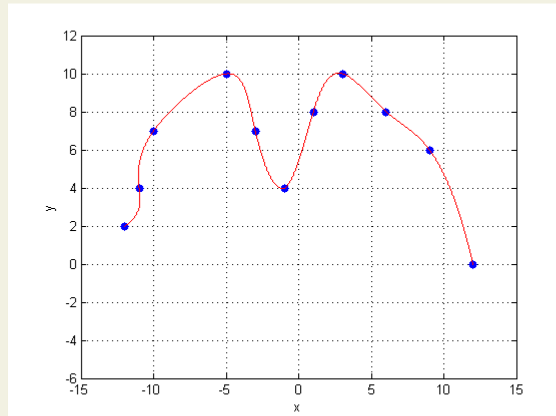
54

Παρεμβολή κυβικών spline

Παράδειγμα



Σημεία τροχιάς



Τροχιά με χρήση splines

55