ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΡΟΜΠΟΤ

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΙΓΑΛΕΩ 2019

Πίνακας Περιεχομένων

Λίστα Εικόνων

4 Κινηματική

Το βασικό αντικείμενο μελέτης στη ρομποτική, και ειδικά όσον αφορά στους βραχίονες, είναι να γίνει συσχέτιση της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού επενεργητή με τις μεταβλητές των αρθρώσεων (δηλαδή τις γωνίες περιστροφής εάν πρόκειται για περιστροφικές αρθρώσεις ή τις μετατοπίσεις για πρισματικές αρθρώσεις). Εάν επιτευχθεί αυτό, τότε εάν γνωρίζουμε το ένα από τα δύο μπορεί να βρεθεί το άλλο, δηλαδή εάν για παράδειγμα γνωρίζουμε τις τιμές για τις μεταβλητές των αρθρώσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού επενεργητή. Αντίστροφα, εάν γνωρίζουμε την επιθυμητή θέση και προσανατολισμό του τελικού επενεργητή μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές για τις μεταβλητές των αρθρώσεων για την επίτευξη αυτών. Για παράδειγμα, έστω το ρομπότ SCARA που φαίνεται στην Εικόνα 4-1. Έστω ότι οι μεταβλητές των δύο περιστροφικών αρθρώσεων και της πρισματικής άρθρωσης συμβολίζονται με $(\theta_1, \theta_2, d_3)$ αντίστοιχα και έστω το σύστημα αναφοράς {0} στη βάση του βραχίονα ως προς το οποίο εκφράζονται οι συντεταγμένες. Αν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες του τελικού επενεργητή ως προς το σύστημα αναφοράς $\{0\}$ στη βάση του βραχίονα, τότε αποδεικνύεται ότι θα ισχύει:

$$x = l_4 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos\theta_1$$

$$y = l_4 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin\theta_1$$

$$z = l_1 + l_3 - l_5 - d_3$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τις τιμές για τις γωνίες των δύο περιστροφικών αρθρώσεων και τη μετατόπιση της πρισματικής άρθρωσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή.

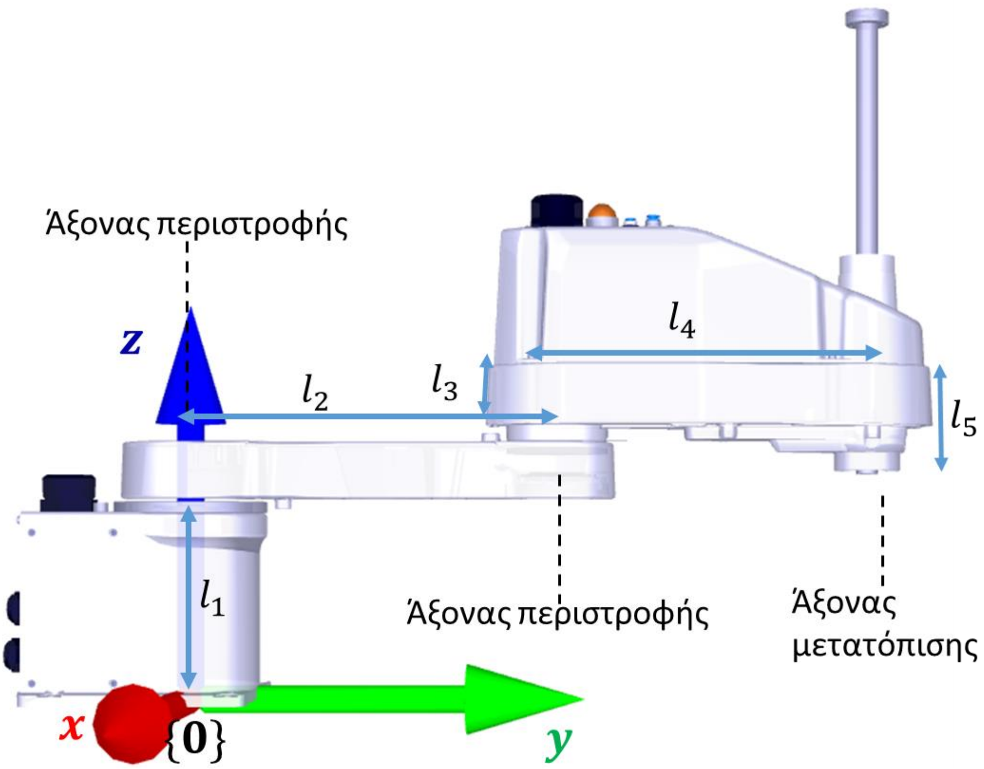
Επιλύοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς $(\theta_1, \theta_2, d_3)$, προκύπτει ότι:

$$d_3 = l_1 + l_3 - l_5 - z$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - l_2^2 - l_4^2}{2l_2 l_4}\right)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{l_4 \cos\theta_2 + l_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις είναι πλέον εφικτό να υπολογίσουμε τις τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή.



Εικόνα 4-1. Ρομπότ τύπου SCARA.

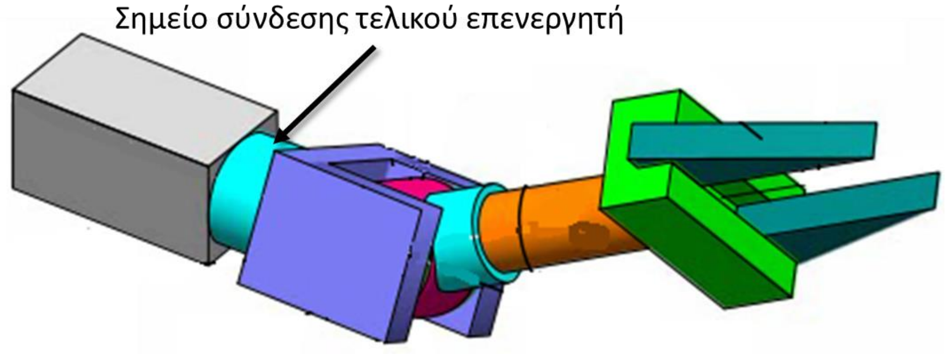
Η εξαγωγή των σχέσεων που συνδέουν τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή με τις μεταβλητές των αρθρώσεων βασίζεται τη μελέτη της κίνησης κάθε άρθρωσης. Συγκεκριμένα, εξετάζεται πως επιδρά η περιστροφή κάθε περιστροφικής άρθρωσης και η μετατόπιση κάθε πρισματικής άρθρωσης στη θέση του τελικού επενεργητή. Για να απλοποιηθεί η διαδικασία αυτή, εξετάζεται η σχετική κίνηση μεταξύ δύο διαδοχικών αρθρώσεων και στη συνέχεια γίνεται σύνθεση όλων αυτών των επιμέρους κινήσεων για να προκύψει πως θα κινηθεί ο τελικός επενεργητής και συνεπώς η θέση του.

Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

1. Δημιουργία κινηματικού διαγράμματος.
2. Τοποθέτηση συστημάτων συντεταγμένων.
3. Εύρεση πινάκων ομογενούς μετασχηματισμού.
4. Εξαγωγή σχέσεων που περιγράφουν τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή σε συνάρτηση με τις μεταβλητές των αρθρώσεων.
5. Εξαγωγή αντίστροφων σχέσεων που περιγράφουν τις μεταβλητές των αρθρώσεων σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι εξετάζουμε τη θέση (και άρα τις συντεταγμένες) του σημείου σύνδεσης του τελικού επενεργητή με τον υπόλοιπο βραχίονα (π.χ. αν ο τελικός επενεργητής είναι μία αρπάγη εξετάζουμε το σημείο σύνδεσης της αρπάγης στον βραχίονα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4-2). Ο τελικός επενεργητής έχει επιπλέον βαθμούς ελευθερίας που καθορίζουν τον

προσανατολισμό του στον χώρο. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, όταν αναφέρεται το τελικός επενεργητής θα εννοείται το σημείο σύνδεσης αυτού με τον υπόλοιπο βραχίονα.



Εικόνα 4-2. Σημείο σύνδεσης τελικού επενεργητή ρομποτικού βραχίονα.

4.1 Κινηματικά Διαγράμματα

Το πρώτο βήμα για την εύρεση των σχέσεων μεταξύ συντεταγμένων του τελικού επενεργητή και των μεταβλητών των αρθρώσεων είναι να δημιουργηθεί το λεγόμενο **κινηματικό διάγραμμα (kinematic diagram)**. Ένα κινηματικό διάγραμμα παρουσιάζει τη σύνδεση των συνδέσμων και των αρθρώσεων ενός ρομποτικού βραχίονα με απλοποιημένο τρόπο Μπορεί να θεωρηθεί ότι παρουσιάζει τον "σκελετό" του βραχίονα. *Το κινηματικό διάγραμμα κατασκευάζεται όταν οι μεταβλητές των αρθρώσεων έχουν μηδενικές τιμές, δηλαδή μηδενική γωνία περιστροφής για τις περιστροφικές αρθρώσεις και μηδενική μετατόπιση για τις πρισματικές αρθρώσεις*.

- Σε ένα κινηματικό διάγραμμα, μία περιστροφική άρθρωση συμβολίζεται με έναν κύλινδρο, όπου ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής της άρθρωσης (Εικόνα 4-3).

Εικόνα 4-3. Σύμβολο περιστροφικής άρθρωσης σε κινηματικό διάγραμμα σε διάφορους προσανατολισμούς. Ο άξονας περιστροφής συμπίπτει με τον άξονα του κυλίνδρου.

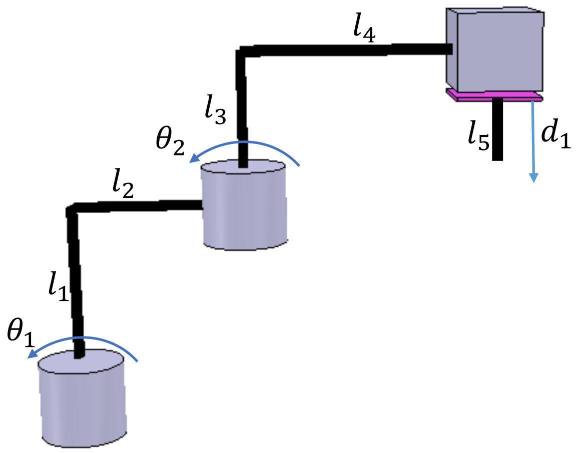
Μία πρισματική άρθρωση συμβολίζεται με έναν κύβο με καπάκι, όπου το καπάκι δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία γίνεται η μετατόπιση (Εικόνα 4-4).

Εικόνα 4-4. Σύμβολο πρισματικής άρθρωσης σε κινηματικό διάγραμμα σε διάφορους προσανατολισμούς. Ό άξονας μετακίνησης είναι κάθετος στο καπάκι.

- Στο κινηματικό διάγραμμα, σημειώνονται τα μήκη των συνδέσμων, οι μεταβλητές των αρθρώσεων και η φορά ή κατεύθυνση αύξησης των μεταβλητών. Οι μεταβλητές των αρθρώσεων αριθμούνται ξεκινώντας από το 1

Για παράδειγμα, έστω το ρομπότ τύπου SCARA που φαίνεται στην Εικόνα 4-1, το οποίο περιλαμβάνει δύο περιστροφικές και μία πρισματική άρθρωση. Για τις περιστροφικές αρθρώσεις η φορά αύξησης της γωνίας θεωρείται ότι είναι αριστερόστροφη, ενώ η κατεύθυνση αύξηση της μετατόπισης της πρισματικής άρθρωσης είναι προς τα κάτω. Η μεταβλητή για την πρώτη άρθρωση συμβολίζεται με θ_1, η μεταβλητή για τη δεύτερη άρθρωση συμβολίζεται με θ_2 και η μεταβλητή για την τρίτη άρθρωση συμβολίζεται με d_3.

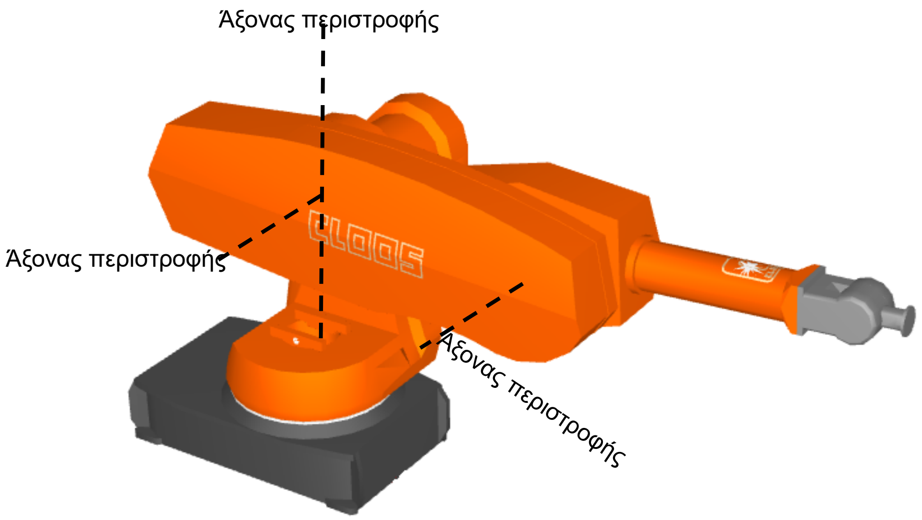
Το αντίστοιχο κινηματικό διάγραμμα θα είναι όπως δείχνει η Εικόνα 4-5.

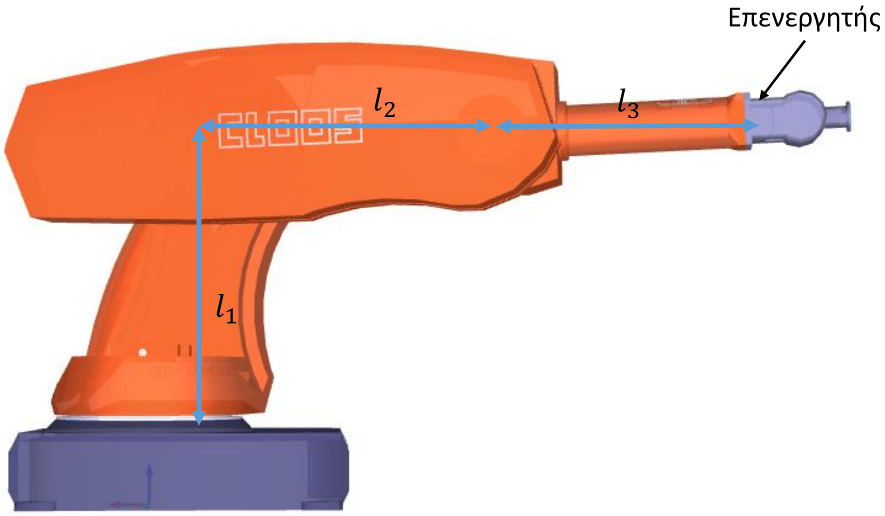


Εικόνα 4-5. Κινηματικό διάγραμμα για το ρομπότ που δείχνει η Εικόνα 4-1.

Παράδειγμα 4-1

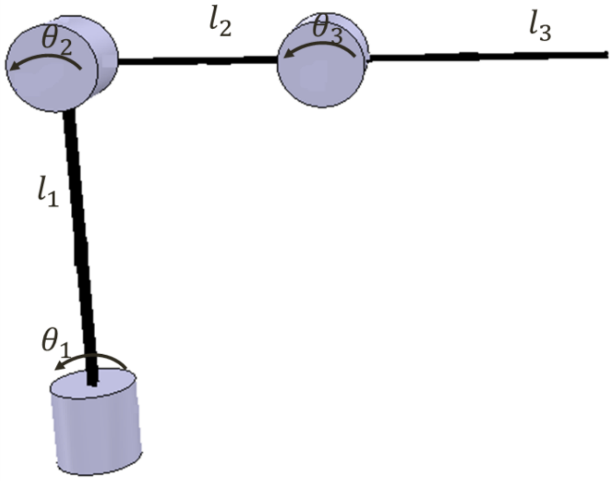
Τα παρακάτω σχήματα παρουσιάζουν δύο όψεις ενός βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου, όπου έχουν σημειωθεί οι άξονες των τριών περιστορφικών αρθρώσεων και οι διαστάσεις των συνδέσμων. Θεωρώντας, ότι η φορά αύξησης της γωνίας περιστροφής κάθε άρθρωσης είναι αριστερόστροφη, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο κινηματικό διάγραμμα.





Λύση

Ο βραχίονας έχει τρεις περιστροφικές αρθρώσεις. Η πρώτη είναι στην βάση του βραχίονα. Η δεύτερη άρθρωση είναι σε απόσταση l_1 από την πρώτη και ο άξονας περιστροφής της είναι ορθογώνιος με τον άξονα περιστροφής της δεύτερης άρθρωσης. Η τρίτη άρθρωση είναι σε απόσταση l_2 από τη δεύτερη άρθρωση και έχει άξονα περιστροφής παράλληλο με αυτόν της δεύτερης άρθρωσης. Τέλος, σε απόσταση l_3 από την τρίτη άρθρωση είναι ο επενεργητής. Το αντίστοιχο κινηματικό διάγραμμα φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



■

4.2 Τοποθέτηση συστημάτων συντεταγμένων

Αφού σχεδιαστεί το κινηματικό διάγραμμα, το επόμενο βήμα είναι να τοποθετηθεί ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάθε άρθρωση καθώς και στον τελικό επενεργητή. Αυτό βοηθάει στη μελέτη της σχετικής κίνησης μεταξύ δύο διαδοχικών αρθρώσεων, ώστε να προκύψει τελικά η θέση του τελικού επενεργητή όπως έχει αναφερθεί παραπάνω.

Συγκεκριμένα, για βραχίονα με N αρθρώσεις τοποθετούμε N+1 συστήματα συντεταγμένων. Τα συστήματα συντεταγμένων αριθμούνται {0}, {1},…$\{N\}$ ξεκινώντας από την 1η άρθρωση και καταλήγοντας στον τελικό επενεργητή. Το σύστημα συντεταγμένων που τοποθετείται στην πρώτη άρθρωση, θεωρείται ως σύστημα αναφοράς και συμβολίζεται με $\{\mathbf{0}\}$. Το σύστημα αυτό θεωρείται σταθερό και δεν μετακινείται.

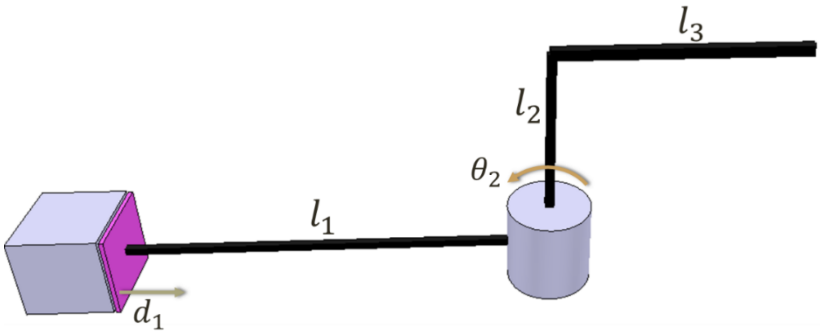
Θέλουμε να εκφράσουμε τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή ως προς το σύστημα αυτό.

Η τοποθέτηση των υπόλοιπων συστημάτων συντεταγμένων απλοποιούν και τυποποιούν τη διαδικασία εύρεσης των συντεταγμένων του τελικού επενεργητή ως προς το σύστημα αναφοράς. Η τοποθέτηση γίνεται σύμφωνα με τους **κανόνες Denavit-Hartenberg (D-H rules)**:

1. Ο άξονας z σε κάθε σύστημα συντεταγμένων συμπίπτει με τον άξονα κίνησης της άρθρωσης (Για τον τελικό επενεργητή, προτιμάται (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) ο άξονας z να είναι παράλληλος με άξονας z του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων).
2. Ο άξονας x σε κάθε σύστημα συντεταγμένων πρέπει να κάθετος με τον άξονα z του τρέχοντος και του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων ($x_i \perp z_i$ και $x_i \perp z_{i-1}$). Για την πρώτη άρθρωση, ο άξονας x αρκεί να είναι κάθετος με τον άξονα z του τρέχοντος συστήματος συντεταγμένων.
3. Η προέκταση του άξονα x σε κάθε σύστημα συντεταγμένων πρέπει να τέμνει την προέκταση του άξονα z του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων (Δεν εφαρμόζεται για την πρώτη άρθρωση). Εάν δεν τέμνονται, μετακινείται κατάλληλα η αρχή του τρέχοντος συστήματος συντεταγμένων. Ο κανόνας αυτός δεν εφαρμόζεται για την πρώτη άρθρωση.
4. Ο άξονας y σε κάθε σύστημα συντεταγμένων τοποθετείται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

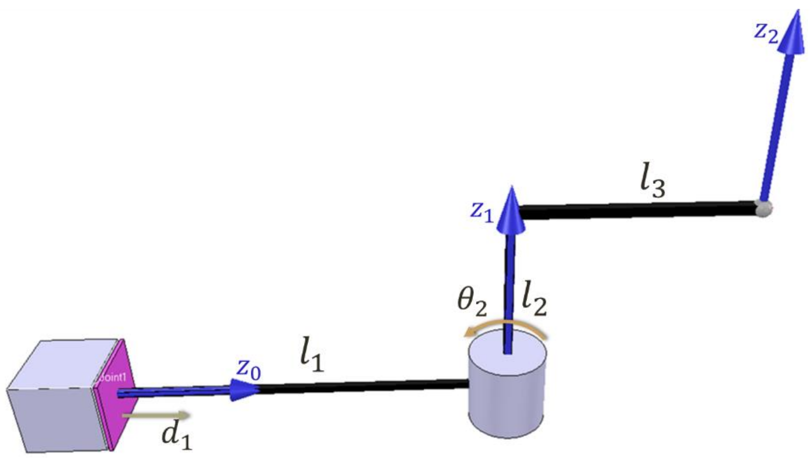
Παράδειγμα 4-2

Έστω το κινηματικό διάγραμμα που φαίνεται δίπλα. Να τοποθετηθούν οι άξονες συντεταγμένων σύμφωνα με τους κανόνες Denavit-Hartenberg.



Λύση

Θα τοποθετηθούν συστήματα συντεταγμένων στις δύο αρθρώσεις, καθώς και στη θέση του τελικού επενεργητή (άκρο του τμήματος l_3). Ξεκινάμε με την τοποθέτηση των αξόνων z. Στην πρισματική άρθρωση, ο άξονας z (z_0) συμπίπτει με την κατεύθυνση κίνησης της άρθρωσης και συγκεκριμένα να έχει φορά από αριστερά προς τα δεξιά. Στην περιστροφική άρθρωση, ο αντίστοιχος άξονας z (z_1) θα συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Η φορά του άξονα συνήθως προκύπτει βάζοντας τα δάχτυλα του δεξιού χεριού, πλην του αντίχειρα, να δείχνουν τη φορά περιστροφής της άρθρωσης, Η κατεύθυνση του αντίχειρα δίνει την κατεύθυνση του άξονα. Εδώ η φορά είναι από κάτω προς τα πάνω. Για τον τελικό επενεργητή, δεν υπάρχει κάποιος δεσμευτικός κανόνας, οπότε για ευκολία ο άξονας z (z_2) τοποθετείται ώστε να είναι παράλληλος και με την ίδια φορά με το z_1, όπως φαίνεται στην εικόνα.



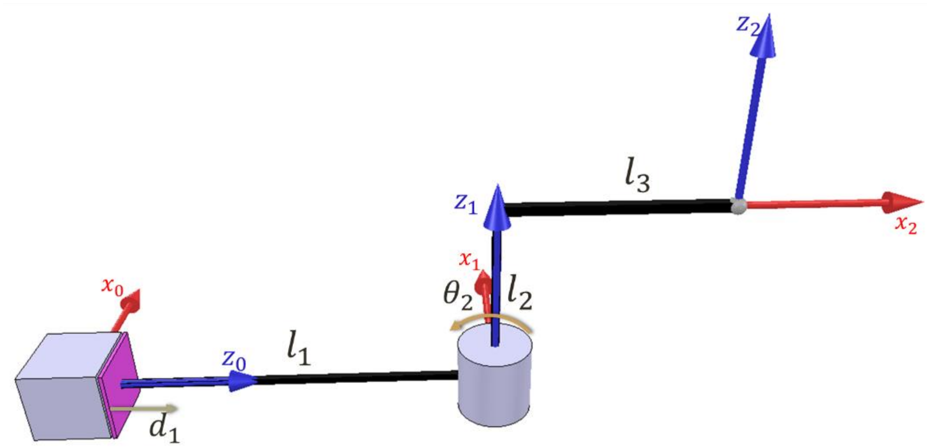
Στη συνέχεια ακολουθεί, η τοποθέτηση των αξόνων x. Εδώ υπάρχουν δύο κανόνες που πρέπει να εφαρμοστούν για τα συστήματα συντεταγμένων της δεύτερης άρθρωσης και του τελικού επενεργητή:

- Ο άξονας x σε κάθε σύστημα συντεταγμένων πρέπει να κάθετος με τον άξονα z του τρέχοντος και του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων.
- Η προέκταση του άξονα x σε κάθε σύστημα συντεταγμένων πρέπει να τέμνει την προέκταση του άξονα z του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων (Δεν εφαρμόζεται για την πρώτη άρθρωση)

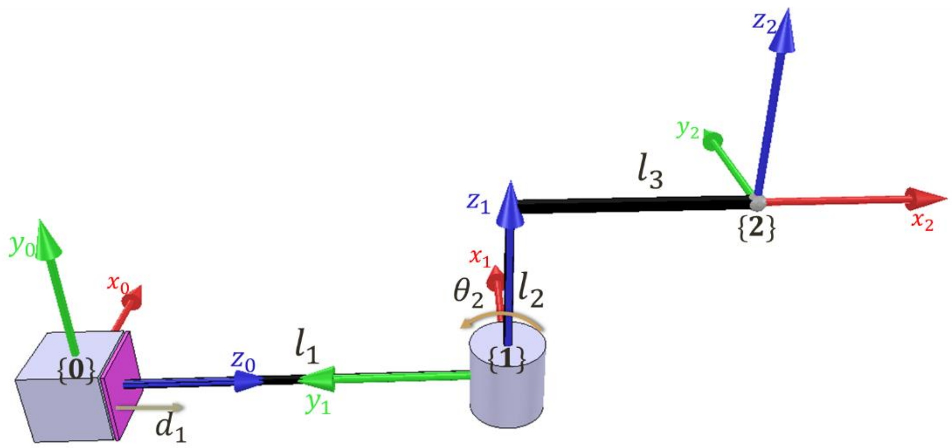
Για το σύστημα συντεταγμένων στην πρώτη άρθρωση, καθώς δεν προηγείται άλλο σύστημα συντεταγμένων, ο άξονας x_0 τοποθετείται ώστε να είναι απλά κάθετος με τον άξονα z_0.

Για τη δεύτερη άρθρωση, ο άξονας x_1 πρέπει να είναι κάθετος με τον z_1 καθώς και με τον z_0. Η μόνη επιλογή για τον άξονα x_1 είναι να είναι μέσα-έξω στη σελίδα. Ταυτόχρονα, με την επιλογή αυτή για τη θέση του άξονα x_1 η προέκτασή τέμνει την προέκταση του z_0.

Με το ίδιο σκεπτικό, γίνεται η τοποθέτηση του x_2 στον άξονα συντεταγμένων του τελικού επενεργητή. Η φορά του είναι αριστερά-δεξιά στη σελίδα. Η επόμενη εικόνα δείχνει την τοποθέτηση των τριών αξόνων x.



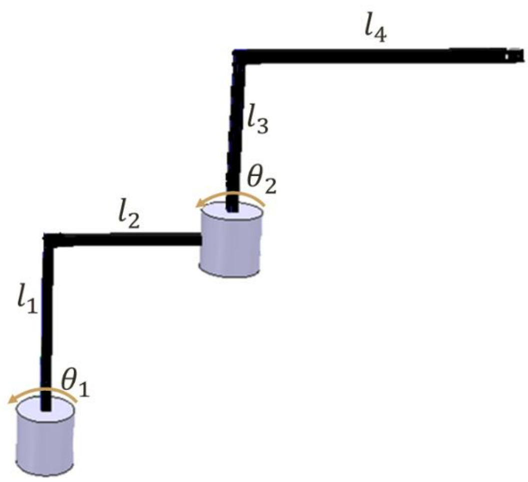
Τέλος, η τοποθέτηση του άξονα y σε κάθε σύστημα συντεταγμένων γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού ώστε να σχηματίζεται ένα τρισορθογώνιο σύστημα. Η τελική μορφή των τριών συστημάτων συντεταγμένων δίνεται στην επόμενη εικόνα.



■

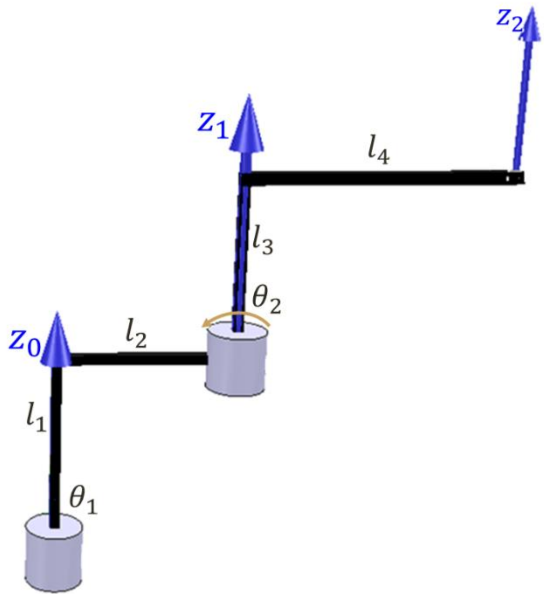
Παράδειγμα 4-3

Έστω το κινηματικό διάγραμμα για έναν βραχίονα SCARA δύο βαθμών ελευθερίας που φαίνεται δίπλα. Να τοποθετηθούν οι άξονες συντεταγμένων σύμφωνα με τους κανόνες Denavit-Hartenberg.



Λύση

Θα τοποθετηθούν συστήματα συντεταγμένων στις δύο περιστροφικές αρθρώσεις, καθώς και στη θέση του τελικού επενεργητή (άκρο του τμήματος l_4). Ξεκινάμε με την τοποθέτηση των αξόνων z. Σε κάθε περιστροφική άρθρωση ο αντίστοιχος άξονας z θα συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Για τον τελικό επενεργητή, δεν υπάρχει κάποιος δεσμευτικός κανόνας, οπότε για ευκολία ο άξονας z τοποθετείται ώστε να είναι παράλληλος και με την ίδια φορά με το z_1, όπως φαίνεται στην εικόνα.



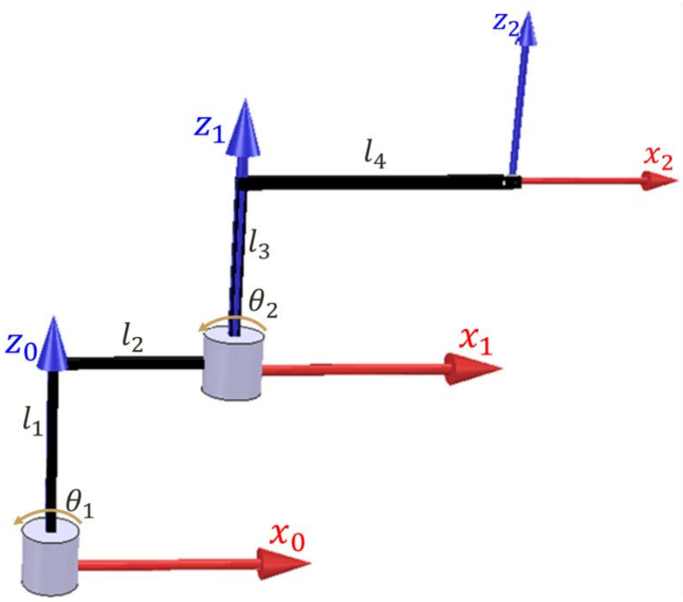
Στη συνέχεια ακολουθεί, η τοποθέτηση των αξόνων x. Εδώ υπάρχουν δύο κανόνες που πρέπει να εφαρμοστούν για τα συστήματα συντεταγμένων της δεύτερης άρθρωσης και του τελικού επενεργητή:

- Ο άξονας x σε κάθε σύστημα συντεταγμένων πρέπει να κάθετος με τον άξονα z του τρέχοντος και του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων.
- Η προέκταση του άξονα x σε κάθε σύστημα συντεταγμένων πρέπει να τέμνει την προέκταση του άξονα z του προηγούμενου συστήματος συντεταγμένων (Δεν εφαρμόζεται για την πρώτη άρθρωση)

Για το σύστημα συντεταγμένων στην πρώτη άρθρωση οι κανόνες δεν χρειάζεται να εφαρμοστούν αφού δεν προηγείται άλλο σύστημα συντεταγμένων. Ο άξονας x_0 τοποθετείται ώστε να είναι απλά κάθετος με τον άξονα z_0.

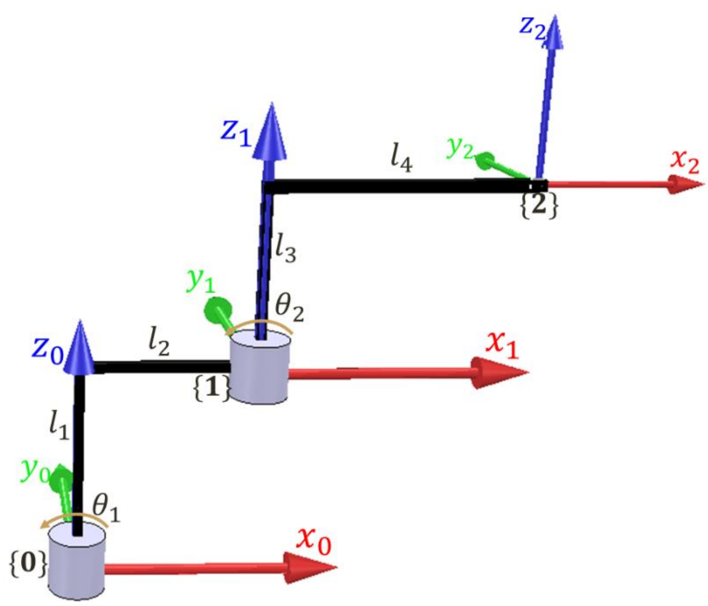
Για τη δεύτερη άρθρωση, ο άξονας x_1 πρέπει να είναι κάθετος με τον z_1 αλλά και με τον z_0. Υπάρχουν δύο επιλογές για τον άξονα x_1 είτε να είναι αριστερά-δεξιά ή μέσα-έξω στη σελίδα. Και οι δύο επιλογές ικανοποιούν τον πρώτο από τους προαναφερόμενους κανόνες. Αν επιλεγεί ο x_1 να είναι μέσα-έξω στη σελίδα, τότε η προέκτασή του δεν τέμνει τον άξονα z_0. Αντιθέτως, αν επιλεγεί να είναι αριστερά-δεξιά, τότε αν προεκταθεί θα συναντήσει τον z_0. Επομένως, αυτή είναι η τελική επιλογή για τον προσανατολισμό του x_1.

Με το ίδιο σκεπτικό, γίνεται η τοποθέτηση του x_2 στον άξονα συντεταγμένων του τελικού επενεργητή. Η επόμενη εικόνα δείχνει την τοποθέτηση των τριών αξόνων x.



Τέλος, η τοποθέτηση του άξονα y σε κάθε σύστημα συντεταγμένων γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού ώστε να σχηματίζεται ένα τρισορθογώνιο σύστημα.

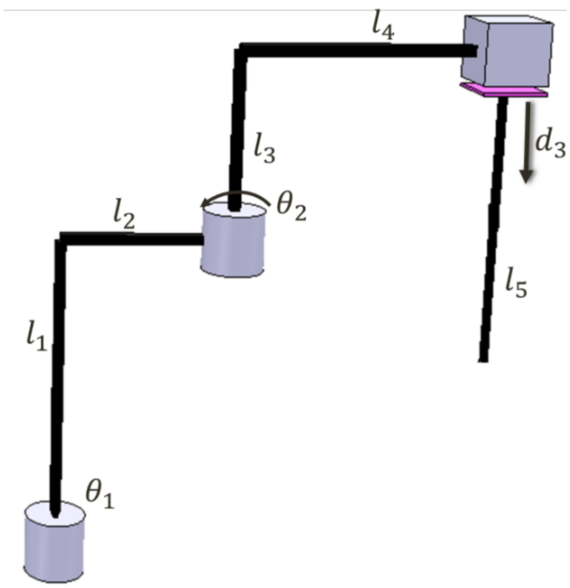
Η τελική μορφή των τριών συστημάτων συντεταγμένων δίνεται στην επόμενη εικόνα.



■

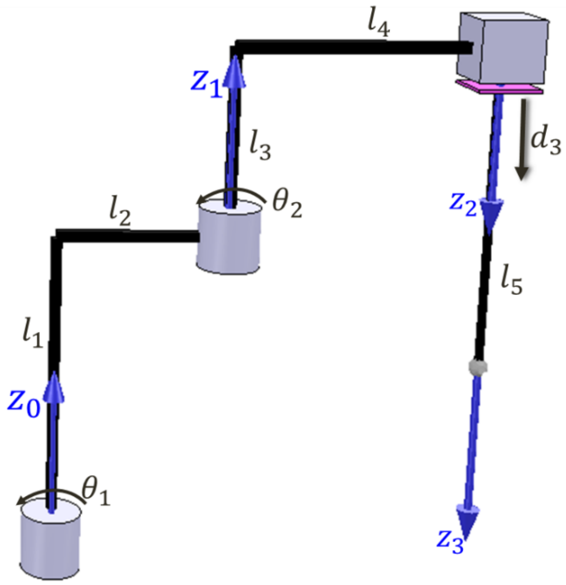
Παράδειγμα 4-4

Έστω το κινηματικό διάγραμμα για έναν βραχίονα SCARA τριών βαθμών ελευθερίας που φαίνεται στην εικόνα. Να τοποθετηθούν οι άξονες συντεταγμένων σύμφωνα με τους κανόνες Denavit-Hartenberg.



Λύση

Θα τοποθετηθούν συστήματα συντεταγμένων στις δύο περιστροφικές αρθρώσεις, στην πρισματική άρθρωση, καθώς και στη θέση του τελικού επενεργητή (άκρο του τμήματος l_5). Ξεκινάμε με την τοποθέτηση των αξόνων z. Σε κάθε περιστροφική άρθρωση ο αντίστοιχος άξονας z θα συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Για την πρισματική άρθρωση, ο άξονας z θα συμπίπτει με την κατεύθυνση που γίνεται η μετατόπιση. Για τον τελικό επενεργητή, δεν υπάρχει κάποιος δεσμευτικός κανόνας, οπότε για ευκολία ο άξονας z τοποθετείται ώστε να είναι παράλληλος και με την ίδια φορά με το z_2, όπως φαίνεται στην εικόνα.

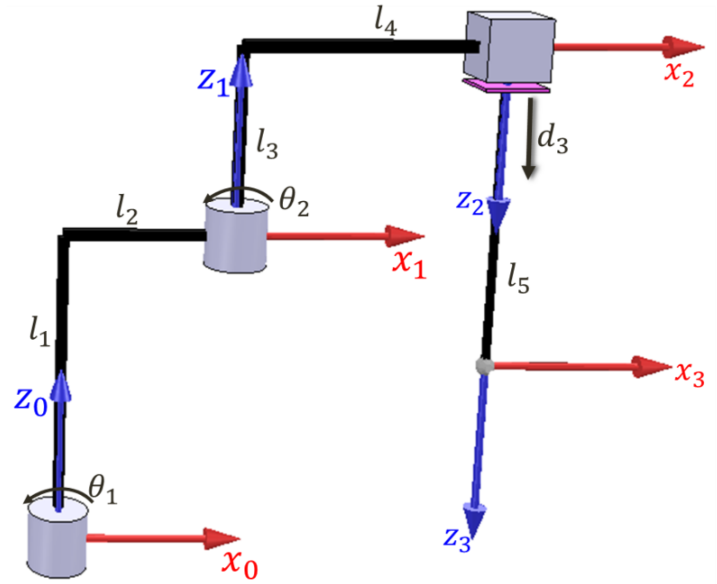


Στη συνέχεια ακολουθεί, η τοποθέτηση των αξόνων x. Με βάση το σκεπτικό που αναλύθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα:

- Ο άξονας x_0 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_0. Επιλέγεται η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.
- Ο άξονας x_1 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_1, κάθετος με τον άξονα z_0 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_0. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.

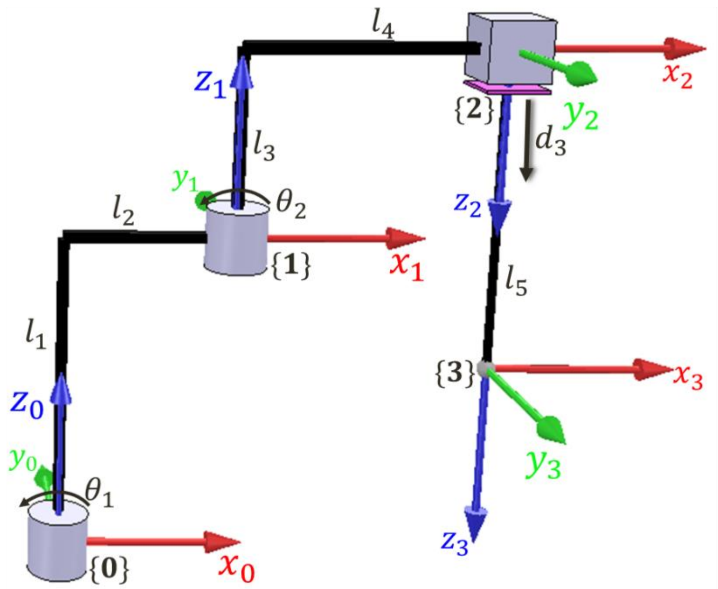
- Ο άξονας x_2 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_2, κάθετος με τον άξονα z_1 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_1. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.
- Ο άξονας x_3 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_3, κάθετος με τον άξονα z_2 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_2. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.

Η τοποθέτηση των αξόνων x φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



Τέλος, η τοποθέτηση του άξονα y σε κάθε σύστημα συντεταγμένων γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού ώστε να σχηματίζεται ένα τρισορθογώνιο σύστημα.

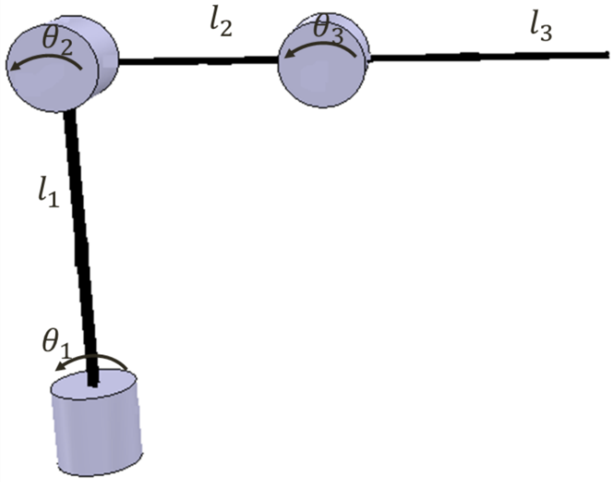
Η τελική μορφή των τριών συστημάτων συντεταγμένων δίνεται στην επόμενη εικόνα.



■

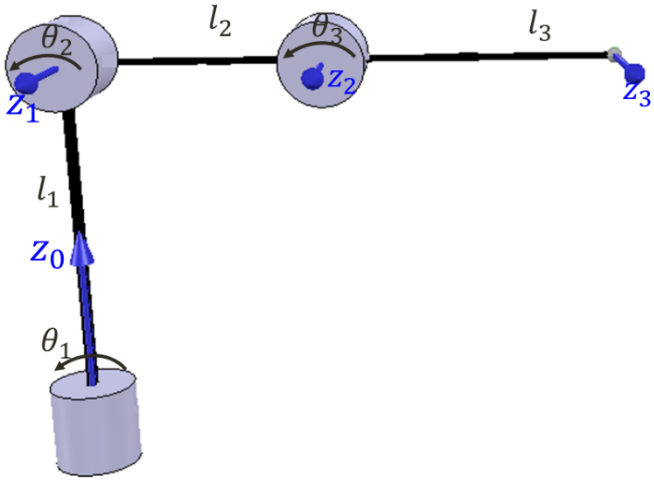
Παράδειγμα 4-5

Έστω το κινηματικό διάγραμμα για έναν ανθρωπομορφικό βραχίονα που φαίνεται στην εικόνα. Οι άξονες περιστροφής για τη δεύτερη και την τρίτη άρθρωση είναι κάθετοι στη σελίδα. Να τοποθετηθούν οι άξονες συντεταγμένων σύμφωνα με τους κανόνες Denavit-Hartenberg.



Λύση

Θα τοποθετηθούν συστήματα συντεταγμένων στις τρεις περιστροφικές αρθρώσεις, καθώς και στη θέση του τελικού επενεργητή (άκρο του τμήματος l_3). Ξεκινάμε με την τοποθέτηση των αξόνων z. Σε κάθε περιστροφική άρθρωση ο αντίστοιχος άξονας z θα συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Για τον τελικό επενεργητή, δεν υπάρχει κάποιος δεσμευτικός κανόνας, οπότε για ευκολία ο άξονας z τοποθετείται ώστε να είναι παράλληλος και με την ίδια φορά με το z_2, όπως φαίνεται στην εικόνα.

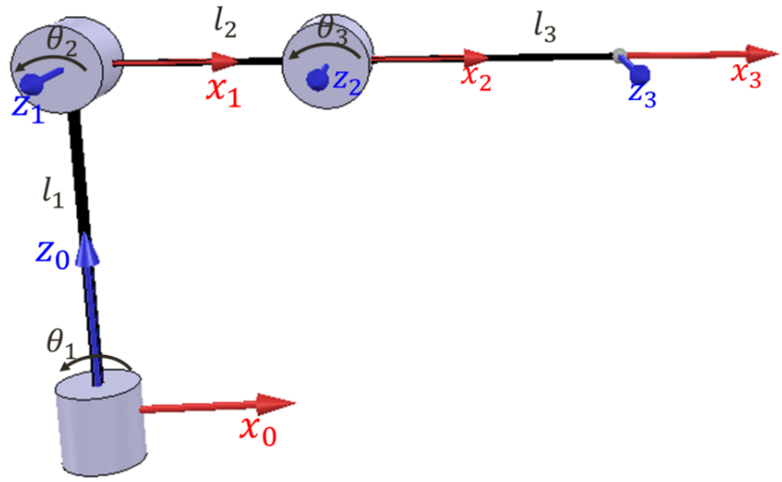


Όσον αφορά στην τοποθέτηση των αξόνων x:

- Ο άξονας x_0 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_0. Επιλέγεται η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.
- Ο άξονας x_1 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_1, κάθετος με τον άξονα z_0 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_0. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.
- Ο άξονας x_2 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_2, κάθετος με τον άξονα z_1 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_1. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.

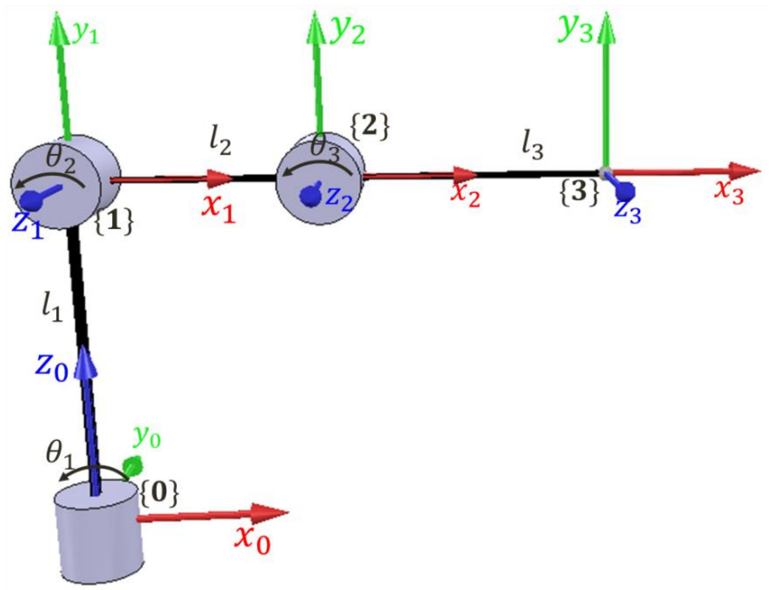
- Ο άξονας x_3 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_3, κάθετος με τον άξονα z_2 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_2. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.

Η τοποθέτηση των αξόνων x φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



Τέλος, η τοποθέτηση του άξονα y σε κάθε σύστημα συντεταγμένων γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού ώστε να σχηματίζεται ένα τρισορθογώνιο σύστημα.

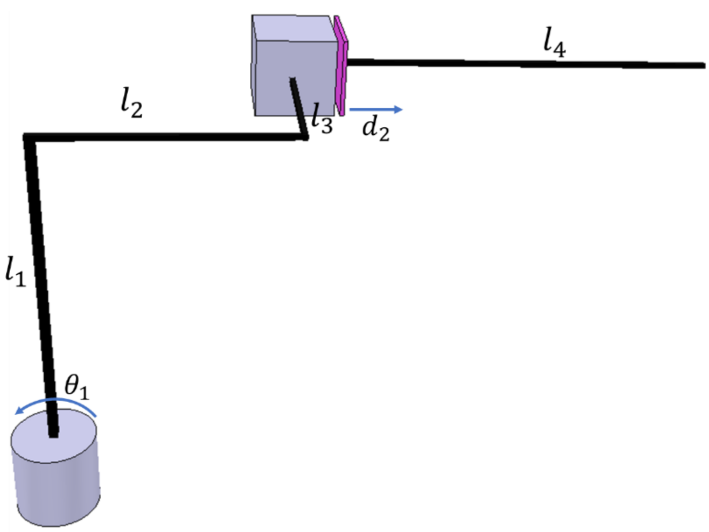
Η τελική μορφή των τριών συστημάτων συντεταγμένων δίνεται στην επόμενη εικόνα.



■

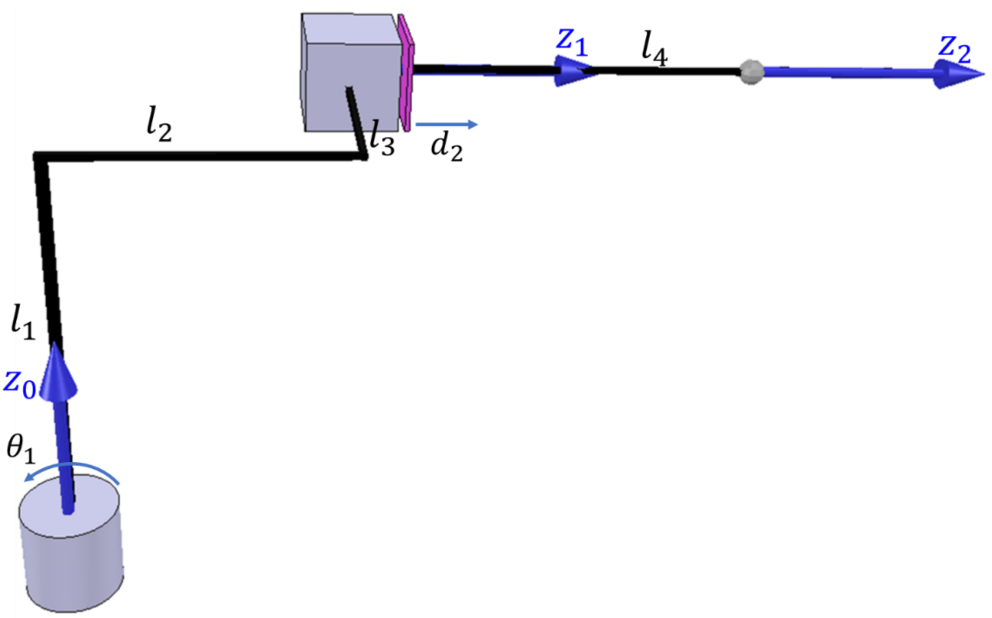
Παράδειγμα 4-6

Έστω το κινηματικό διάγραμμα που φαίνεται στην εικόνα. Να τοποθετηθούν οι άξονες συντεταγμένων σύμφωνα με τους κανόνες Denavit-Hartenberg.



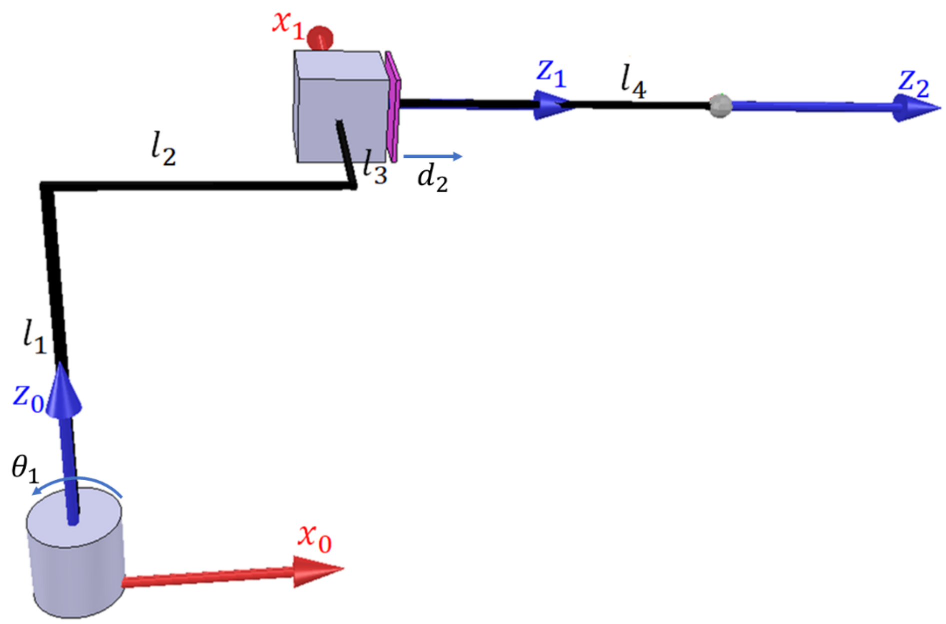
Λύση

Θα τοποθετηθούν συστήματα συντεταγμένων στις δύο αρθρώσεις, καθώς και στη θέση του τελικού επενεργητή (άκρο του τμήματος l_4). Ξεκινάμε με την τοποθέτηση των αξόνων z. Στην περιστροφική άρθρωση ο άξονας z (z_0) θα συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Στην πρισματική άρθρωση, ο άξονας z (z_1) θα συμπίπτει με τον άξονα μετακίνησης. Για τον τελικό επενεργητή, ο άξονας z τοποθετείται ώστε να είναι παράλληλος και με την ίδια φορά με το z_1, όπως φαίνεται στην εικόνα.

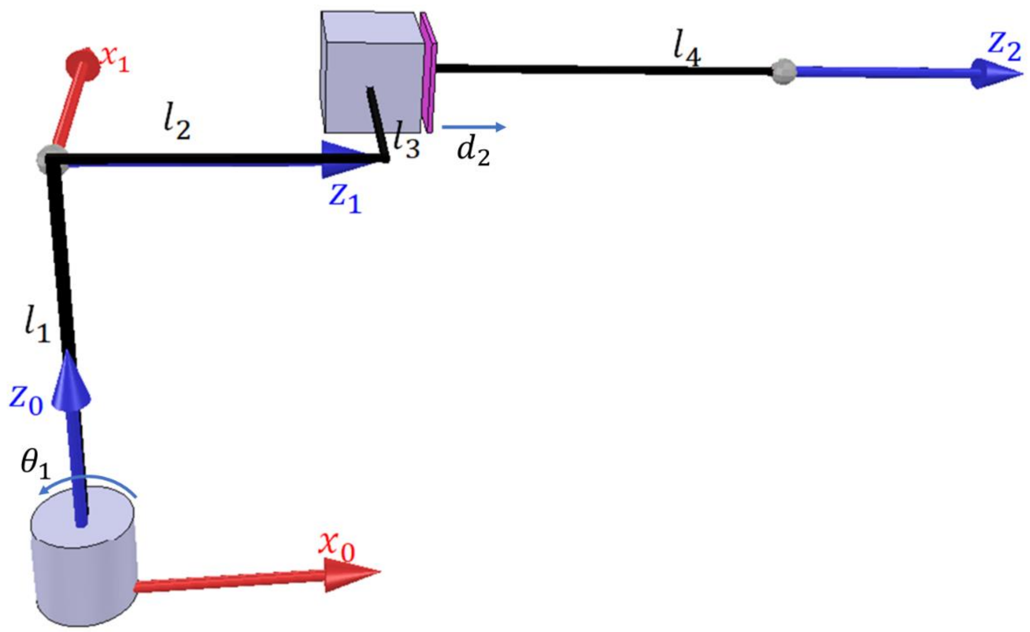


Όσον αφορά στην τοποθέτηση των αξόνων x:

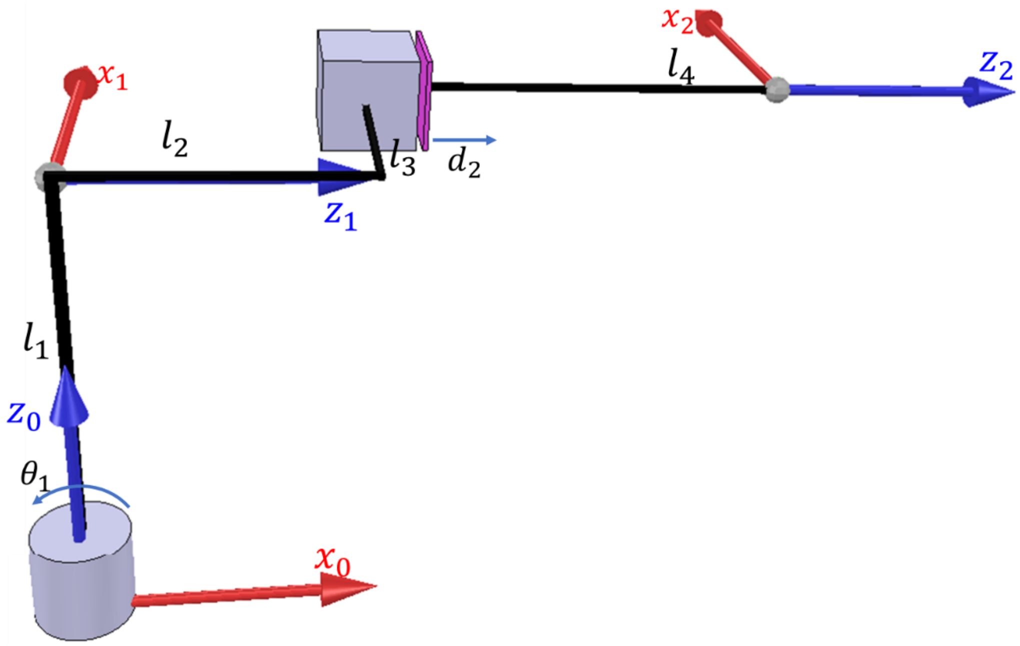
- Ο άξονας x_0 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_0. Επιλέγεται η κατεύθυνση αριστερά-δεξιά στη σελίδα.
- Ο άξονας x_1 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_1 και κάθετος με τον άξονα z_0. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση έξω-μέσα στη σελίδα. Η αρχική τοποθέτηση των δύο αξόνων x φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



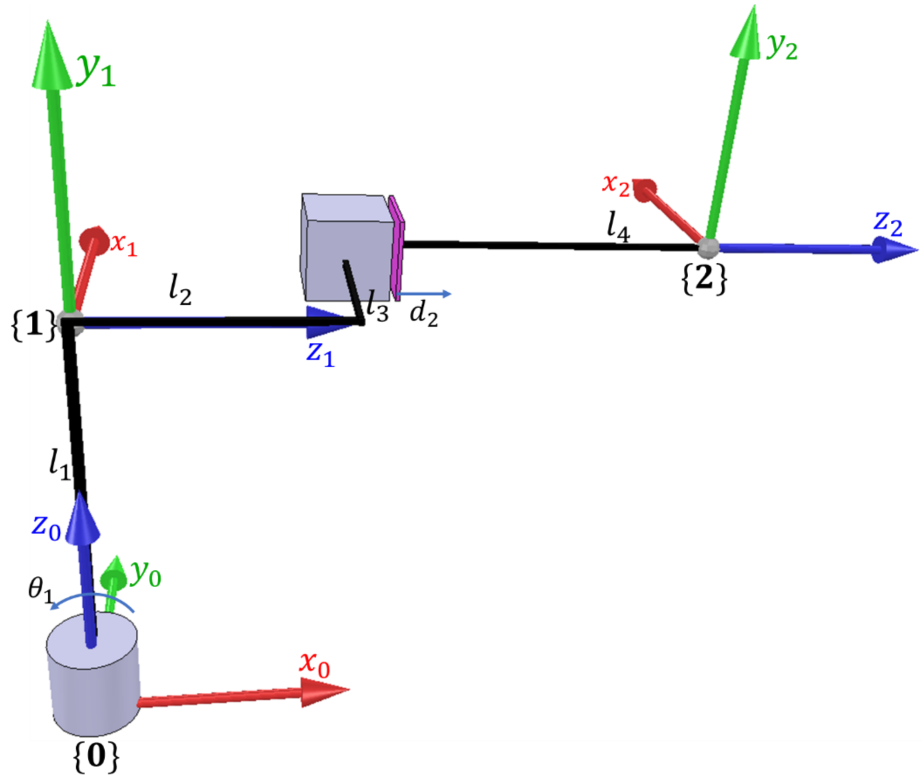
Όμως η προέκταση του x_1 δεν τέμνει την προέκταση του z_0. Για να επιτευχθεί αυτό, η αρχή των αξόνων μετακινείται, όπως φαίνεται στην εικόνα.



- Ο άξονας x_2 τοποθετείται να είναι κάθετος με τον άξονα z_2, κάθετος με τον άξονα z_1 και η προέκταση του να τέμνει τον άξονα z_1. Η μόνη επιτρεπτή κατεύθυνση είναι η κατεύθυνση έξω-μέσα στη σελίδα.



Τέλος, η τοποθέτηση του άξονα y σε κάθε σύστημα συντεταγμένων γίνεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού ώστε να σχηματίζεται ένα τρισορθογώνιο σύστημα. Η τελική μορφή των τριών συστημάτων συντεταγμένων δίνεται στην επόμενη εικόνα



■

4.3 Εύρεση πινάκων ομογενούς μετασχηματισμού

Αφού τοποθετηθούν τα συστήματα συντεταγμένων με τον τρόπο που αναφέρθηκε παραπάνω, στη συνέχεια εξετάζεται η σχετική κίνηση κάθε συστήματος συντεταγμένων σε σχέση με το προηγούμενό του. Συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε τη θέση ενός συστήματος συντεταγμένων μίας άρθρωσης αν αλλάξει κατάσταση η *προηγούμενη* άρθρωση (γίνει περιστροφή αν πρόκειται για περιστροφική άρθρωση ή γίνει μετατόπιση αν πρόκειται για πρισματική άρθρωση).

Πιο αναλυτικά, έστω ένα κινηματικό διάγραμμα με N αρθρώσεις. Στο διάγραμμα αυτό θα βρίσκονται N μεταβλητές $p_1, p_2, .., p_N$ και $N+1$ συστήματα συντεταγμένων $\{0\}, \{1\}, \dots, \{N\}$. Υπενθυμίζεται ότι η μεταβλητή p_1 αφορά στην άρθρωση όπου βρίσκεται το σύστημα συντεταγμένων {0}, η μεταβλητή p_2 αφορά στην άρθρωση όπου βρίσκεται το σύστημα συντεταγμένων {1} κ.ο.κ.

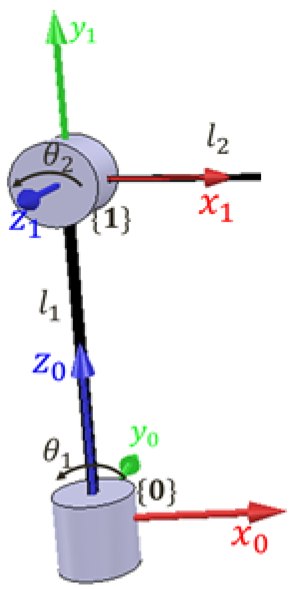
Έστω δύο οποιαδήποτε διαδοχικά συστήματα συντεταγμένων $\{i\}$ και $\{i+1\}$ $(i = 0,1, \dots, N-1)$ και έστω p_{i+1} είναι η μεταβλητή που συνδέεται με το σύστημα συντεταγμένων $\{i\}$. Σκοπός, είναι να βρεθεί η θέση του συστήματος συντεταγμένων $\{i+1\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{i\}$ για μία τυχαία τιμή της μεταβλητής p_{i+1}. Στην ουσία θέλουμε να υπολογίσουμε την περιστροφή και την μετατόπιση του συστήματος $\{i+1\}$ ως προς το σύστημα $\{i\}$ συναρτήσει της p_{i+1} και των μηκών των συνδέσμων. Επομένως, αρκεί να υπολογιστεί ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}_{i+1}^{i}$ και το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_{i+1}^{i}$ μεταξύ του συστήματος συντεταγμένων $\{i+1\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{i\}$ και να σχηματιστεί ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{H}_{i+1}^{i}$.

4.3.1 Εύρεση πίνακα περιστροφής

Ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}_{i+1}^{i}$ προκύπτει ως το γινόμενο δύο πινάκων 3×3. Ο πρώτος πίνακας έχει να κάνει με την περιστροφή που οφείλεται στην άρθρωση $\{i\}$, ενώ ο δεύτερος πίνακας έχει να κάνει με τον προσανατολισμό των αξόνων των δύο συστημάτων συντεταγμένων. Αυτό θα εξηγηθεί, με χρήση ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 4-7

Έστω το τμήμα ενός κινηματικού διαγράμματος της διπλανής εικόνας, το οποίο έχει δύο συστήματα συντεταγμένων: $\{0\}$ και {1}. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}_1^0$.



Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε τον πίνακα που έχει να κάνει με την περιστροφή γύρω από τον άξονα z_0 με γωνία θ_1. Ο πίνακας αυτός είναι: $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

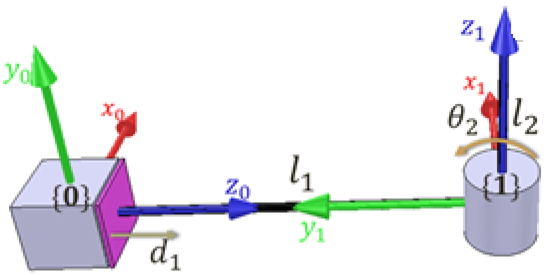
Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον πίνακα που έχει να κάνει με τον προσανατολισμό των αξόνων των δύο συστημάτων συντεταγμένων. Ο άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον άξονα x_0 οπότε η πρώτη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ο άξονας y_1 είναι παράλληλος με τον άξονα z_0 και άρα η δεύτερη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Τέλος, ο άξονας z_1 είναι αντιπαράλληλος με τον άξονα y_0, οπότε η τρίτη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Συγκεντρωτικά, ο πίνακας που δείχνει τον προσανατολισμό των αξόνων του συστήματος $\{1\}$ ως προς το σύστημα $\{0\}$ είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως, ο συνολικός πίνακας της περιστροφής του συστήματος $\{1\}$ ως προς το σύστημα $\{0\}$:

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-8

Έστω το τμήμα κινηματικού διαγράμματος που φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Να υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{R_1^0}$



Λύση

Ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}_1^0$ είναι ως το γινόμενο δύο πινάκων 3×3. Ο πρώτος πίνακας έχει να κάνει με την περιστροφή που οφείλεται στην άρθρωση $\{0\}$, ενώ ο δεύτερος πίνακας έχει να κάνει με τον προσανατολισμό των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων $\{1\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{0\}$. Καθώς, η πρώτη άρθρωση είναι πρισματική, δεν υπάρχει περιστροφή λόγω αυτής και επομένως ο πρώτος πίνακας είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Όσον αφορά στον πίνακα που έχει να κάνει με τον προσανατολισμό των αξόνων των δύο συστημάτων συντεταγμένων παρατηρούμε ότι: Ο άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον άξονα x_0 οπότε η πρώτη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ο άξονας y_1 είναι αντιπαράλληλος με τον άξονα z_0 και άρα η δεύτερη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Τέλος, ο άξονας z_1 είναι παράλληλος με τον άξονα y_0, οπότε η τρίτη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Συγκεντρωτικά, ο πίνακας που δείχνει τον προσανατολισμό των αξόνων του συστήματος $\{1\}$ ως προς το σύστημα $\{0\}$ είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως, ο συνολικός πίνακας της περιστροφής του συστήματος $\{1\}$ ως προς το σύστημα $\{0\}$:

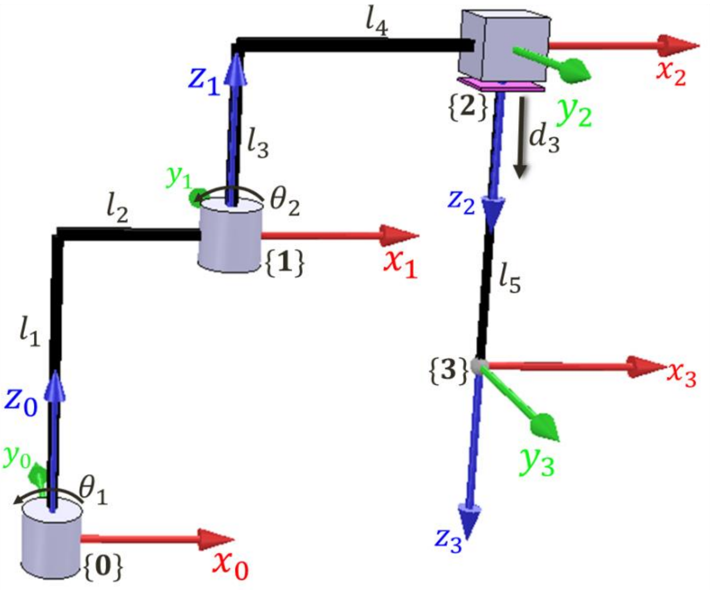
$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-9

Να υπολογιστούν όλοι οι διαδοχικοί πίνακες περιστροφής ενός βραχίονα SCARA τριών βαθμών ελευθερίας.

Λύση

Το κινηματικό διάγραμμα του βραχίονα φαίνεται στην επόμενη εικόνα (βλ. **Παράδειγμα 4-4**).



Για τον πίνακα περιστροφής του συστήματος συντεταγμένων του συστήματος $\{1\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{0\}$ παρατηρούμε ότι: έχουμε περιστροφή ως προς τον άξονα z_0 με γωνία θ_1 και άρα ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Επίσης, δεν υπάρχει διαφορά στον προσανατολισμό των αξόνων των δύο συστημάτων συντεταγμένων, με αποτέλεσμα ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι ο μοναδιαίος πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Συνολικά, θα είναι:

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα περιστροφής του συστήματος συντεταγμένων του συστήματος $\{2\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{1\}$ ισχύει: έχουμε περιστροφή ως προς τον άξονα z_1 με γωνία θ_2 και άρα ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι $\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ο άξονας x_2 είναι παράλληλος με τον άξονα x_1 οπότε η πρώτη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ο άξονας y_2 είναι αντιπαράλληλος με τον άξονα y_1 και άρα η δεύτερη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ο άξονας z_2 είναι αντιπαράλληλος με τον άξονα z_1, οπότε η τρίτη στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Άρα, ο πίνακας που δείχνει τον προσανατολισμό των αξόνων του συστήματος $\{1\}$ ως προς το σύστημα $\{0\}$ είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Συνολικά, θα είναι:

$$\mathbf{R_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, για τον πίνακα περιστροφής του συστήματος συντεταγμένων του συστήματος $\{3\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{2\}$, λαμβάνοντας ότι έχουμε πρισματική άρθρωση προκύπτει εύκολα ότι:

$$\mathbf{R_3^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

4.3.2 Εύρεση διανύσματος μετατόπισης

Το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_{i+1}^{i}$ περιγράφει την μετατόπιση που έχει το σύστημα συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i+1}\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i}\}$. Αν η άρθρωση πάνω στην οποία βρίσκεται το σύστημα $\{\boldsymbol{i}\}$ είναι πρισματική, τότε η συνολική μετατόπιση υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των συνδέσμων που συνδέουν τις αρθρώσεις που είναι τα δύο συστήματα συντεταγμένων, καθώς και τη μετατόπιση λόγω της πρισματικής άρθρωσης. Συγκεκριμένα, αν το σύστημα συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i+1}\}$ είναι σε απόσταση l_x κατά μήκος του x_i, l_y κατά μήκος του y_i, l_z κατά μήκος του z_i και η μεταβλητή της πρισματικής άρθρωσης είναι d_i, τότε θα είναι:

$$\mathbf{d}_{i+1}^{i} = \begin{bmatrix} \pm l_x \\ \pm l_y \\ \pm(l_z + d_i) \end{bmatrix}$$

Το $+(-)$ χρησιμοποιείται εάν η αντίστοιχη μετατόπιση είναι κατά τη θετική (αρνητική) κατεύθυνση του άξονα.

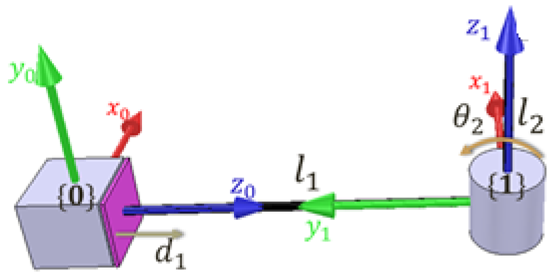
Αν η άρθρωση πάνω στην οποία βρίσκεται στο σύστημα $\{i\}$ είναι περιστροφική τότε η συνολική μετατόπιση υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των συνδέσμων που συνδέουν τις αρθρώσεις που είναι τα δύο συστήματα συντεταγμένων, καθώς και την περιστροφή της άρθρωσης. Συγκεκριμένα, αν το σύστημα συντεταγμένων $\{i+1\}$ είναι σε απόσταση l_x κατά μήκος του x_i, l_y κατά μήκος του y_i, l_z κατά μήκος του z_i και η μεταβλητή της περιστροφικής άρθρωσης είναι θ_i, τότε θα είναι:

$$\mathbf{d}_{i+1}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm l_x \\ \pm l_y \\ \pm l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm l_x \cos\theta_i \mp l_y \sin\theta_i \\ \pm l_x \sin\theta_i \pm l_y \cos\theta_i \\ \pm l_z \end{bmatrix}$$

Τα προαναφερόμενα περιγράφονται αναλυτικά με τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 4-10

Έστω το τμήμα κινηματικού διαγράμματος που φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Να υπολογιστεί το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_1^0$.



Λύση

Παρατηρώντας το κινηματικό διάγραμμα προκύπτουν τα ακόλουθα:

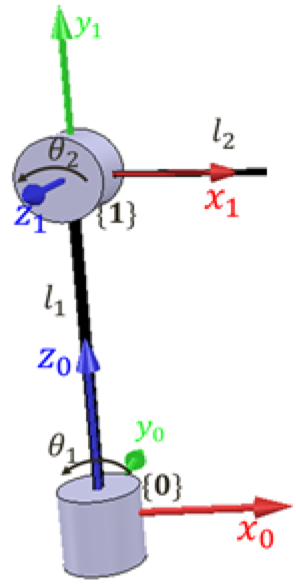
- Το σύστημα $\{1\}$ δεν έχει μετατοπιστεί κατά μήκος του άξονα x_0.
- Το σύστημα $\{1\}$ δεν έχει μετατοπιστεί κατά μήκος του άξονα y_0.
- Το σύστημα $\{1\}$ έχει μετατοπιστεί κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z_0 κατά $l_1 + d_1$.

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + d_1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-11

Έστω το τμήμα ενός κινηματικού διαγράμματος της διπλανής εικόνας, το οποίο έχει δύο συστήματα συντεταγμένων: $\{0\}$ και {1}. Να υπολογιστεί το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_1^0$.



Λύση

Από το συγκεκριμένο στιγμιότυπο του κινηματικού διαγράμματος παρατηρούμε :

- Το σύστημα $\{1\}$ δεν έχει μετατοπιστεί κατά μήκος του άξονα x_0.
- Το σύστημα $\{1\}$ δεν έχει μετατοπιστεί κατά μήκος του άξονα y_0.
- Το σύστημα $\{1\}$ έχει μετατοπιστεί κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z_0 κατά l_1.

Τα παραπάνω ισχύουν όταν $\theta_1 = 0°$, γιατί όπως έχει αναφερθεί το κινηματικό διάγραμμα σχεδιάζεται για μηδενικές τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων. Όμως, στη γενικότερη περίπτωση που η γωνία περιστροφής δεν είναι 0° θα ισχύει ότι:

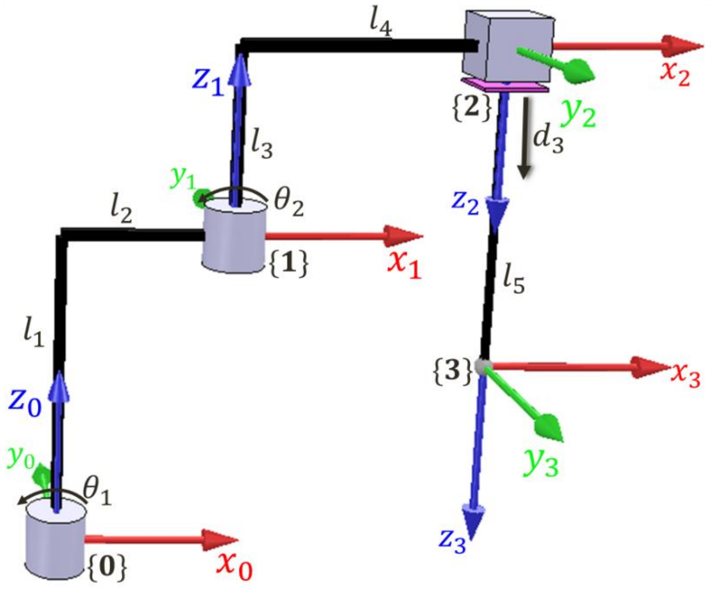
$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-12

Να υπολογιστούν όλα τα διαδοχικά διανύσματα μετατόπισης ενός βραχίονα SCARA τριών βαθμών ελευθερίας.

Λύση

Το κινηματικό διάγραμμα του βραχίονα φαίνεται στην επόμενη εικόνα (βλ. **Παράδειγμα 4-4**).



Για το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_1^0$ του συστήματος συντεταγμένων $\{1\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{0\}$ έχουμε ότι:

- Το σύστημα $\{1\}$ είναι μετατοπισμένο κατά l_2 κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x_0.
- Το σύστημα $\{1\}$ δεν είναι μετατοπισμένο κατά μήκος του άξονα y_0.
- Το σύστημα $\{1\}$ είναι μετατοπισμένο κατά l_1 κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z_0.
- Η άρθρωση που είναι το σύστημα $\{0\}$ είναι περιστροφική με γωνία περιστροφής θ_1.

Συνεπώς:

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2\cos\theta_1 \\ l_2\sin\theta_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

Για το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_2^1$ του συστήματος συντεταγμένων $\{2\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{1\}$ έχουμε ότι:

- Το σύστημα $\{2\}$ είναι μετατοπισμένο κατά l_4 κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x_1.
- Το σύστημα $\{2\}$ δεν είναι μετατοπισμένο κατά μήκος του άξονα y_1.
- Το σύστημα $\{2\}$ είναι μετατοπισμένο κατά l_3 κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z_1.
- Η άρθρωση που είναι το σύστημα $\{1\}$ είναι περιστροφική με γωνία περιστροφής θ_2.

Συνεπώς:

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4\cos\theta_2 \\ l_4\sin\theta_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

Τέλος, για το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_3^2$ του συστήματος συντεταγμένων $\{3\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{2\}$ έχουμε ότι:

- Το σύστημα $\{3\}$ δεν είναι μετατοπισμένο κατά μήκος του άξονα x_2.

- Το σύστημα $\{3\}$ δεν είναι μετατοπισμένο κατά μήκος του άξονα y_2.
- Το σύστημα $\{3\}$ είναι μετατοπισμένο κατά l_5 κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z_2.
- Η άρθρωση που είναι το σύστημα $\{2\}$ είναι πρισματική με μεταβλητή d_3.

Συνεπώς:

$$\mathbf{d}_3^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 + d_3 \end{bmatrix} \blacksquare$$

4.3.3 Σχηματισμός επιμέρους πινάκων ομογενούς μετασχηματισμού

Έχοντας βρει τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}_{i+1}^{i}$ και το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_{i+1}^{i}$ μεταξύ δύο διαδοχικών συστημάτων συντεταγμένων μπορεί να σχηματιστεί ο αντίστοιχος πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού. Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας αυτός είναι 4×4. Ο πάνω αριστερά υποπίνακας 3×3 είναι ο πίνακας περιστροφής. Η τελευταία στήλη είναι το διάνυσμα μετατόπισης και η τελευταία γραμμή είναι $[0\ 0\ \ 0\ 1]$. Σχηματικά, έχουμε ότι:

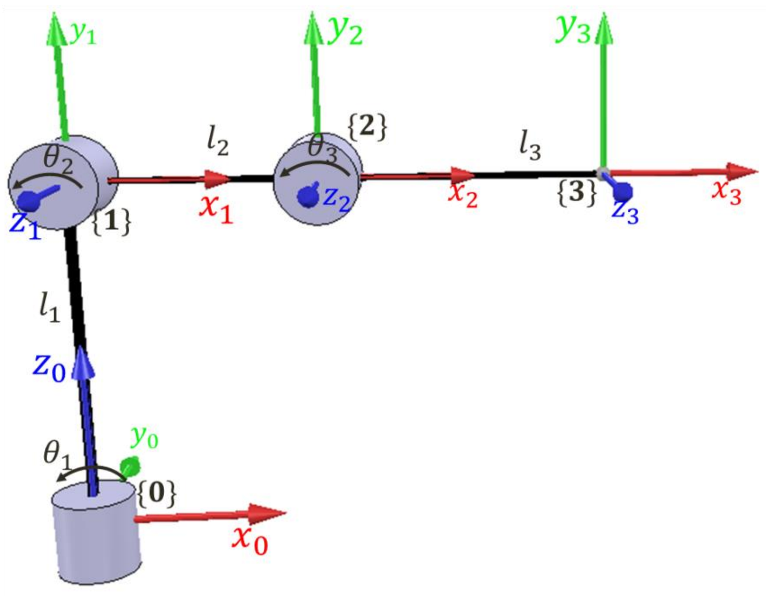
$$\mathbf{H}_{i+1}^{i} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{i+1}^{i} & & \mathbf{d}_{i+1}^{i} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα 4-13

Να υπολογιστούν όλοι οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου.

Λύση

Το κινηματικό διάγραμμα για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου είναι όπως φαίνεται στην εικόνα (βλ. **Παράδειγμα 4-5**).



Με βάση τη διαδικασία που περιεγράφηκε παραπάνω για την εύρεση του πίνακα περιστροφής και το διανύσματος μετατόπισης έχουμε:

- Πίνακας $\mathbf{H_1^0}$

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Πίνακας $\mathbf{H_2^1}$

$$\mathbf{R_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2\cos\theta_2 \\ l_2\sin\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Πίνακας $\mathbf{H_3^2}$

$$\mathbf{R_3^2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_3^2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3\cos\theta_3 \\ l_3\sin\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

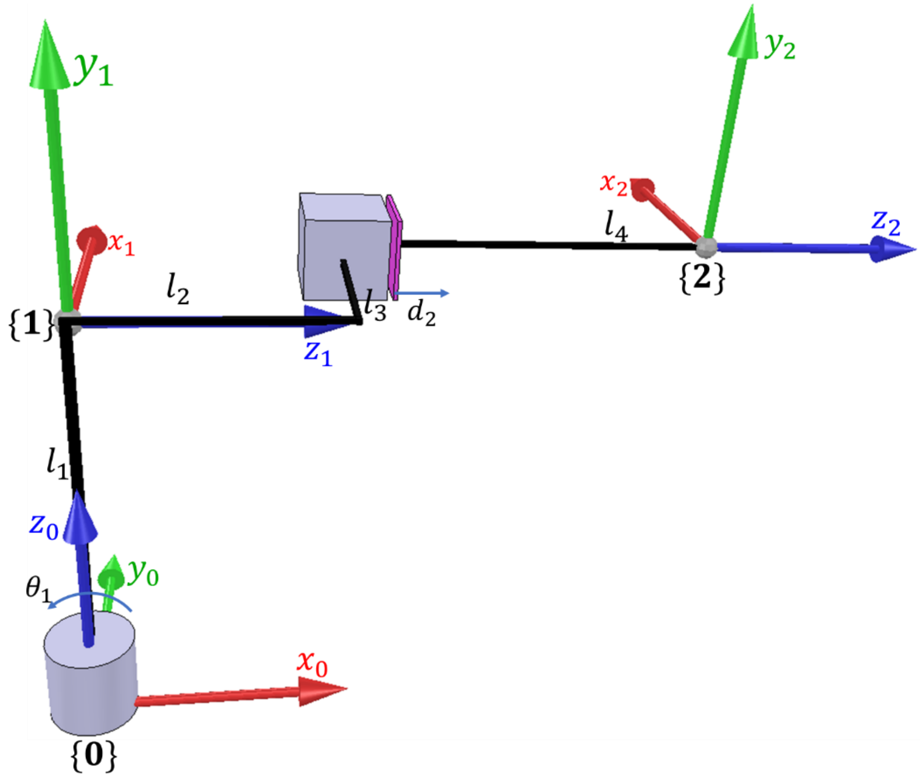
$$\mathbf{H_3^2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-14

Να υπολογιστούν όλοι οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού για το κινητικό διάγραμμα στο Παράδειγμα 4-6.

Λύση

Για ευκολία, το κινηματικό διάγραμμα εμφανίζεται πάλι στην επόμενη εικόνα.



Εργαζόμενοι όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, θα έχουμε ότι:

- Πίνακας $\mathbf{H_1^0}$

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Πίνακας $\mathbf{H_2^1}$

$$\mathbf{R_2^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_2^1} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ l_2 + l_4 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_2^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + l_4 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

4.3.4 Εύρεση συνολικού πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού

Οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{H}_{\mathbf{i+1}}^{\mathbf{i}}$ $(i = 0,1,2, \dots, N-1)$ μπορούν να πολλαπλασιαστούν διαδοχικά για να δώσουν ένα τελικό πίνακα 4×4 ($\mathbf{H}_{N}^{\mathbf{0}}$), ο οποίος περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού επενεργητή ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$:

$$\mathbf{H}_{N}^{\mathbf{0}} = \mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \cdot \mathbf{H}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{N}^{\mathbf{N-1}}$$

Παράδειγμα 4-15

Να βρεθεί ο συνολικός πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου.

Λύση

Από το **Παράδειγμα 4-13** έχουμε ότι:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο συνολικός πίνακας $\mathbf{H}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{0}}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}\mathbf{H}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}}\mathbf{H}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{2}} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1 & l_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & l_2\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_1 + l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ \sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την εξαγωγή του τελικού αποτελέσματος, χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \blacksquare$$

4.4 Εξαγωγή σχέσεων

Όπως έχει αναφερθεί, τελικός στόχος είναι να βρεθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες (x, y, z) του τελικού επενεργητή, ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$, με τις μεταβλητές των αρθρώσεων και τις διαστάσεις των συνδέσμων. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να προκύψουν πολύ εύκολα λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{N\}$ έχει συντεταγμένες $(0,0,0)$. Καθώς, έχει υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}}$ ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στην τελευταία στήλη του πίνακα $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}}$.

Επίσης. λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \mathbf{H}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} \dots \mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{N-1}}$ μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα ότι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \mathbf{H}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} \dots \mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{N-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} (\mathbf{H}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} \dots (\mathbf{H}_{\boldsymbol{N-2}}^{\boldsymbol{N-3}} ((\mathbf{H}_{\boldsymbol{N-1}}^{\boldsymbol{N-2}} (\mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{N-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})))))$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι για να βρούμε τις συντεταγμένες (x, y, z) πολλαπλασιάζουμε αρχικά το $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ με το $\mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{N-1}}$. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε αυτό που προκύπτει με $\mathbf{H}_{\boldsymbol{N-1}}^{\boldsymbol{N-2}}$. Το νέο αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\mathbf{H}_{\boldsymbol{N-2}}^{\boldsymbol{N-3}}$ κ.ο.κ.

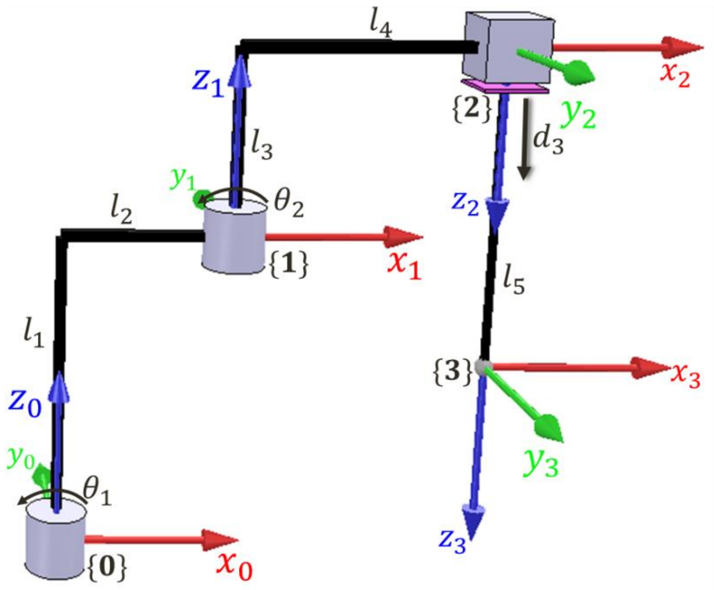
Στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή με χρήση του πίνακα $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}}$ βρίσκουμε απευθείας τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή ως προς το σύστημα αναφορά $\{\mathbf{0}\}$. Στη δεύτερη περίπτωση, όπου γίνεται χρήση των επιμέρους πινάκων, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή αρχικά ως προς το σύστημα αναφορά $\{\boldsymbol{N-1}\}$, μετά ως προς το $\{\boldsymbol{N-2}\}$, μετά ως προς το $\{\boldsymbol{N-3}\}$, μέχρι να φτάσουμε στο $\{\mathbf{0}\}$.

Παράδειγμα 4-16

Να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή σε σχέση με τις μεταβλητές των αρθρώσεων για έναν βραχίονα SCARA τριών βαθμών ελευθερίας.

Λύση

Το κινηματικό διάγραμμα του βραχίονα δίνεται πάλι στην επόμενη εικόνα.



Από το **Παράδειγμα 4-9** έχουμε ότι:

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από το **Παράδειγμα 4-12** έχουμε ότι:

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2\cos\theta_1 \\ l_2\sin\theta_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4\cos\theta_2 \\ l_4\sin\theta_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_3^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 + d_3 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού είναι:

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & l_4\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & l_4\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_3^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τις ζητούμενες σχέσεις, ας εργαστούμε εφαρμόζοντας διαδοχικά τους επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού ξεκινώντας από τον τελευταίο και πηγαίνοντας προς τα πίσω. Ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων {3} έχει συντεταγμένες (0,0,0). Ως προς το σύστημα συντεταγμένων {2} θα έχει συντεταγμένες (x_2, y_2, z_2):

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_3^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 + d_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων {1} θα έχει συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_2^1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & l_4\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & l_4\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 + d_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4\cos\theta_2 \\ l_4\sin\theta_2 \\ l_3 - l_5 - d_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων {**0**} θα έχει συντεταγμένες (x, y, z):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_1^0} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4\cos\theta_2 \\ l_4\sin\theta_2 \\ l_3 - l_5 - d_5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} l_4\cos\theta_1\cos\theta_2 - l_4\sin\theta_1\sin\theta_2 + l_2\cos\theta_1 \\ l_4\sin\theta_1\cos\theta_2 + l_4\cos\theta_1\sin\theta_2 + l_2\sin\theta_1 \\ l_1 + l_3 - l_5 - d_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4\cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2\cos\theta_1 \\ l_4\sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2\sin\theta_1 \\ l_1 + l_3 - l_5 - d_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$x = l_4\cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2\cos\theta_1$$

$$y = l_4\sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2\sin\theta_1$$

$$z = l_1 + l_3 - l_5 - d_3$$

Τα ίδια αποτελέσματα θα προκύψουν αν χρησιμοποιήσουμε τον συνολικό πίνακα $\mathbf{H_3^0}$. Συγκεκριμένα είναι:

$$\mathbf{H_3^0} = \mathbf{H_1^0 H_2^1 H_3^2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_4\cos(\theta_1+\theta_2) + l_2\cos\theta_1 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & -\cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_4\sin(\theta_1+\theta_2) + l_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 + l_3 - l_5 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και θα ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_3^0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_4\cos(\theta_1+\theta_2) + l_2\cos\theta_1 \\ l_4\sin(\theta_1+\theta_2) + l_2\sin\theta_1 \\ l_1 + l_3 - l_5 - d_3 \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-17

Να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή σε σχέση με τις μεταβλητές των αρθρώσεων για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου.

Λύση

Το κινηματικό διάγραμμα του βραχίονα δίνεται πάλι στην επόμενη εικόνα. Για τον βραχίονα αυτόν ισχύει ότι (**Παράδειγμα 4-13**):

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_3^2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων {3} έχει συντεταγμένες (0,0,0). Ως προς το σύστημα συντεταγμένων {2} θα έχει συντεταγμένες (x_2, y_2, z_2):

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_3^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3\cos\theta_3 \\ l_3\sin\theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων {1} θα έχει συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_2^1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3\cos\theta_3 \\ l_3\sin\theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_3\cos\theta_2\cos\theta_3 - l_3\sin\theta_3\sin\theta_2 + l_2\cos\theta_2 \\ l_3\cos\theta_3\sin\theta_2 + l_3\cos\theta_2\sin\theta_3 + l_2\sin\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2 \\ l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_1^0} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2 \\ l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ \sin\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$x = \cos\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2]$$

$$y = \sin\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2]$$

$$z = l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2$$

Ισοδύναμα, από το **Παράδειγμα 4-15** έχουμε ότι:

$$\mathbf{H_3^0} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ \sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως θα ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_3^0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ \sin\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \\ l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

4.5 Εξαγωγή αντίστροφων σχέσεων

Οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή, ως προς το σύστημα αναφοράς, όταν είναι γνωστές οι τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων ενός βραχίονα (δηλαδή όταν είναι γνωστή η γωνία περιστροφής ή η μετατόπιση κάθε άρθρωσης). Αυτό όμως που έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι το αντίστροφο πρόβλημα: με δεδομένες τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή, να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών των αρθρώσεων. Δηλαδή, εάν θέλουμε ο τελικός επενεργητής να πάει σε μία συγκεκριμένη θέση στον χώρο, θα πρέπει να υπολογίσουμε την γωνία περιστροφής ή την μετατόπιση κάθε άρθρωσης. Αυτό σημαίνει, ότι οι προηγούμενες σχέσεις πρέπει να επιλυθούν ως προς τις μεταβλητές των αρθρώσεων. Επειδή πρόκειται για μη γραμμικές σχέσεις που περιλαμβάνουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν οι συμβατικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων εξισώσεων (π.χ με χρήση οριζουσών). Στη συνέχεια, παρουσιάζονται παραδείγματα εξαγωγής των αντίστροφων σχέσεων.

Παράδειγμα 4-18

Να βρεθούν οι αντίστροφες σχέσεις που δίνουν τις μεταβλητές των αρθρώσεων για έναν βραχίονα SCARA 3 βαθμών ελευθερίας σε σχέση με τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή.

Λύση

Στο **Παράδειγμα 4-16** βρήκαμε ότι:

$$x = l_4 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos\theta_1 \tag{1}$$

$$y = l_4 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin\theta_1 \tag{2}$$

$$z = l_1 + l_3 - l_5 - d_3 \tag{3}$$

Η μεταβλητή d_3 μπορεί να υπολογιστεί εύκολα απευθείας από τη σχέση (3):

$$\boldsymbol{d_3 = l_1 + l_3 - l_5 - z}$$

Οι γωνίες θ_1 και θ_2 θα υπολογιστούν από τις σχέσεις (1) και (2). Υψώνουμε κάθε σχέση στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέρη:

$$x^2 + y^2 = [l_4 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos\theta_1]^2 + [l_4 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin\theta_1]^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = l_4^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + 2l_2l_4 \cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2^2 \cos^2\theta_1 +$$
$$l_4^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + 2l_2l_4 \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2^2 \sin^2\theta_1 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = l_4^2[\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)] + l_2^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) +$$
$$2l_2l_4[\cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$$

και βρίσκουμε ότι:

$$x^2 + y^2 = l_4^2 + 2l_2l_4 \cos\theta_2 + l_2^2$$

Από τη σχέση αυτή υπολογίζεται η μεταβλητή θ_2:

$$\boldsymbol{\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - l_2^2 - l_4^2}{2l_2l_4}\right)}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη της σχέσης (1) με $\cos\theta_1$και τα δύο μέρη της σχέσης (2) με $\sin\theta_1$:

$$x\cos\theta_1 = l_4\cos\theta_1\cos(\theta_1+\theta_2) + l_2\cos^2\theta_1$$

$$y\sin\theta_1 = l_4\sin\theta_1\sin(\theta_1+\theta_2) + l_2\sin^2\theta_1$$

Προσθέτουμε τις δύο σχέσεις κατά μέρη και χρησιμοποιούμε τις προαναφερθείσες ταυτότητες, οπότε προκύπτει:

$$x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = l_4\cos\theta_2 + l_2 \qquad (4)$$

Θέτουμε: $x=\rho\cos\varphi$ και $y=\rho\sin\varphi$, όπου:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Η σχέση (4) μπορεί να γραφτεί πλέον:

$$\rho\cos\varphi\cos\theta_1 + \rho\sin\varphi\sin\theta_1 = l_4\cos\theta_2 + l_2 \Rightarrow$$

$$\rho(\cos\varphi\cos\theta_1 + \rho\sin\varphi\sin\theta_1) = l_4\cos\theta_2 + l_2 \Rightarrow$$

$$\rho\cos(\varphi-\theta_1) = l_4\cos\theta_2 + l_2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\theta_1 = \varphi - \cos^{-1}\left(\frac{l_4\cos\theta_2 + l_2}{\rho}\right)} \blacksquare$$

Παράδειγμα 4-19

Να βρεθούν οι αντίστροφες σχέσεις που δίνουν τις μεταβλητές των αρθρώσεων για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου σε σχέση με τις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή.

Λύση

Από το **Παράδειγμα 4-17** έχουμε ότι:

$$x = \cos\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \qquad (1)$$

$$y = \sin\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2] \qquad (2)$$

$$z = l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \qquad (3)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta_1 \Rightarrow \boldsymbol{\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη της σχέσης (1) με $\cos\theta_1$και τα δύο μέρη της σχέσης (2) με $\sin\theta_1$:

$$x\cos\theta_1 = \cos^2\theta_1\,[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2]$$

$$y\sin\theta_1 = \sin^2\theta_1[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2]$$

Προσθέτουμε τις δύο σχέσεις κατά μέρη και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, οπότε προκύπτει:

$$x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1 = l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2$$

Από τη σχέση (3), έχουμε ότι:

$$z - l_1 = l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \quad (4)$$

Υψώνουμε τις προηγούμενες σχέσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέρη:

$$(x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1)^2 + (z-l_1)^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos\theta_3$$

όπου όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα κάναμε χρήση των ταυτοτήτων:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)$$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{(x\cos\theta_1 + y\sin\theta_1)^2 + (z-l_1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)}$$

Από τη σχέση (4) έχουμε ότι:

$$z - l_1 = l_3(\cos\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_2\cos\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \Longrightarrow$$

$$z - l_1 = l_3\sin\theta_3\cdot\cos\theta_2 + (l_2 + l_3\cos\theta_3)\cdot\sin\theta_2$$

Θέτουμε: $(l_2 + l_3\cos\theta_3) = \rho\cos\varphi$ και $l_3\sin\theta_3 = \rho\sin\varphi$, όπου:

$$\rho = \sqrt{(l_2 + l_3\cos\theta_3)^2 + (l_3\sin\theta_3)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{l_3\sin\theta_3}{l_2 + l_3\cos\theta_3}\right)$$

Επομένως, θα είναι:

$$z - l_1 = \rho\sin\varphi\cdot\cos\theta_2 + \rho\cos\varphi\cdot\sin\theta_2 \Longrightarrow$$

$$z - l_1 = \rho\sin(\theta_2+\varphi) \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{z-l_1}{\rho}\right) - \varphi} \;\blacksquare$$