Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθήνας

Βιοστατιστική (Θ)

Ενότητα 6: Έλεγχοι υποθέσεων - Διαστήματα εμπιστοσύνης

Δρ.Ευσταθία Παπαγεωργίου, Καθηγήτρια
Τμήμα Ιατρικών Εργαστηρίων

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Οι ερευνητικές υποθέσεις

- Στην έρευνα ελέγχουμε υποθέσεις, με βάση τα πραγματικά δεδομένα μας.
    - π.χ. ο μεγάλος χρόνος εισόδου στο Νοσοκομείο από την έναρξη των συμπτωμάτων, συσχετίζεται με αυξημένο κίνδυνο θανάτου;
    - Μια διατροφή πλούσια σε υδατάνθρακες συσχετίζεται με μειωμένο σωματικό βάρος;

Έλεγχος υπόθεσης

- Στην Στατιστική μας ενδιαφέρει να μπορούμε να ελέγξουμε αν μια συγκεκριμένη υπόθεση είναι αληθής ή όχι, στον **πληθυσμό αναφοράς**
  - Π.χ. Αν η μέση τιμή μιας ορμόνης στο αίμα είναι ίδια σε γυναίκες που γέννησαν με καισαρική ή με φυσιολογικό τοκετό
- Υπάρχουν διάφορες στατιστικές δοκιμασίες (έλεγχοι), και η κάθε μια από αυτές ελέγχει ένα συγκεκριμένο είδος υπόθεσης
- Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά κάποιες από τις πιο σημαντικές από τις δοκιμασίες αυτές

Έλεγχος υπόθεσης

- Η γενική διαδικασία που χρησιμοποιείται στη Στατιστική για να αποφασίσουμε αν μια υπόθεση ισχύει ή όχι σε ένα συγκεκριμένο πληθυσμό ονομάζεται **έλεγχος υπόθεσης**

- Ο **έλεγχος υπόθεσης** είναι μια διαδικασία βάση της οποίας συνάγουμε συμπεράσματα για μια παράμετρο του πληθυσμού (π.χ. τη μέση τιμή), χρησιμοποιώντας πληροφορίες που προέρχονται από το δείγμα μας

Έλεγχος υπόθεσης

- Σε όλες τις στατιστικές δοκιμασίες θα έχουμε **δύο υποθέσεις**, για να αποφασίσουμε ποια από τις 2 φαίνεται να είναι <u>πιο πιθανή</u> για τον πληθυσμό αναφοράς

- Η μια υπόθεση λέγεται μηδενική (H_0) και η άλλη εναλλακτική (H_A ή H_1)

Έλεγχος υπόθεσης

- Η διαδικασία που ακολουθούμε σε ένα οποιαδήποτε έλεγχο υπόθεσης είναι η παρακάτω:
  - ‘Εστω, ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν η μέση τιμή μ του ύψους μιας ομάδας παιδιών είναι 90εκ.

- Αρχικά, ξεκινάμε υποθέτοντας ότι η μηδενική υπόθεση(H_0) ισχύει:
  - π.χ. στο παραπάνω παράδειγμα υποθέτουμε ότι η πραγματική μέση τιμή του πληθυσμού είναι ίση με η δοσμένη τιμή
  - H_0: μ=90εκ.

(συν.)

- Η εναλλακτική υπόθεση είναι πάντα αντίθετη της μηδενικής υποθεσης
    - Έτσι, στο παράδειγμα που αναφερόμαστε: η εναλλακτική υπόθεση είναι H_A: μ≠90εκ.

- Στη συνέχεια ελέγχουμε αν το δείγμα μας είναι περισσότερο συνεπές με τη μηδενική υπόθεση ή με την εναλλακτική υπόθεση

- Το τελικό συμπέρασμα θα αντιστοιχεί σε όλο τον πληθυσμό αναφοράς, και όχι μόνο στο δείγμα μας

Πώς αποφασίζουμε;

- Πώς καταλαβαίνουμε αν το δείγμα μας είναι περισσότερο συνεπές με τη μηδενική υπόθεση ή με την εναλλακτική υπόθεση;

- Υπάρχουν 2 τρόποι για να το κάνουμε αυτό
  - Από την τιμή του στατιστικού κριτηρίου και τους κατάλληλους Πίνακες
  - Ή από την p-value

- Τονίζουμε ότι και οι 2 τρόποι καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα!

Πώς αποφασίζουμε; (συν.)

- Θα μιλήσουμε και για τους 2 τρόπους
  - Θα επιμείνουμε στον 1ο τρόπο
  - Θα δούμε και παραδείγματα του 2ου τρόπου (κυρίως στα εργαστήρια)

Στατιστικό επίπεδο αναφοράς

- Και για τους 2 τρόπους χρειαζόμαστε το στατιστικό επίπεδο αναφοράς
- Αυτό συνήθως είναι η τιμή 0,05.
- Άλλα εναλλακτικά επίπεδα αναφοράς που μπορεί να δούμε στην πράξη είναι το 0,10 ή το 0,01

Στατιστικό επίπεδο αναφοράς (συν.)

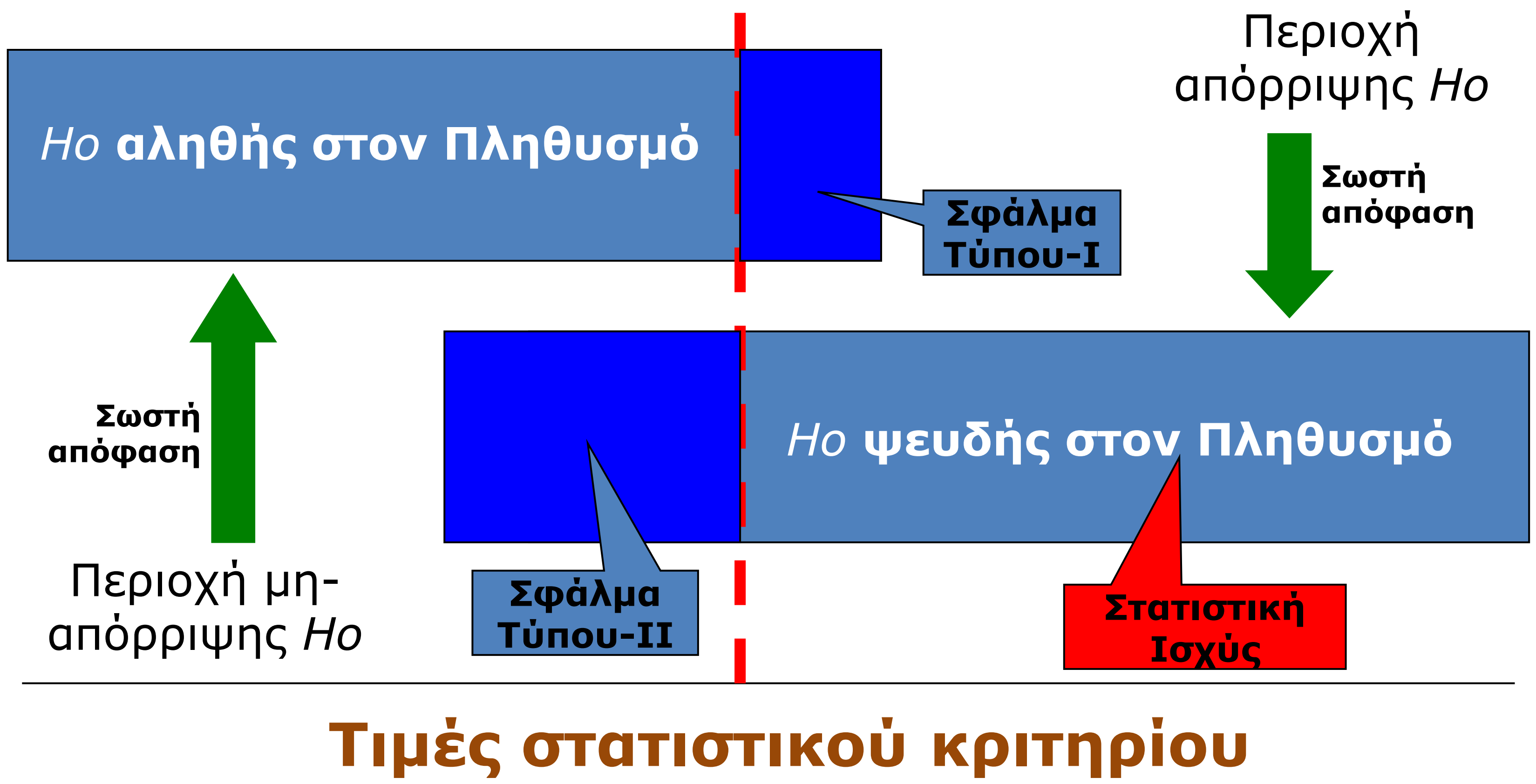
- Εάν για παράδειγμα σε έναν έλεγχο επιλέξουμε επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 και απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, αυτό σημαίνει ότι σε 100 όμοιες περιπτώσεις, είναι δυνατό έχουμε κάνει λάθος και να απορρίψουμε την Ho ενώ είναι αληθής, μόνο σε 5.
- Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι η υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05

- Σε κάθε έλεγχο είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν δύο ειδών σφάλματα:
    - **Σφάλμα τύπου Ι:** Απόρριψη της Ho ενώ στην πραγματικότητα είναι αληθής.
    - **Σφάλμα τύπου ΙΙ:** Απόρριψη της H_1(Αποδοχή της Ho) ενώ στην πραγματικότητα η H_1 είναι αληθής.

Σφάλματα στη λήψη απόφασης

	Αποδοχή υπόθεσης H_o από το δείγμα	Απόρριψη υπόθεσης H_o από το δείγμα
Υπόθεση Ho αληθής στον πληθυσμό	✓	Σφάλμα τύπου I
Υπόθεση Ho ψευδής στον πληθυσμό	Σφάλμα τύπου II	✓ Στατιστική ισχύς

Έλεγχοι Υποθέσεων



- **α=P(σφάλμα τύπου I)=**P(Απόρριψη της Ho ενώ στην πραγματικότητα είναι αληθής)
- **β=P(σφάλμα τύπου II)=**P(Αποδοχή της Ho ενώ στην πραγματικότητα η H_1 είναι αληθής)
- **Η πιθανότητα γ= 1-β ονομάζεται ισχύς του ελέγχου και εκφράζει το ποσοστό των «σωστών» απορρίψεων της Ho.**

Το α ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας.

Στατιστικό κριτήριο και πίνακες

- Πώς αποφασίζουμε με βάση την τιμή του στατιστικού κριτηρίου και τους κατάλληλους Πίνακες;
- Υπολογίζουμε την τιμή του στατιστικού κριτηρίου
    - Λαμβάνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις μας
- Βρίσκουμε σε κατάλληλους πίνακες την κρίσιμη τιμή
    - Αυτή είναι η οριακή πιθανότητα για την απόρριψη της H0.
- Συγκρίνουμε την τιμή του στατιστικού κριτηρίου με την κρίσιμη τιμή

Στατιστικό κριτήριο και πίνακες (συν.)

- R: περιοχή απόρριψης της H_0
- Αν με βάση τη σύγκριση της τιμής του στατιστικού κριτηρίου και της κρίσιμης τιμής βρισκόμαστε στην R, απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε την H_A
- Αν με βάση την παραπάνω σύγκριση δεν βρισκόμαστε στην R, τότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0

p-value

- Πώς αποφασίζουμε με βάση την p-value;
- Συγκρίνουμε την υπολογιζόμενη p-value με το στατιστικό επίπεδο αναφοράς (συνήθως είναι το 0,05)
  - Αν p-value < 0,05, τότε απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε την H_A
  - Αν p-value > 0,05, τότε αποτυγχάνουμε να απορρίψουμε την H_0

Το μέγεθος του δείγματος

- Το **επαρκές** μέγεθος του δείγματος είναι μεγίστης σημασίας για την αξιοπιστία της έρευνας.

Οι «αρχές» της δειγματοληψίας

- Πρέπει όμως να ληφθεί υπόψη ότι **σχετικά μεγάλο δείγμα** συνεπάγεται και μεγάλο κόστος
    - **χωρίς αυτό να σημαίνει και απαραίτητα αξιόπιστα αποτελέσματα**,
- ενώ **πολύ μικρό δείγμα** μπορεί να οδηγήσει σε **συστηματικό σφάλμα** και **μεροληπτικές** αποφάσεις για τον πληθυσμό.

Στατιστικοί έλεγχοι – Διαστήματα εμπιστοσύνης

- Τα διαστήματα εμπιστοσύνης αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο εκτίμησης παραμέτρων.
- Ένα τέτοιο διάστημα ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης με βαθμό εμπιστοσύνης γ (συνήθως 0,05).
- Ο αριθμός γ=1-α (συνήθως 0,95) εκφράζει την ακρίβεια με την οποία θέλουμε να γίνει η εκτίμηση, ενώ ο α εκφράζει τον βαθμό ανεκτικότητας ώστε το διάστημα να <u>μην</u> περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.
- Π.χ. το 95% Δ.Ε. για μέση τιμή της ηλικίας ενός συγκεκριμένου πληθυσμού είναι το (37, 41)
    - Οπότε έχουμε 5% πιθανότητα το παραπάνω διάστημα να μην περιέχει την πραγματική μέση τιμή

Παράδειγμα

- Μετρήθηκε το κάλιο του ορού σε 9 υγιή άτομα και σε 4 άτομα που έπασχαν από μία νόσο. Στα υγιή άτομα βρέθηκε μέση τιμή 4 m Eq/L και σταθερή απόκλιση 0.9 m Eq/L, ενώ στους ασθενείς βρέθηκε μέση τιμή 5 m Eq/L και σταθερή απόκλιση 0.8 m Eq/L.

  Υπάρχει διαφορά των μέσων τιμών του καλίου του ορού στις δύο αυτές ομάδες;

Έλεγχοι υποθέσεων και δ.ε. για διαφορά μέσων τιμών σε ανεξάρτητους πληθυσμούς σε μικρά δείγματα και με ισότητα διασπορών ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$):

H_0: $\mu_1=\mu_2$ H_1: $\mu1>\mu2$	H_0: $\mu_1=\mu_2$ H_1: $\mu1<\mu2$	H_0: $\mu_1=\mu_2$ H_1: $\mu1\neq\mu2$
$R=\{t>t_{n_1+n_2-2;a}\}$	$R=\{t<-t_{n_1+n_2-2;a}\}$	$R=\{\lvert t\rvert>t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\}$

Για τον υπολογισμό του Δ.Ε. έχουμε:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2-s\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\ ,\ \bar{x}_1-\bar{x}_2+s\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}})\text{, όπου } s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

Το στατιστικό κριτήριο t δίνεται από τον τύπο:

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

Υπολογισμοί

- Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν H_0: $\mu_1=\mu_2$, έναντι της υπόθεσης: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(9-1)0{,}9^2+(4-1)0{,}8^2}{9+4-2} = \frac{8*0{,}81+3*0{,}64}{11} = 0{,}764$
- $t = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{s*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{4-5}{\sqrt{0{,}764}*\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{0{,}874*0{,}601} = \frac{-1}{0{,}525} = -1{,}904$
- Άρα, η τιμή του στατιστικού κριτηρίου στην περίπτωσή μας είναι -1,904.

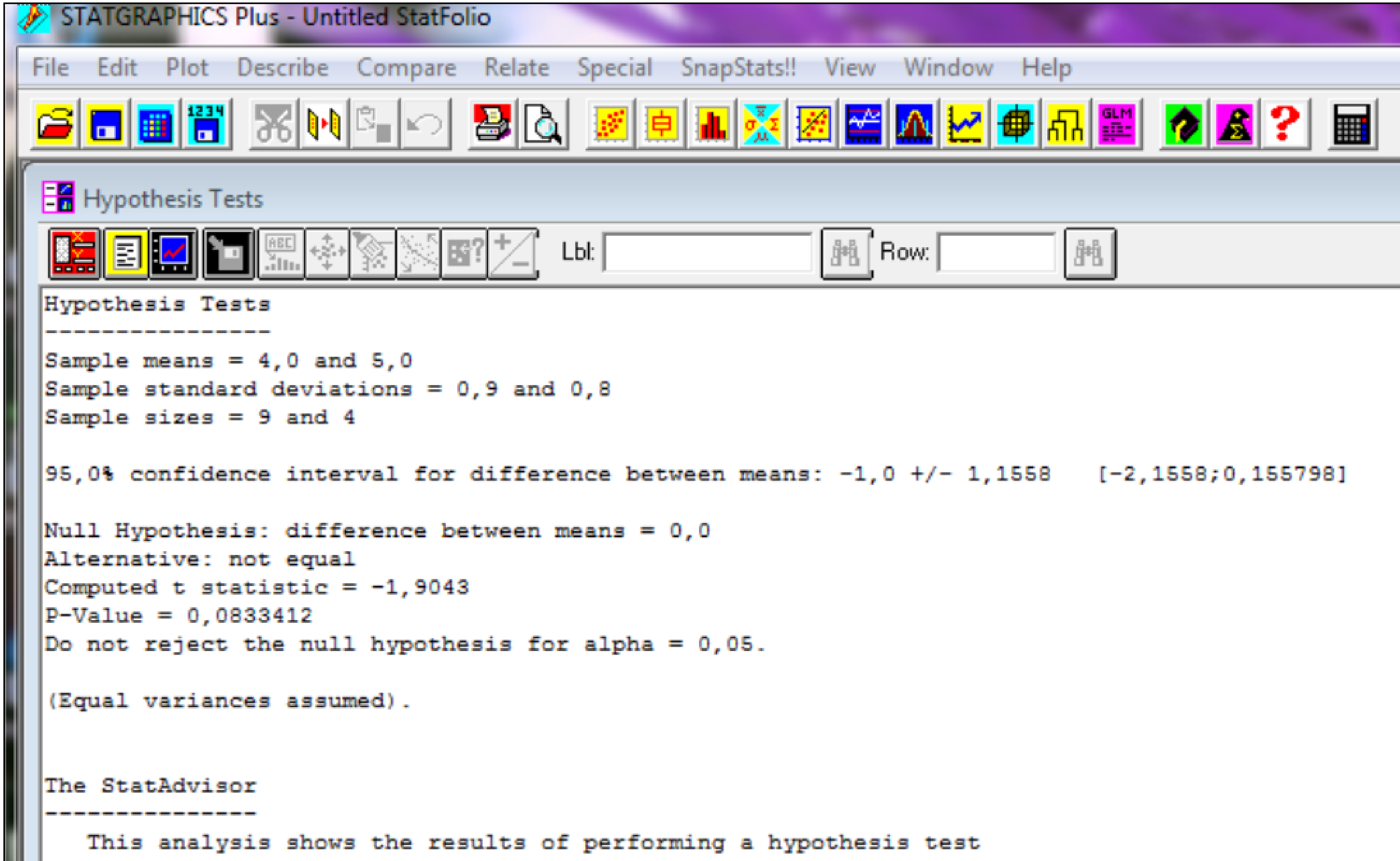
Υπολογισμοί (συν.)

- Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την κρίσιμη τιμή.
- Είδατε ότι με βάση τον τύπο η κρίσιμη τιμή είναι η $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}$
- Στην περίπτωσή μας, n_1=9 , n_2=4 και α=0,05.
- Από τον πίνακα *(βλέπε επόμενη διαφάνεια)* για τις τιμές της κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}} = t_{11;0,025}$ =2,201

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373
1000	1.282	1.646	1.962	2.33	2.581	3.098	3.3

Υπολογισμοί (συν.)

- Η κρίσιμη περιοχή είναι η:
- R= $\left\{|t| > t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\right\}$.
- Προφανώς |t|=|-1,904|=1,904 < $t_{n_1+n_2-2}$ =2,201
- Άρα, δεν βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή R.
- <u>Οπότε, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0</u>.
- Άρα συμπεραίνουμε ότι οι μέσες τιμές του καλίου του ορού στις δύο αυτές ομάδες είναι ίσες, στον πληθυσμό αναφοράς.


STATGRAPHICS Plus - Untitled StatFolio
File Edit Plot Describe Compare Relate Special SnapStats!! View Window Help
Hypothesis Tests
Lbl:
Row:
Hypothesis Tests

Sample means = 4,0 and 5,0
Sample standard deviations = 0,9 and 0,8
Sample sizes = 9 and 4
95,0% confidence interval for difference between means: -1,0 +/- 1,1558 [-2,1558;0,155798]
Null Hypothesis: difference between means = 0,0
Alternative: not equal
Computed t statistic = -1,9043
P-Value = 0,0833412
Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.
(Equal variances assumed).
The StatAdvisor

This analysis shows the results of performing a hypothesis test

Όπως διαπιστώνουμε δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση Ho : $\mu_1=\mu_2$ έναντι της εναλλακτικής H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$, δηλαδή δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει διαφορά στις τιμές του καλίου του ορού στις δύο αυτές ομάδες.

Συγκεκριμένα:

Null Hypothesis: difference between means = 0,0

Alternative: not equal

Computed t statistic = -1,9043

P-Value = 0,0833412

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05

(Equal variances assumed)

Δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση Ho για επίπεδο σημαντικότητας α=0,05, διότι η τιμή του p-value είναι 0.08334 > 0.05. Επίσης το στατιστικό λογισμικό μας υπολογίζει και την τιμή του t κριτηρίου ίση με -1.9043.

Σημειώνεται ότι αναφερόμαστε σε κανονικούς πληθυσμούς με άγνωστες και ίσες διασπορές ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma$).

Statistical Tests –Confidence Intervals
Statistical tests I

- Όπως διαπιστώνουμε επίσης το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών μ_1-μ_2 του καλίου του ορού στις δύο αυτές ομάδες είναι:

[-2,1558 ; 0,155798]

Παράδειγμα

- Μετρήθηκαν τα επίπεδα σιδήρου στον ορό δύο ομάδων παιδιών. Η ομάδα Α αποτελείται από υγιή παιδιά και η ομάδα Β αποτελείται από παιδιά που πάσχουν από κυστική ίνωση.
- Δίνονται τα παρακάτω:
  - Ομάδα Α:
    - $\bar{x}_1$ =18,9 μmol/L
    - n_1=9
    - s_1=5,9 μmol/L
  - Ομάδα Β:
    - $\bar{x}_2$ =11,9 μmol/L
    - n_2=13
    - s_2=6,3 μmol/L
- Να διερευνηθεί αν οι μέσες τιμές σιδήρου στις δύο ομάδες είναι ίσες. Υπάρχει διαφορά των μέσων τιμών του σιδήρου του ορού στις δύο αυτές ομάδες;

(συν.)

- Είναι οι 2 δειγματικές μέσες τιμές μας ίσες;
  - Προφανώς όχι (18,9≠11,9), αλλά δεν μας ενδιαφέρουν οι δειγματικές τιμές!!
  - Μας ενδιαφέρει αν οι πραγματικές μέσες τιμές μπορεί να είναι ίσες!
    - ✓ Δηλαδή οι μέσες τιμές των 2 πληθυσμών που συγκρίνουμε.

(συνέχεια)

- Έτσι, έχουμε δύο υποθέσεις:
  - H_0: $\mu_1=\mu_2$ (Μηδενική υπόθεση)
  - H_1: $\mu_1\neq\mu_2$ (Εναλλακτική υπόθεση)

- Είναι πιθανό η παρατηρούμενη διαφορά στις δύο δειγματικές μέσες τιμές (18.9 και 11.9) να οφείλεται σε τυχαίες διακυμάνσεις (αλλά κατά βάση οι 2 μέσες τιμές να είναι ίσες στον πληθυσμό);
- Ή πρέπει να συμπεράνουμε ότι η παρατηρούμενη διαφορά στις δειγματικές μέσες τιμές οφείλεται σε διαφορετικές πραγματικές μέσες τιμές των δύο πληθυσμών υπό έλεγχο;

Υπολογισμοί

- Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν H_0: $\mu_1=\mu_2$, έναντι της υπόθεσης: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
- Αρχικά υπολογίζουμε την διασπορά s^2:
- $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(9-1)*5{,}9^2+(13-1)*6{,}3^2}{9+13-2} = \frac{8*34{,}81+12*39{,}69}{20} =$ 37,738
- Η τιμή του στατιστικού κριτηρίου t είναι:
- $t = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{s*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{18{,}9-11{,}9}{\sqrt{37{,}738}*\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{13}}} = \frac{7}{6{,}143*0{,}434} = 2{,}625$
- Άρα, η τιμή του στατιστικού κριτηρίου t είναι 2,625

Υπολογισμοί (συν.)

- Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την κρίσιμη τιμή.
- Είδατε ότι με βάση τον τύπο η κρίσιμη τιμή είναι η $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}$
- Στην περίπτωσή μας, n_1=9 , n_2=13 και α=0,05.
- Από τον πίνακα *(βλέπε επόμενη διαφάνεια)* για τις τιμές της

  κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}} = t_{20;0,025}$ =2,086

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373
1000	1.282	1.646	1.962	2.33	2.581	3.098	3.3

Υπολογισμοί (συν.)

- Η κρίσιμη περιοχή είναι η:
- R= $\left\{|t| > t_{n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2}}\right\}$.
- Προφανώς |t|=| 2,625 |= 2,625 > $t_{n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2}}$ =2,086
- Άρα, βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή R.
- <u>Οπότε, απορρίπτουμε την H_0 και συμπεραίνουμε ότι $\mu_1 \neq \mu_2$</u>.
- Άρα, οι μέσες τιμές σιδήρου του ορού στις δύο ομάδες διαφέρουν, στον πληθυσμό αναφοράς!

Παράδειγμα

- Μια νόσος χαρακτηρίζεται από υψηλό πυρετό. Για να δοκιμαστεί ένα νέο φάρμακο, πραγματοποιήθηκε μια έρευνα. Σε αυτή, οι ασθενείς που συμμετείχαν χωρίστηκαν σε 2 ομάδες. Η μια ομάδα έλαβε το νέο φάρμακο και η άλλη ομάδα έλαβε το κλασικό φάρμακο που δίνονταν για τη νόσο αυτή. Έτσι, τελικά δόθηκε το νέο φάρμακο σε 20 ασθενείς και το κλασικό σε 18 ασθενείς. Μετά από ημέρες, οι μετρήσεις της θερμοκρασίας των 38 ασθενών δίνονται στην επόμενη διαφάνεια.

- Να διερευνηθεί αν οι μέσες τιμές θερμοκρασίας στις δύο ομάδες είναι ίσες.
- Το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας είναι το 0,05.

Μετρήσεις θερμοκρασίας

Νέο φάρμακο:									
38.4	36.8	40.0	39.8	38.6	39.1	38.9	36.8	40.4	39.4
38.0	38.6	40.1	38.1	37.2	39.5	37.3	39.1	39.9	37.8
Κλασσικό φάρμακο:									
40.9	39.5	39.4	38.2	39.7	38.9	38.6	39.9	41.3	38.1
39.6	37.1	39.5	40.3	41.5	39.3	37.6	40.6		

Υπολογισμοί

- Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν H_0: $\mu_1=\mu_2$, έναντι της υπόθεσης: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
- Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τα $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1, s_2.
- $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{n_1} = \frac{38{,}4+36{,}8+\cdots+37{,}8}{20} = \frac{773{,}8}{20} = 38{,}69$
- $\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{18} x_i}{n_1} = \frac{40{,}9+39{,}5+\cdots+40{,}6}{18} = \frac{710{,}0}{18} = 39{,}44$
- Επίσης: $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 38{,}4^2 + 36{,}8^2 + \cdots + 37{,}8^2 = 29.962{,}2$
- $\sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 40{,}9^2 + 39{,}5^2 + \cdots + 40{,}6^2 = 28.031{,}0$

Υπολογισμοί (συν.)

- Υπενθυμίζουμε ότι για τον υπολογισμό της διασποράς, ο τύπος που χρησιμοποιούμε είναι ο:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right\}$$

- Αυτόν τον τύπο θα τον χρησιμοποιήσουμε 2 φορές: την 1η φορά για τον υπολογισμό της διασποράς s_1 της 1ης ομάδας, και άλλη μια φορά για τον υπολογισμό της διασποράς s_2 της 2ης ομάδας

- Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-1}$$

Υπολογισμοί (συν.)

- $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2}{n_1}\right) = \frac{1}{19}\left(29962{,}2 - \frac{773{,}8^2}{20}\right) = 1{,}257$
- $s_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\left(\sum_{i=1}^{18} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{18} x_i\right)^2}{n_2}\right) = \frac{1}{17}\left(28031 - \frac{710^2}{18}\right) = 1{,}497$
- Οπότε η συνολική διασπορά s^2 είναι:
- $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(20-1)*1{,}257 \quad +(18-1)*1{,}497}{20+18-2} = \frac{19*1{,}58+17*2{,}24}{36} = 1{,}37$

Υπολογισμοί

- Η τιμή του στατιστικού κριτηρίου είναι:
- $t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{38{,}69 - 39{,}44}{\sqrt{1{,}37} * \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{18}}} = \frac{-0{,}75}{1{,}36 * 0{,}32} = -2{,}00$
- Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι η κρίσιμη τιμή είναι $t_{n_1+n_2-2; \frac{a}{2}} = t_{36;0{,}025}$ =2,339
- Προφανώς |t|=|-2,00|=2,00 < $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}$ =2,339
- Άρα, δεν μπορούμε να <u>απορρίψουμε την H_0</u>
- Οπότε, συμπεραίνουμε ότι οι μέσες τιμές θερμοκρασίας στις δύο ομάδες είναι ίσες, στον πληθυσμό αναφοράς.

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Αθήνας, Ευσταθία Παπαγεωργίου 2014. Ευσταθία Παπαγεωργίου. «Βιοστατιστική (Θ). Ενότητα 6: Έλεγχοι υποθέσεων - Διαστήματα εμπιστοσύνης». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: ocp.teiath.gr.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Επεξήγηση όρων χρήσης έργων τρίτων

©	Δεν επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου, παρά μόνο εάν ζητηθεί εκ νέου άδεια από το δημιουργό.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου και η δημιουργία παραγώγων αυτού με απλή αναφορά του δημιουργού.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-SA	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού, και διάθεση του έργου ή του παράγωγου αυτού με την ίδια άδεια.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-ND	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. Δεν επιτρέπεται η δημιουργία παραγώγων του έργου.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-NC	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. Δεν επιτρέπεται η εμπορική χρήση του έργου.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-NC-SA	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. και διάθεση του έργου ή του παράγωγου αυτού με την ίδια άδεια Δεν επιτρέπεται η εμπορική χρήση του έργου.
διαθέσιμο με άδεια CC-BY-NC-ND	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου με αναφορά του δημιουργού. Δεν επιτρέπεται η εμπορική χρήση του έργου και η δημιουργία παραγώγων του.
διαθέσιμο με άδεια CC0 Public Domain	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου, η δημιουργία παραγώγων αυτού και η εμπορική του χρήση, χωρίς αναφορά του δημιουργού.
διαθέσιμο ως κοινό κτήμα	Επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου, η δημιουργία παραγώγων αυτού και η εμπορική του χρήση, χωρίς αναφορά του δημιουργού.
χωρίς σήμανση	Συνήθως δεν επιτρέπεται η επαναχρησιμοποίηση του έργου.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης