Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Σχολή Μηχανικών – Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

3. ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Δρ. Ισαάκ Βρυζίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα 1

ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ακέραιος Προγραμματισμός - Εισαγωγή

- Μια από τις προϋποθέσεις εφαρμογής του **συνεχούς γραμμικού** προγραμματισμού (Γ.Π.) είναι η **διαιρετότητα των μεταβλητών απόφασης**. Σε ένα κλασικό (συνεχές) Γ.Π., οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή, του τύπου 7.5 κιλά, 0.8 ώρες, 3.5 χιλ. €, κ.λ.π.
- Υπάρχει όμως σημαντικός αριθμός προβλημάτων Γ.Π. στα οποία όλες οι μεταβλητές αποφάσεις ή μερικές από αυτές, υποχρεούνται να πάρουν **μόνο ακέραιες τιμές (Integer Variables)**.
- Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, αυτές που δηλώνουν αριθμό εργατών, αριθμό εργοστασιακών μονάδων, αποφάσεις χρηματοδότησης ή μη χρηματοδότησης ενός έργου, κ.λ.π.
- Τα προβλήματα του Γ.Π. στα οποία όλες ανεξαίρετα οι μεταβλητές απόφασης περιορίζονται να πάρουν ακέραιες τιμές εμπίπτουν στο πεδίο του **ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού**.
- Εκείνα, τα προβλήματα του Γ.Π. στα οποία ο περιορισμός ακεραιότητας δεν ισχύει για όλες τις μεταβλητές, αλλά για μερικές από αυτές, ονομάζονται προβλήματα **μικτού γραμμικού προγραμματισμού**.

1. Ακέραιος Προγραμματισμός - Εισαγωγή

- Το μαθηματικό μοντέλο του Ακέραιου Προγραμματισμού είναι ίδιο με εκείνο του Γραμμικού Προγραμματισμού **με τον επιπλέον περιορισμό των ακέραιων μεταβλητών**. Επομένως, η γενική διατύπωση ενός προβλήματος Ακέραιου Προγραμματισμού γίνεται:

  Μαθηματική Διατύπωση:

  $\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

  υ.π.

  $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leq b_1$

  $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \leq b_2$

  .

  .

  .

  $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n \leq b_k$

  $x_1, x_2, \ldots . x_n$ ακέραιοι (μη αρνητικοί)

- Ιδιαίτερη σημασία για τον Ακέραιο Προγραμματισμό έχουν οι περιπτώσεις, όπου οι μεταβλητές μπορούν να λαμβάνουν μόνο δύο πιθανές τιμές, «Ναι» ή «Όχι». Αυτή η κατηγορία εφαρμογών ονομάζονται **δυαδικά προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού** και οι μεταβλητές ονομάζονται **δυαδικές μεταβλητές (binary variables)** ή «0-1» μεταβλητές.

1. Ακέραιος Προγραμματισμός - Εισαγωγή

Επίλυση Προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού (1)

- Θα μπορούσε μια απλή μέθοδος επίτευξης «ακέραιης λύσης» σε ένα πρόβλημα ακέραιου Γ.Π. να είναι **αρχικά να επιλυθεί με τη συνηθισμένη μέθοδο simplex** για συνεχή Γ.Π. και **εν συνεχεία, να στρογγυλευθούν στον πλησιέστερο ακέραιο** οι τιμές των μεταβλητών οι οποίες παίρνουν ρητές τιμές (μη ακέραιες).

- Όμως, μία τέτοια διαδικασία είναι πολύ επικίνδυνη, όσο απλή κι αν φαίνεται, γιατί μπορεί να καταλήξει σε:
  - **Λύσεις μη πραγματοποιήσιμες** (μη εφικτές), που παραβιάζουν δηλαδή τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.
  - **Υποβέλτιστες λύσεις**, καθώς δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι η στρογγυλοποιημένη λύση είναι και η πραγματικά βέλτιστη ακέραιη λύση.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα που εμπίπτουν στις δύο παραπάνω περιπτώσεις.

1. Ακέραιος Προγραμματισμός - Εισαγωγή

Επίλυση Προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού (2)

Λύσεις μη εφικτές

Max $z = x_2$

υπό

$-x_1 + x_2 \le \frac{1}{2}$, $x_1 + x_2 \le 3\frac{1}{2}$

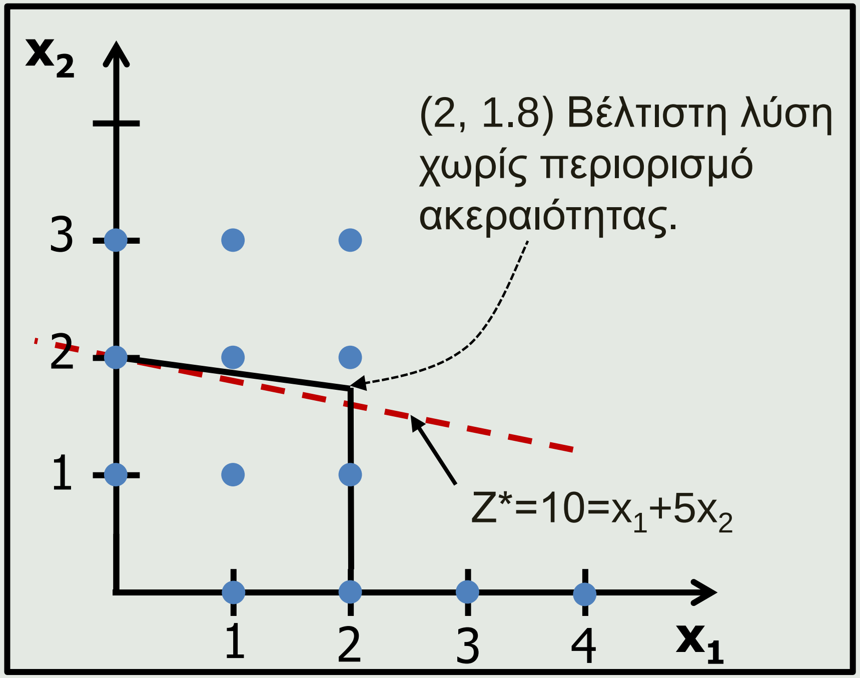
Είναι αδύνατο να στρογγυλοποιήσουμε την μη ακέραια μεταβλητή x_1 σε 1 ή 2 και να διατηρήσουμε την εφικτότητα. **Η εφικτότητα μπορεί να διατηρηθεί μόνο αλλάζοντας την τιμή του x_2.**

Υποβέλτιστες λύσεις

Max $z = x_1+5\,x_2$

υπό

$x_1 + 10\,x_2 \le 20$, $x_1 \le 2$



Η μεταβλητή x_2=1.8 θα στρογγυλοποιούταν προς την εφικτή περιοχή (x_2=1) δίνοντας ακέραια λύση $(x_1,x_2)=(2,1)$ με Z=7, μικρότερο από το **πραγματικά βέλτιστο $(x_1,x_2)=(0,2)$ με $Z^*=10$**.

1. Ακέραιος Προγραμματισμός - Εισαγωγή

Επίλυση Προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού (3)

- Συμπεραίνουμε λοιπόν πως δεν υπάρχει για όλα τα προβλήματα της **επιχειρησιακής έρευνας ένας αλγόριθμος που να εγγυάται τη βέλτιστη λύση**. Υπάρχουν διαφορετικοί αλγόριθμοι για κάθε κατηγορία προβλημάτων που οδηγούν στη βέλτιστη λύση, κάτι το οποίο ισχύει και στην περίπτωση του Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.
- Σε περιπτώσεις που οι μεταβλητές αποφάσεις ενός Γ.Π. είναι φραγμένες, παίρνουν δηλαδή περιορισμένο αριθμό ακέραιων τιμών, οι ιδεώδεις μέθοδοι επίλυσης ακέραιων Γ.Π. είναι οι **μέθοδοι τύπου κλάδου και φράγματος (branch and bound methods)**, οι οποίες στηρίζονται σε μια έμμεση απαρίθμηση των δυνατών ακέραιων λύσεων που επιδέχεται το πρόβλημα. Μια τέτοια γενική μέθοδος για καθαρά ακέραια Γ.Π. παρουσιάζεται στην ενότητα 4.
- Ο βασικός B&B αλγόριθμος εισήχθη το 1960 από τους **Ailsa H. Land και Alison G. Doig**[1] για το γενικό πρόβλημα μεικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού και επεκτάθηκε το 1965 από τον **Egon Balas**[2] για τα δυαδικά πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.
- Φυσικά, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι ακέραιου Γ.Π., για παράδειγμα οι δυο μέθοδοι των τεμνόντων επιπέδων του **Gomory** (cutting plane methods).

---

[1] Land, A., H. and Doig, A., G. (1960), An automatic method of solving discrete programming problems, Econometrica, 28, 497-520.

[2] Balas, E., (1965), An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables, Operations research, 13, 517-549.

Ενότητα 2

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

2. Εφαρμογές Ακέραιου Προγραμματισμού

Παράδειγμα 1

Κατά την εβδομαδιαία αγορά στο super market διαθέτουμε το ποσό των 40 ευρώ. Μπορούμε να μεταφέρουμε μέχρι 20 κιλά. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται τα προϊόντα που έχουμε ανάγκη, το κόστος τους, το βάρος και ο βαθμός που μας είναι αναγκαία. Ποια προϊόντα πρέπει να αγοράσουμε ώστε να μεγιστοποιηθεί η κάλυψη των αναγκών μας.

Προϊόντα	Κόστος C_i	Βάρος W_i	Βαθμός Ανάγκης v_i
Π1	9	7	2
Π2	6	2	1
Π2	7	5	3
Π4	8	4	2
Π5	12	3	5
Π6	6	4	2
Π7	9	6	3
Π8	11	8	4
Π9	8	5	2

Μαθηματική Διατύπωση

$$Xi=\begin{cases} 1 & \text{αν αγοραστεί το προϊόν} \\ 0 & \text{αν δεν αφγοραστεί το προϊόν} \end{cases}$$

Max $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_9x_9$

υ.π.

$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_9x_9 \leq 40$

$w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_9x_9 \leq 20$

2. Εφαρμογές Ακέραιου Προγραμματισμού

Παράδειγμα 2

Ένας επενδυτής έχει διαθέσιμες εναλλακτικές επενδύσεις που περιλαμβάνονται στον πίνακα και διαθέτει το κεφάλαιο των 600.000,00 €. Κάθε επένδυση έχει ένα συγκεκριμένο κόστος και ένα αναμενόμενο ποσοστό απόδοση. Να προσδιορισθεί το χαρτοφυλάκιο των επενδύσεων, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η αναμενόμενη απόδοση.

Επένδυση	Κόστος σε χιλ. € - Ci	Απόδοση (%) - Vi
Ε1	140	5
Ε2	240	6
Ε3	130	4,5
Ε4	220	6
Ε5	350	2
Ε6	80	8
Ε7	180	5

Μαθηματική Διατύπωση

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν γίνει η επένδυση} \\ 0 & \text{αν δεν γίνει η επένδυση} \end{cases}$$

Max $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_7x_7$

υ.π.

$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_7x_7 \leq 600$

Ενότητα 3

ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ ΚΑΙ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗΣ

3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 1	Επιλύεται το πρόβλημα του ακέραιου Γ.Π. με την γνωστή μέθοδο Simplex χωρίς περιορισμούς ακεραιότητας των μεταβλητών απόφασης (Έστω ότι προκύπτει η λύση (x'_1, x'_2, …, x'_n) και Z η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης την οποία θέτουμε ως **τρέχον άνω φράγμα ΑΦ**). Αν η λύση ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας τότε γίνεται δεκτή και σταματά ο αλγόριθμός. Αν όχι συνεχίζουμε στο επόμενο.
Βήμα 2	Εάν η λύση δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς ακεραιότητας για τις μεταβλητές j για $x_j=[x_j]$, τότε καθορίζεται ενδεχομένως μια πρώτη εφικτή ακέραιη λύση (συνήθως μετά από στρογγυλεύσεις), της οποία η τιμή Z αποτελεί το αρχικό **κάτω φράγμα ΚΦ**.
Βήμα 3	Το σύνολο των εφικτών μη ακέραιων λύσεων διακλαδίζεται σε δύο υποσύνολα (υποπροβλήματα), εισάγοντας αλληλο-αποκλειόμενους περιορισμούς οι οποίοι απαιτούνται για να ικανοποιηθεί ο περιορισμός ακεραιότητας μίας βασικής μεταβλητής. Για μια από τις μη ακέραιες μεταβλητές (x_j) λύνουμε δύο Γ.Π. με την μέθοδο simplex εισάγοντας **επιπλέον τις συνθήκες $x_j \leq [x'_j]$ και $x_j \geq [x'_j] +1$** αντίστοιχα δημιουργώντας διακλαδώσεις, όπου $[x'_j]$ είναι το ακέραιο μέρος του ρητού αριθμού x'_j.
Βήμα 4	**Άνω φράγμα:** ορίζεται για κάθε υποσύνολο λύσεων (διακλάδωση) και ισούται με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της βέλτιστης μη ακέραιης λύσης. **Κάτω φράγμα:** ορίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της καλύτερης μέχρι τώρα ακέραιης λύσης. Εκείνα τα υποσύνολα των οποίων τα άνω φράγματα είναι κατώτερα από το ισχύον κάτω φράγμα δεν εξετάζονται για περαιτέρω διακλάδωση.
Βήμα 5	Εάν υπάρχει **πραγματοποιήσιμη ακέραιη λύση με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ίση ή μεγαλύτερη του άνω φράγματος κάθε υποσυνόλου**, η λύση αυτή αποτελεί την βέλτιστη λύση του ακέραιου Γ.Π. Εάν όχι, επιλέγεται ένα υποσύνολο με το καλύτερο άνω φράγμα για περαιτέρω διακλάδωση και μεταβαίνουμε στο βήμα 3.

3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Θα παρουσιαστεί η ιδέα του αλγορίθμου στηριζόμενοι στο παρακάτω πρόβλημα:

Max $z = 40x + 30y$

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81.75$

$x + 2y \leq 36.25$

x, y ακέραιοι (μη αρνητικοί)

Βήμα 1: Λύνουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο SIMPLEX χωρίς τους περιορισμούς ακεραιότητας. Η λύση που προκύπτει είναι:

x=22.75 & y = 6.75 με Z=1112.50 (Άνω φράγμα -ΑΦ)

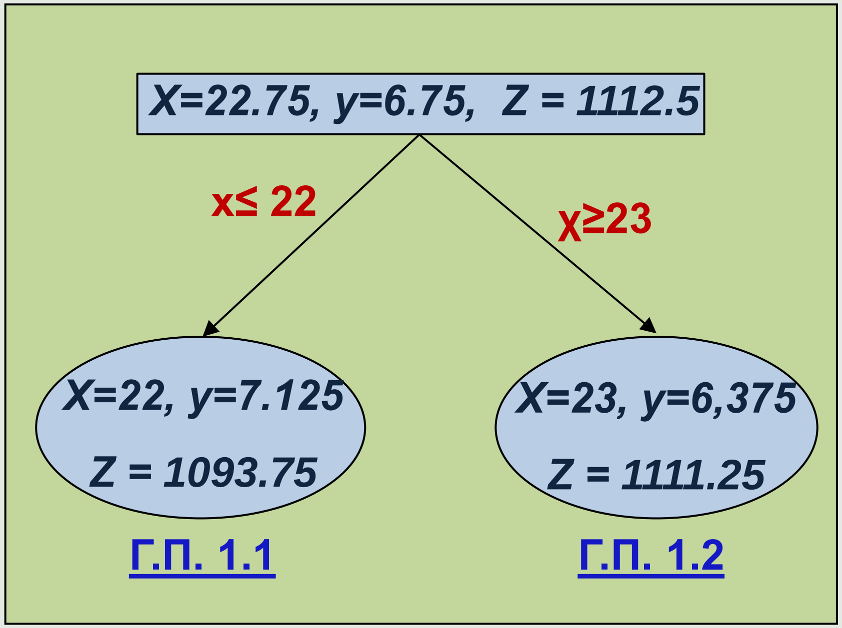
Δεν έχουμε ακέραια λύση και άρα προχωράμε στο βήμα 2.

Βήμα 2: Το κάτω φράγμα του z υπολογίζεται αν στρογγυλεύσουμε προς τα κάτω τις μεταβλητές απόφασης, δηλαδή:

Για x = 22, y = 6, **Z = 1060 (Κάτω Φράγμα – ΚΦ)**

3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 3: Η διακλάδωση γίνεται μετά από αυθαίρετη επιλογή της βασικής μεταβλητής x, η οποία δεν τηρεί τον περιορισμό ακεραιότητας. Διακλαδίζεται το σύνολο των εφικτών λύσεων στα παρακάτω δύο Γ.Π.



Υπο-πρόβλημα 1.1

Max $z = 40x + 30y$

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \leq 22$

Λύση

(X,Y) = (22, 7.125)

Z = 1093.75

Υπο-πρόβλημα 1.2

Max $z = 40x + 30y$

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23$

Λύση

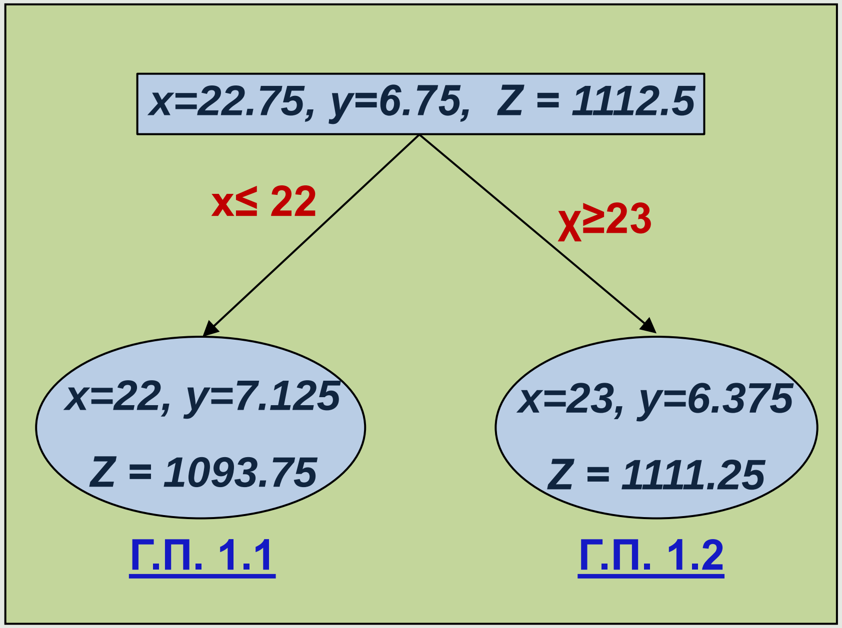
(X,Y) = (23, 6.375)

Z = 1111.25

3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 4 -5: Δεν υπάρχει ακέραια λύση με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίσης ή μεγαλύτερης του άνω φράγματος όλων των υποσυνόλων

Συνεχίζουμε τη Διερεύνηση επιλέγοντας το βρόγχο με το μεγαλύτερο κέρδος.



3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 3: Συνεχίζουμε με τον κλάδο x ≥ 23. Επιλέγουμε την μεταβλητή y για διακλάδωση.

Υπο-πρόβλημα 1.2.1

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23$

$y \leq 6$

Λύση

(X,Y) = (23.25, 6)

Z = 1110

Υπο-πρόβλημα 1.2.2

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

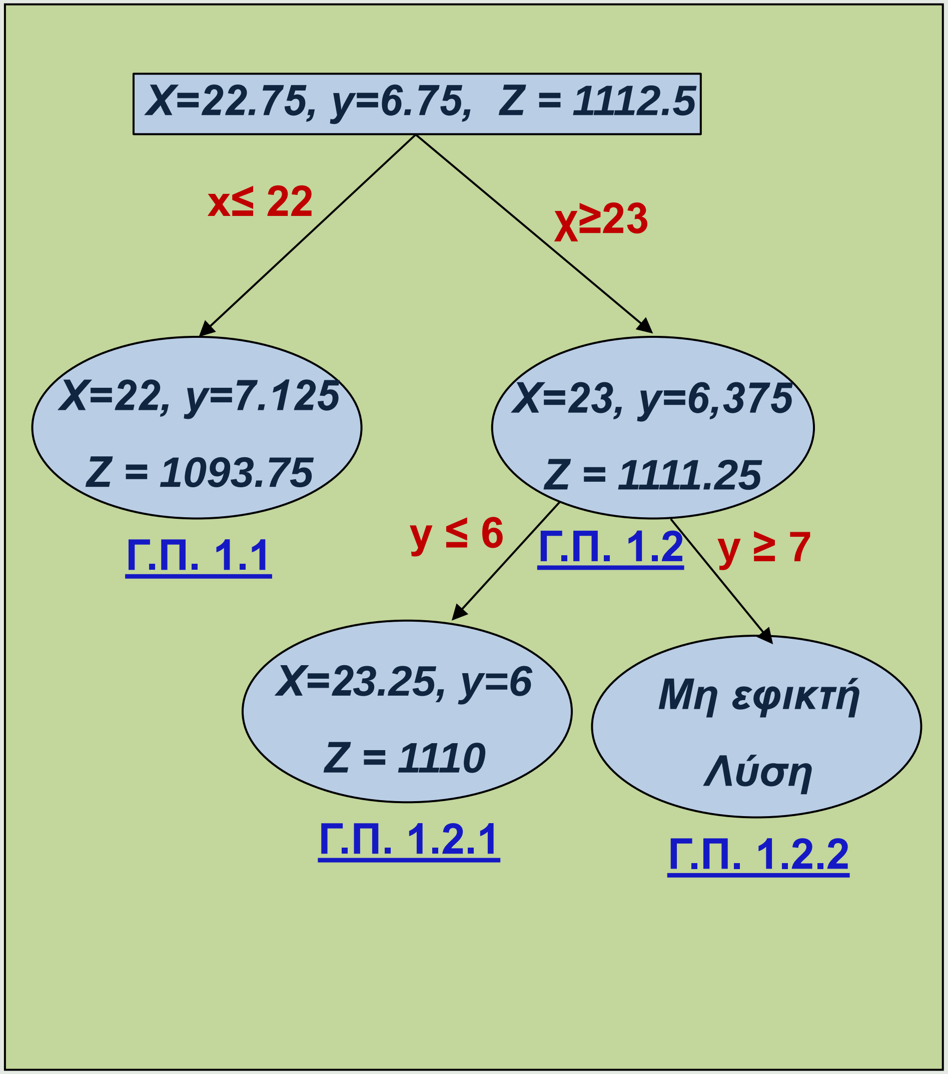
$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23$

$y \geq 7$

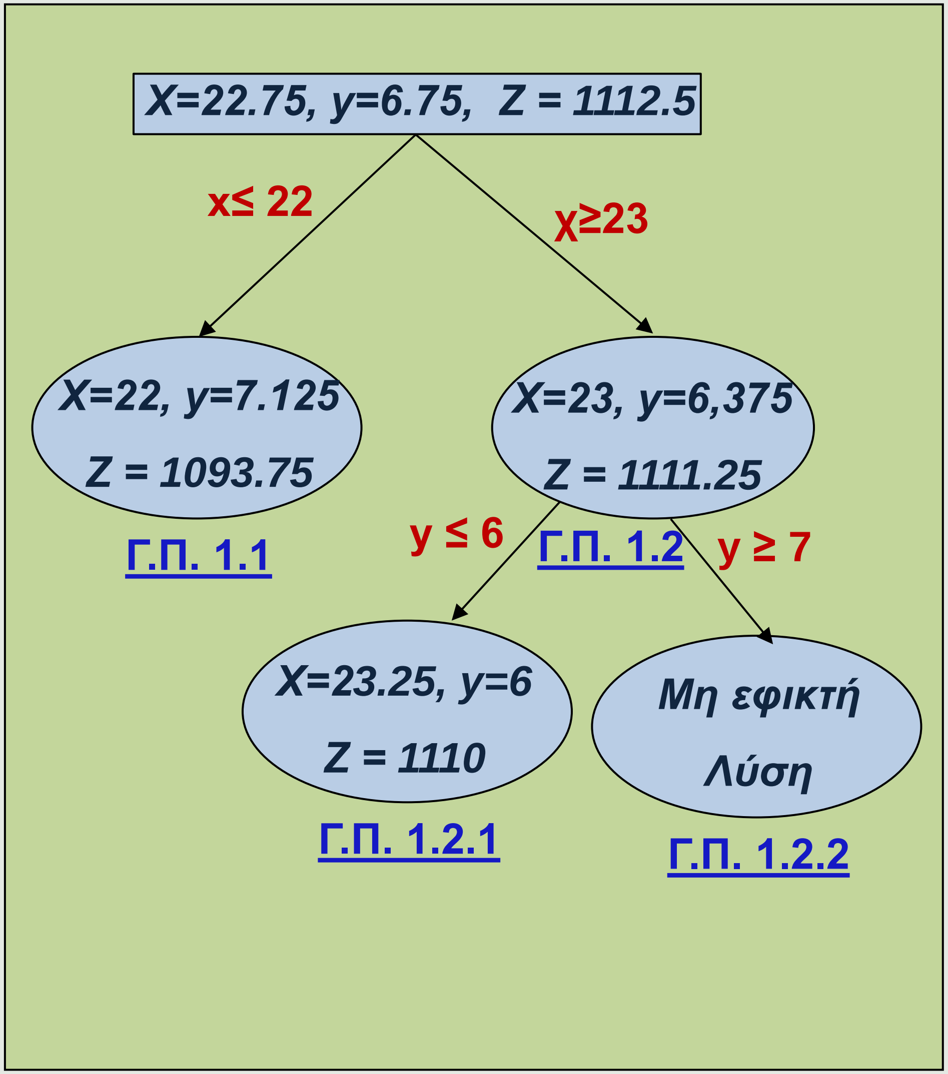
Μη εφικτή Λύση



3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 4 - 5: Δεν υπάρχει ακέραια λύση με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίσης ή μεγαλύτερης του άνω φράγματος όλων των υποσυνόλων.

Συνεχίζουμε τη Διερεύνηση επιλέγοντας το βρόγχο με το μεγαλύτερο κέρδος. Δηλαδή την διακλάδωση x≥23 & y≤6.



3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 3: Συνεχίζουμε με περαιτέρω διακλάδωση της μεταβλητής x.

Υπο-πρόβλημα 1.2.1.1

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81,75$

$x + 2y \leq 36,25$

$x \geq 23$

$y \leq 6$

$x \leq 23$

Λύση

(X,Y) = (23, 6)

Z = 1100

Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81,75$

$x + 2y \leq 36,25$

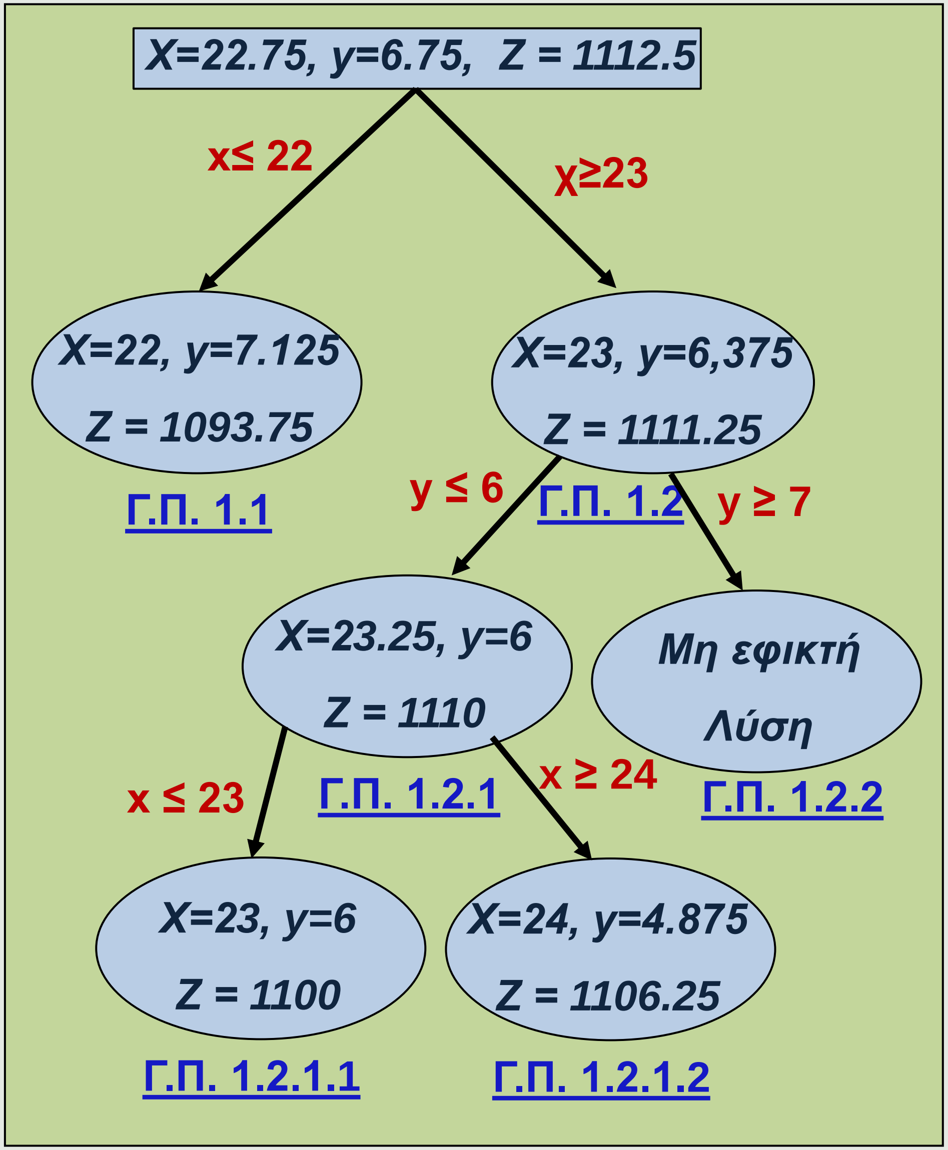
$x \geq 23$

$y \leq 6$, $x \geq 24$

Λύση

(X,Y) = (24, 4.875)

Z = 1106.25



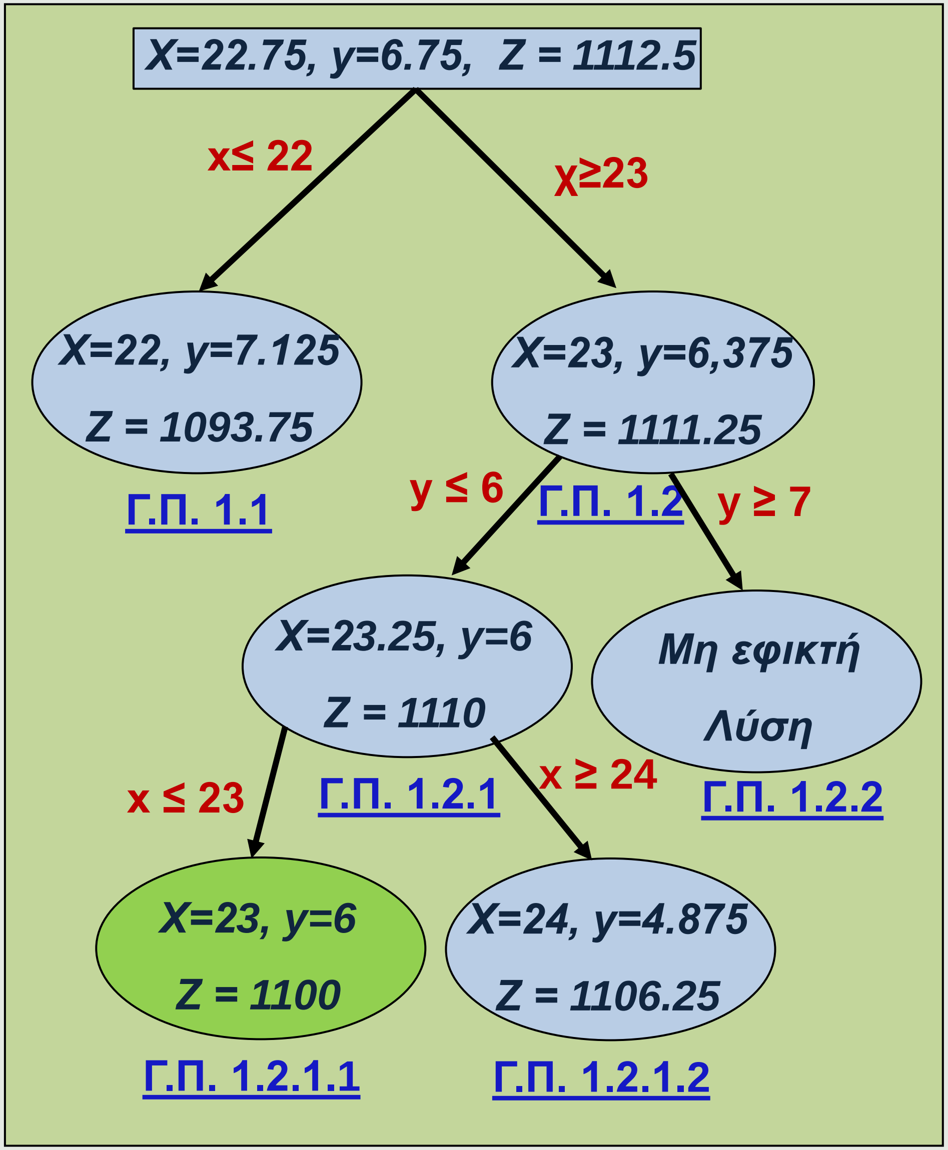
3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 4: Υπάρχει ακέραια λύση για τον **κλάδο 1.2.1.1.** (Χ=23, Υ=6, Ζ=1100). Επομένως ορίζεται νέο κάτω φράγμα του Ζ (ΚΦ=1100).

Ο **κλάδος 1.1** έχει ΑΦ=1093.75 κατώτερο από το ισχύον ΚΦ. Άρα δεν εξετάζεται για περαιτέρω διακλάδωση.

Όμως, η ακέραια λύση δεν δίνει τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση ίση ή μεγαλύτερη του άνω φράγματος όλων των υποσυνόλων.

Συγκεκριμένα, το **υποσύνολο 1.2.1.2** έχει ΑΦ = 1106.25. Άρα αυτός ο κλάδος χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.



3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 3: Συνεχίζουμε με περαιτέρω διακλάδωση της μεταβλητής x.

<u>Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2.1</u>

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \le 59$

$3x + 2y \le 81{,}75$

$x + 2y \le 36{,}25$

$x \ge 23,\ x \ge 24$

$y \le 6\ ,\ y \le 4$

Λύση

(X,Y) = (24.6, 4)

Z = 1103.3

<u>Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2.2</u>

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \le 59$

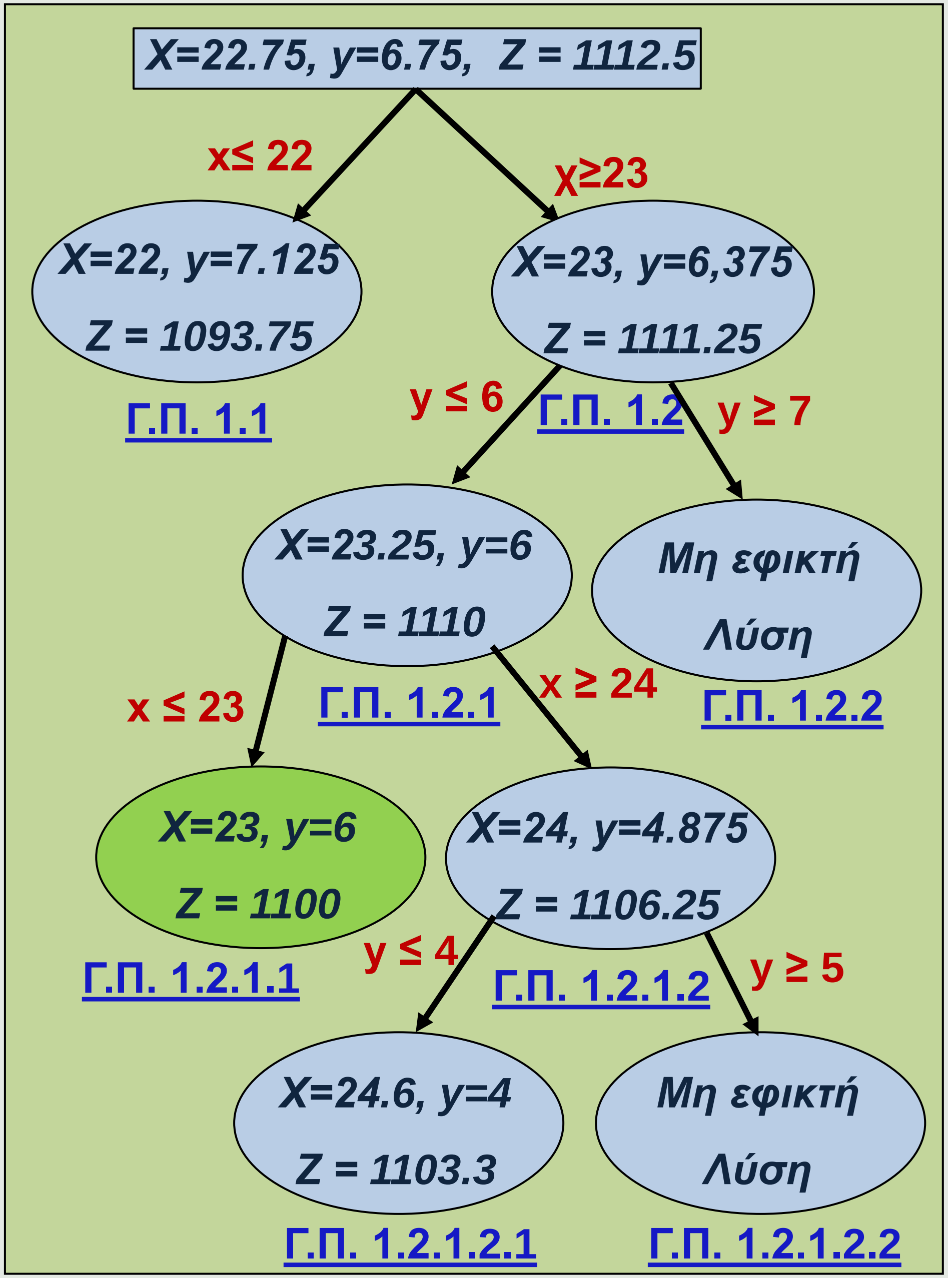
$3x + 2y \le 81{,}75$

$x + 2y \le 36{,}25$

$x \ge 23,\ x \ge 24$

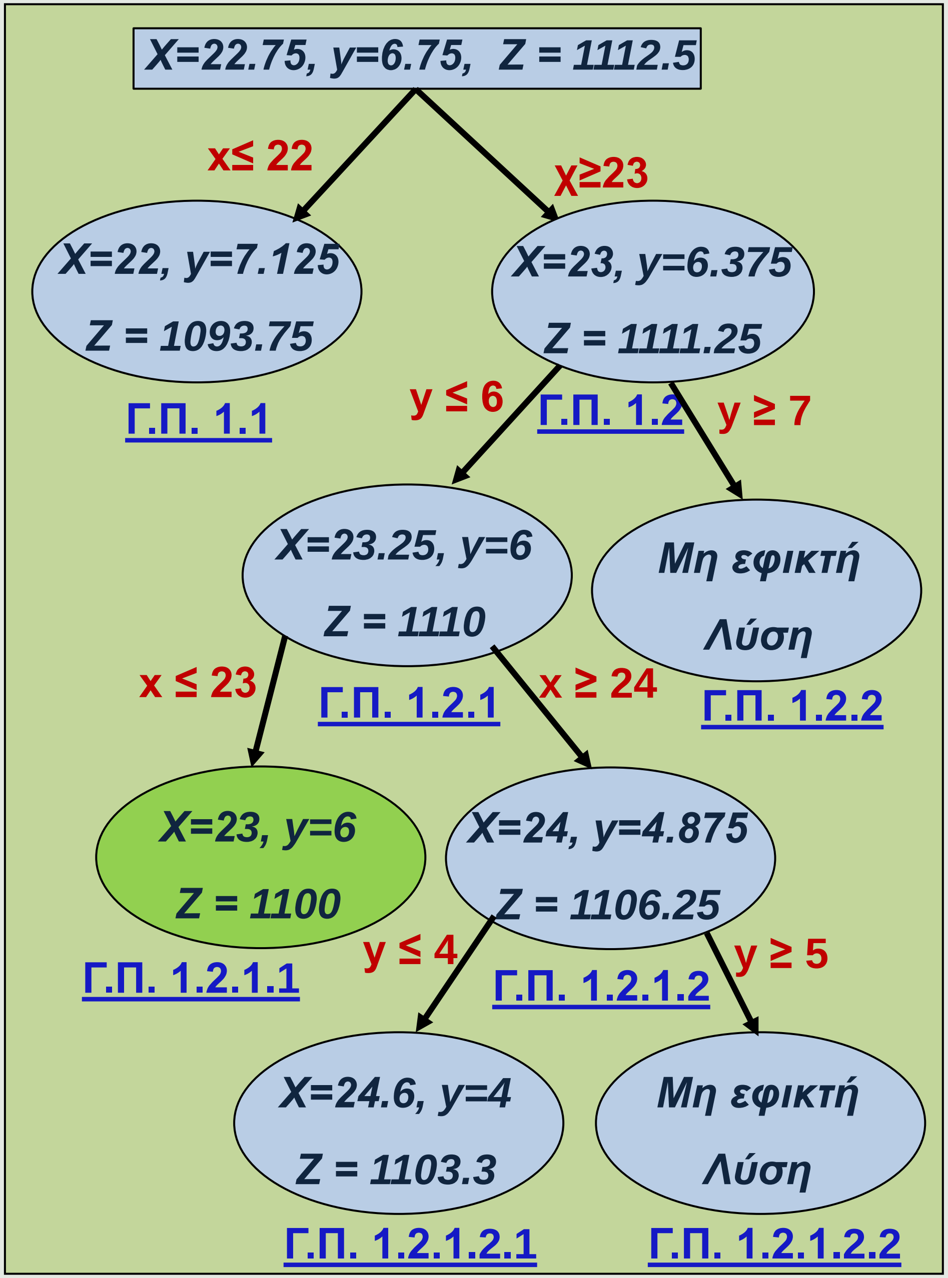
$y \le 6,\ y \ge 5$

Μη εφικτή Λύση



3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 4: Ο κλάδος 1.2.1.2.1 έχει ΑΦ=1103.3 μεγαλύτερο από το ΚΦ=1100. Άρα αυτός ο κλάδος χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.



3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 3: Συνεχίζουμε με περαιτέρω διακλάδωση της μεταβλητής x.

Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2.1.1

Max $z = 40x + 30y$

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23,\ x \geq 24,\ x \leq 24$

$y \leq 6\ ,\ y \leq 4$

Λύση

(X,Y) = (24, 4)

Z = 1080

Ο κλάδος 1.2.1.2.1.1 οδήγησε σε ακέραια λύση, η οποία όμως είναι μικρότερη από την ακέραια λύση του κλάδου 1.2.1.1 .

Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2.1.2

Max $z = 40x + 30y$

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23,\ x \geq 24,\ x \geq 25$

$y \leq 6\ ,\ y \leq 4$

Λύση

(X,Y) = (25, 3.375)

Z = 1101.25

Ο κλάδος 1.2.1.2.1.2 έχει ΑΦ = 1101.25 και χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Βήμα 3: Συνεχίζουμε με περαιτέρω διακλάδωση της μεταβλητής x.

Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2.1.2.1

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23,\ x \geq 24,\ x \geq 25$

$y \leq 6\ ,\ y \leq 4,\ y \leq 3$

Λύση

(X,Y) = (25.25, 3)

Z = 1100

Ο κλάδος 1.2.1.2.1.2 .1 έχει ΑΦ = 1100, το οποίο ισούται με το ΚΦ = 1100. Άρα ο συγκεκριμένος κλάδος δεν χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

Υπο-πρόβλημα 1.2.1.2.1.2.2

Max z = 40x + 30y

υ.π.

$2x + 2y \leq 59$

$3x + 2y \leq 81{,}75$

$x + 2y \leq 36{,}25$

$x \geq 23,\ x \geq 24,\ x \geq 25$

$y \leq 6\ ,\ y \leq 4,\ y \geq 4$

Μη εφικτή Λύση

3. Μέθοδος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης

Χρήσιμες Παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού πραγματοποιείται στο **Solver του Excel**, όταν προσθέσουμε στην περιοχή των περιορισμών του περιορισμούς ακεραιτότητας (int, bin).

- Ο αλγόριθμος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης λειτουργεί για μικρό αριθμό μεταβλητών (μέχρι 50 ακέραιες μεταβλητές).

- Στα προβλήματα ελαχιστοποίησης ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τη διαφορά ότι εξετάζουμε τα κατώτερα φράγματα.

ΤΕΛΟΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ