



Κατασκευές Οπλισμένου Σκυροδέματος

- Υποστυλώματα – διαγράμματα αλληλεπίδρασης

Δρ. Σπυρίδων Διαμαντόπουλος
Νοέμβριος 2024

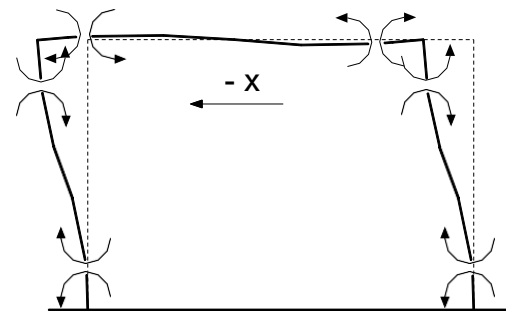
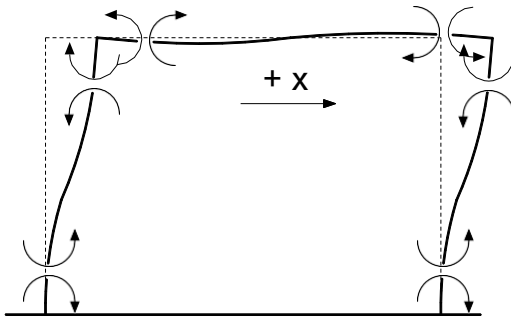
Εισαγωγή - υποστυλώματα

- Μέχρι τώρα μελετήθηκαν διατομές οπλισμένου σκυροδέματος που καταπονούνται από ροπή κάμψης με ή χωρίς αξονική δύναμη. Οι διατομές αυτές ανήκουν συνήθως σε πλάκες και δοκούς.
- Από τα στοιχεία αυτά, οι πλάκες και οι δοκοί οπλίζονται με απλό οπλισμό, εκτός αν απαιτηθεί οπότε τοποθετείται και θλιβόμενος οπλισμός ο οποίος υπολογίζεται από Πίνακα (αντίστοιχα για πλακοδοκούς).
- Τα υποστυλώματα είναι μέλη που στη συνήθη λειτουργία τους καταπονούνται κυρίως από θλιπτική αξονική δύναμη που μπορεί να συνοδεύεται και από (μικρές) καμπτικές ροπές. Ωστόσο, στη διάρκεια του σεισμού, παραμορφώνονται με εναλλασσόμενη φορά και ανθίστανται σε αυτές τις παραμορφώσεις αναπτύσσοντας καμπτική αντίσταση με φορά που σχετίζεται με την εκάστοτε διεύθυνση της παραμόρφωσης.

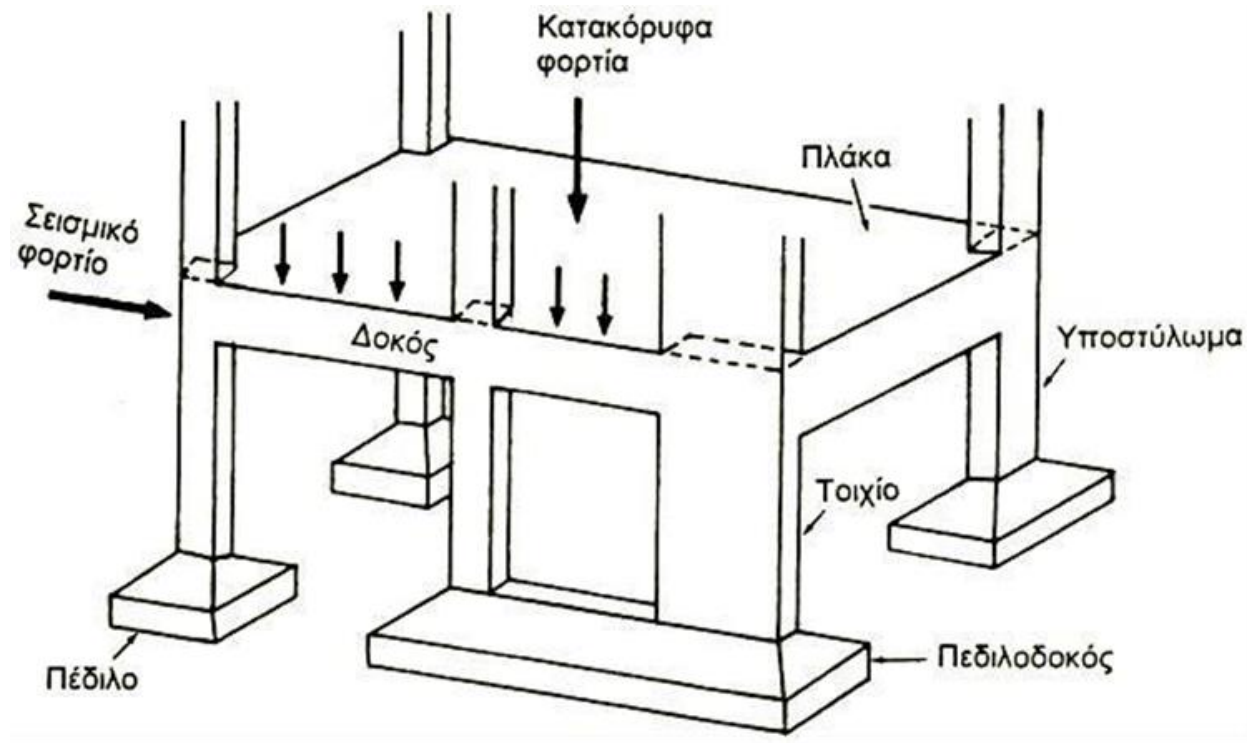
Εισαγωγή - υποστυλώματα

Η απαίτηση για ανάπτυξη καμπτικής αντίστασης εναλλασσόμενης φοράς, παράγει την απαίτηση όπλισης και των δύο απέναντι παρειών με ίδιο (συμμετρικό οπλισμό $A_{s1} = A_{s2}$), καθώς και οι δύο παρειές θλίβονται και εφελκύνονται εναλλασσόμενα.

Από τα παραπάνω προκύπτει η ανάγκη σύνταξης νέου βοηθητικού εργαλείου όπλισης διατομών, που καταπονούνται από **αξονική δύναμη** και **καμπτική ροπή** και οπλίζονται με συνολικό οπλισμό $A_{s,tot}$, ο οποίος διανέμεται συμμετρικά στις δύο παρειές, και ισχύει $A_{s1} = A_{s2} = A_{s,tot}/2$



Εισαγωγή - υποστυλώματα



- Υποστυλώματα και τοιχώματα είναι τα κατακόρυφα στοιχεία κατασκευών από Ο/Σ
- Βλάβες σε αυτά μπορούν να οδηγήσουν σε μερική ή ολική κατάρρευση

Διατομές υποστυλωμάτων



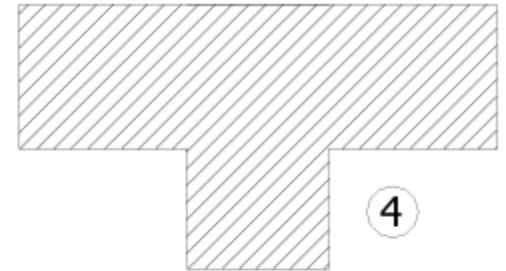
1



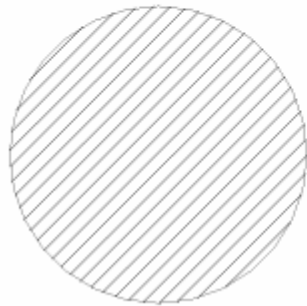
2



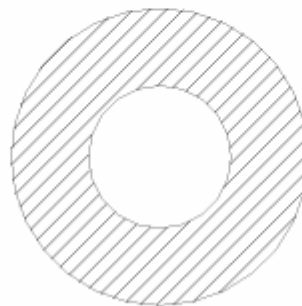
3



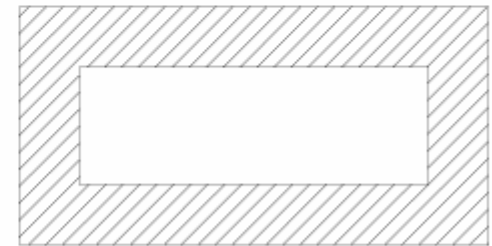
4



5



6



7

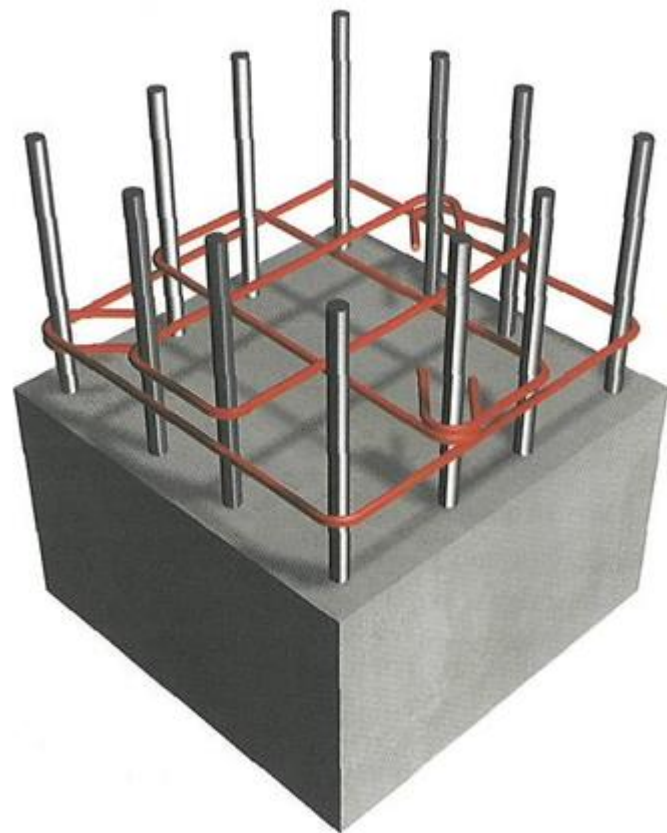
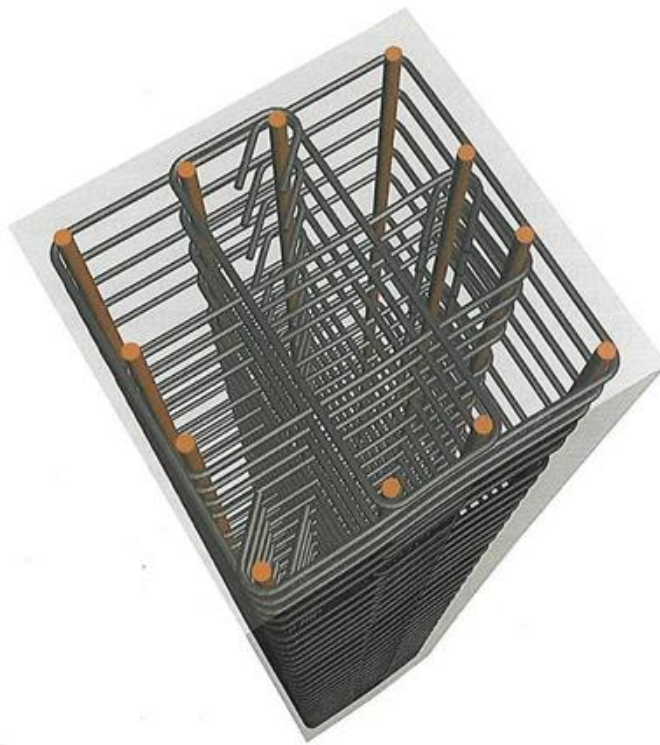
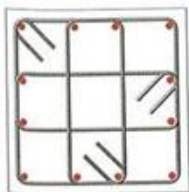
Διατομές υποστυλωμάτων



Τυπική όπλιση υποστυλωμάτων

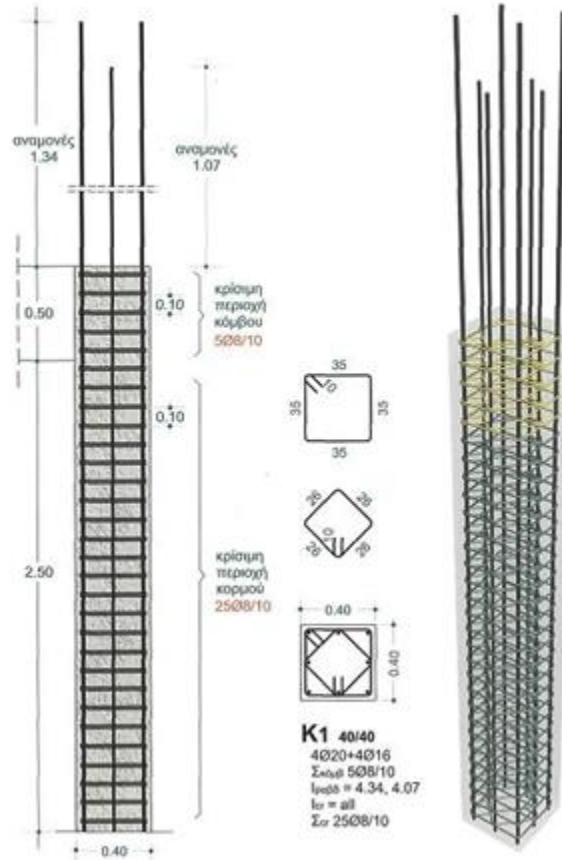


Τυπική όπλιση υποστυλωμάτων

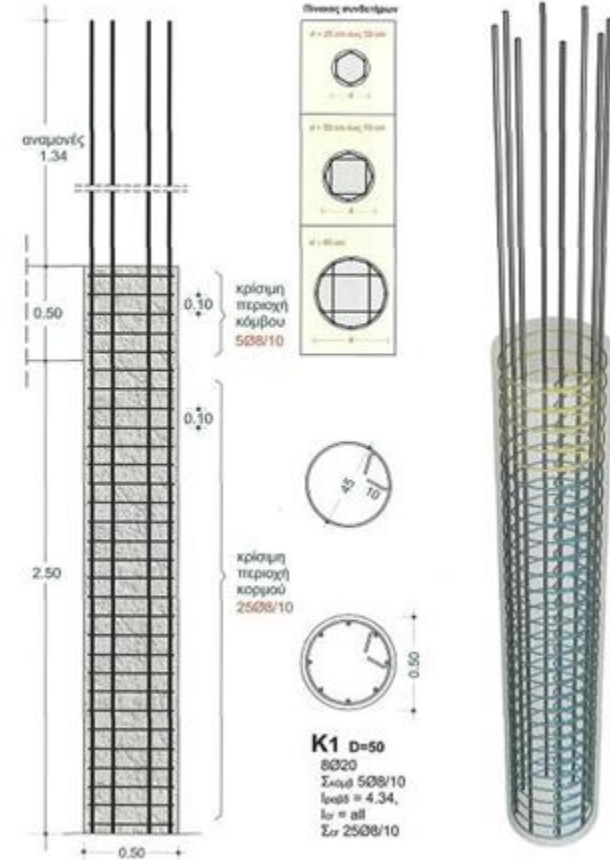


Τυπική όπλιση υποστυλωμάτων

Υποστύλωμα διατομής 40x40cm



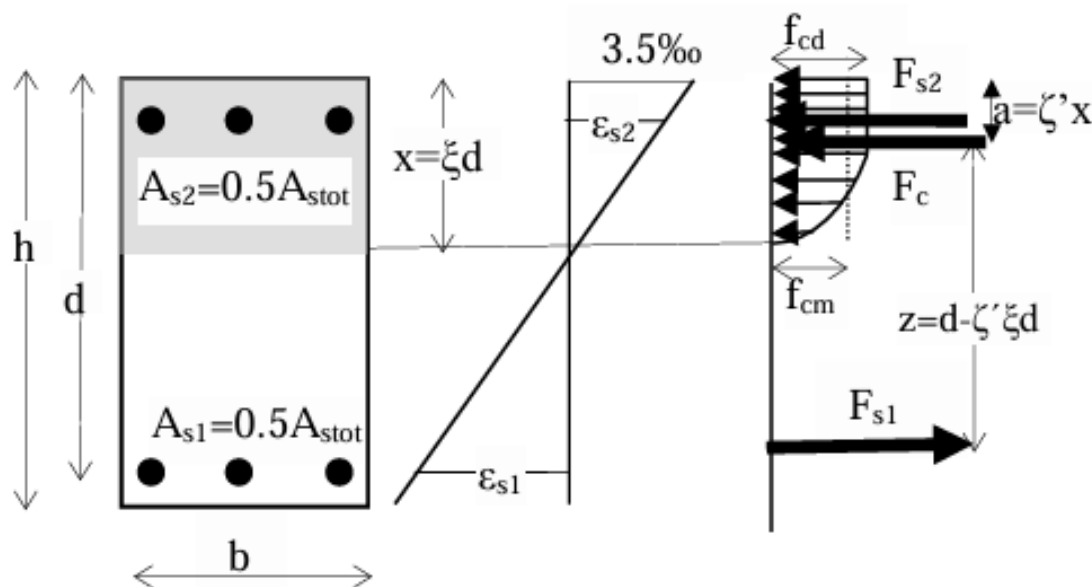
Υποστύλωμα κυκλικής διατομής D=50cm



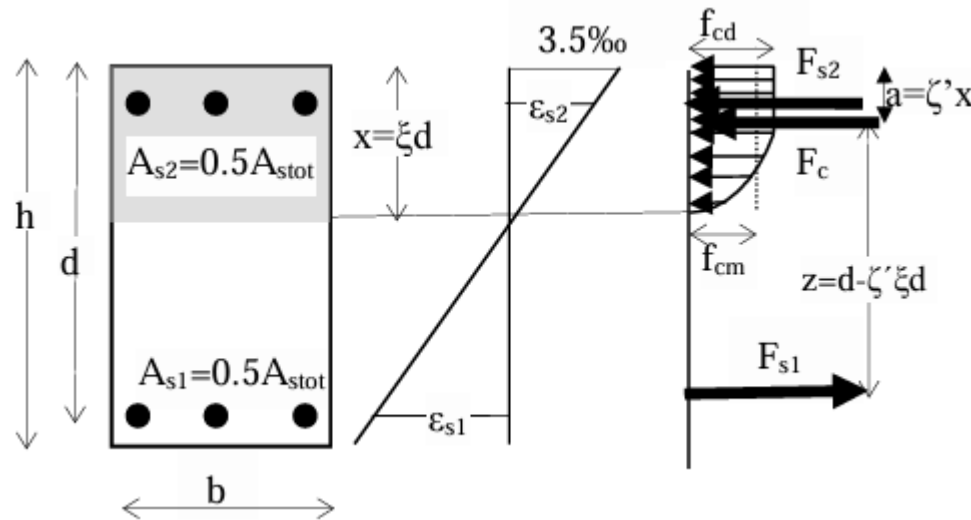
Διαγράμματα αλληλεπίδρασης

Αυτό το βοηθητικό εργαλείο έχει μορφή διαγραμμάτων που συνδέει την αξονική δύναμη N_{Ed} (ή την ανηγμένη αξονική $v_{Ed} = N_{Ed}/(b h f_{cd})$, την καμπτική ροπή M_{Ed} (ή την ανηγμένη αξονική $\mu_{Ed} = M_{Ed}/(b h^2 f_{cd})$ και το μηχανικό ποσοστό οπλισμού της διατομής $\omega_{tot} = A_{s,tot} f_{yd}/(b h f_{cd})$.

Τα διαγράμματα αυτά ονομάζονται *διαγράμματα αλληλεπίδρασης* (υπονοείται: η αλληλεπίδραση της αξονικής δύναμης με την ροπή κάμψης).



Εξισώσεις ισοδυναμίας



Γράφουμε τις εξισώσεις ισοδυναμίας:

$$N_{Ed} = F_c + F_{s1} + F_{s2} = -\alpha f_{cd} x b + A_{s1} \sigma_{s1} - A_{s2} \sigma_{s2}$$

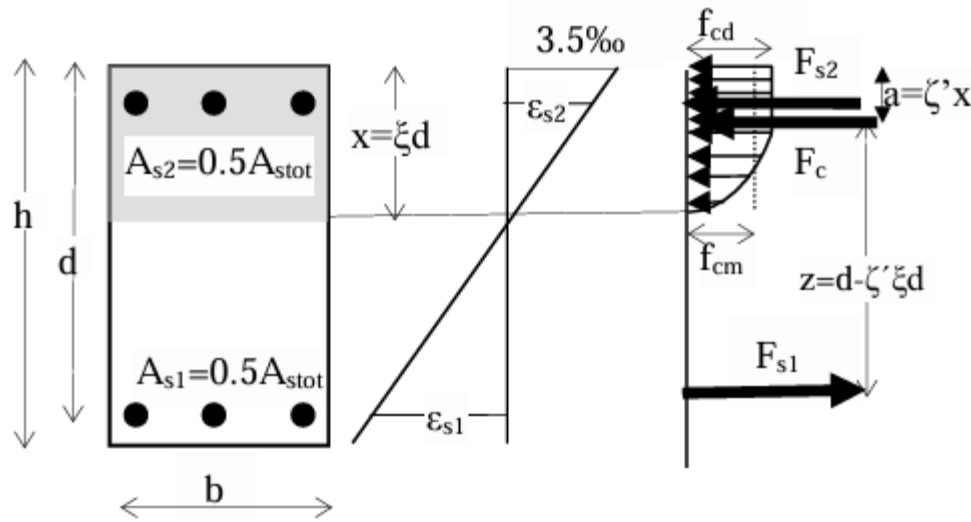
$$M_{Ed} = F_c (0.5h - \zeta' x) + F_{s1} (0.5h - d_1) + F_{s2} (0.5h - d_2) = \alpha f_{cd} x b (0.5h - \zeta' x) + A_{s1} \sigma_{s1} (0.5h - d_1) + A_{s2} \sigma_{s2} (0.5h - d_2)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν υπό αδιάστατη μορφή (διαιρώντας με $\mathbf{bh}f_{cd}$ και \mathbf{bh}^2f_{cd} αντιστοίχως) ως εξής:

$$\nu = -\alpha \xi (d/h) + \omega_1 \sigma_{s1} / f_{yd} - \omega_2 \sigma_{s2} / f_{yd}$$

$$\mu_d = \alpha \xi (d/h) [0.5 - \zeta' \xi (d/h)] + \omega_1 (0.5 - d_1/h) \sigma_{s1} / f_{yd} + \omega_2 (0.5 - d_1/h) \sigma_{s2} / f_{yd}$$

Εξισώσεις ισοδυναμίας



Στις παραπάνω δύο σχέσεις είναι:

- **α** : συντελεστής που δίνει την μέση τάση του διαγράμματος των θλιπτικών τάσεων του σκυροδέματος. Εξαρτάται από την παραμόρφωση ϵ_{c2} . Για την συνήθη τιμή του $\epsilon_{c2} = -0.0035$ είναι $\alpha = 0.81$ (συγκρίνατε με την τιμή 0.8 που προκύπτει από το προσεγγιστικό ορθογωνικό διάγραμμα). Για άλλες τιμές του ϵ_{c2} λαμβάνεται από τον διπλανό πίνακα.

Πίνακας II: Τιμές των συντελεστών α και ζ'

ϵ_{c2}	α	ζ'
0.0	0.000	0.333
0.1	0.049	0.335
0.2	0.097	0.336
0.3	0.143	0.338
0.4	0.187	0.339
0.5	0.229	0.341
0.6	0.270	0.343
0.7	0.309	0.344
0.8	0.347	0.346
0.9	0.383	0.348
1.0	0.417	0.350
1.1	0.449	0.352
1.2	0.480	0.354
1.3	0.509	0.356
1.4	0.537	0.359
1.5	0.563	0.361
1.6	0.587	0.364
1.7	0.609	0.366
1.8	0.630	0.369
1.9	0.649	0.372
2.0	0.667	0.375
2.1	0.683	0.378
2.2	0.697	0.381
2.3	0.710	0.385
2.4	0.722	0.388
2.5	0.733	0.391
2.6	0.744	0.394
2.7	0.753	0.397
2.8	0.762	0.400
2.9	0.770	0.402
3.0	0.778	0.405
3.1	0.785	0.407
3.2	0.792	0.410
3.3	0.798	0.412
3.4	0.804	0.414
3.5	0.810	0.416

Εξισώσεις ισοδυναμίας

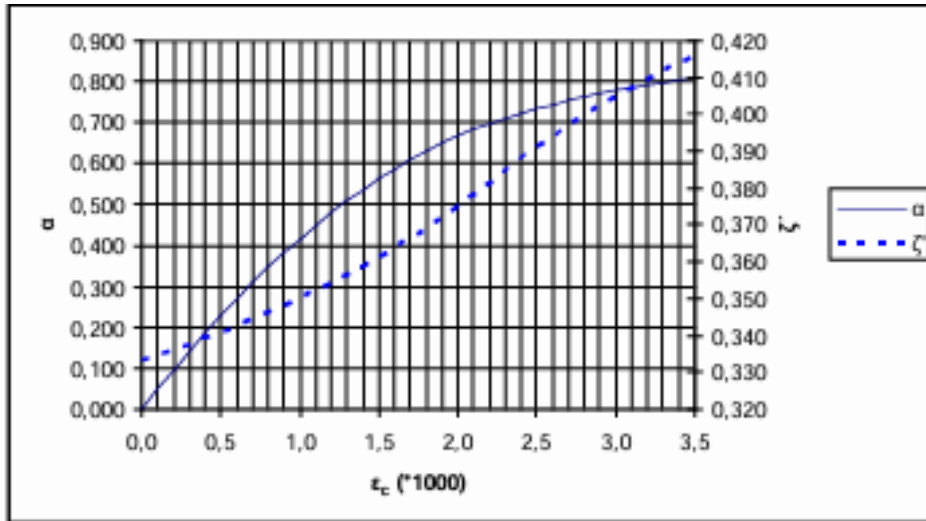
- ζ' : συντελεστής που προσδιορίζει την θέση της συνισταμένης των θλιπτικών τάσεων του σκυροδέματος. Για την συνήθη τιμή του $\epsilon_{c2} = -0.0035$ είναι $\zeta' = 0.416$ (συγκρίνατε με την τιμή 0.4 που προκύπτει από το προσεγγιστικό ορθογωνικό διάγραμμα). Για άλλες τιμές του ϵ_{c2} λαμβάνεται από διάγραμμα ή τον διπλανό πίνακα.
- ξ : το ανηγμένο ύψος της θλιβόμενης ζώνης = $\epsilon_{c2} / [\epsilon_{c2} + \epsilon_{s1}]$
- $\omega_1 = \omega_2 = 0.5\omega_{tot} = 0.5A_{s,tot} f_{yd} / [bhf_{cd}]$

Τέλος, οι τάσεις σ_{s1} , και σ_{s2} των χαλύβων εξαρτώνται από την παραμόρφωση των χαλύβων στις αντίστοιχες θέσεις. Δηλαδή τα δεξιά μέλη των εξισώσεων εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμορφώσεις ϵ_{c2} και ϵ_{s1} : για κάθε ζεύγος ϵ_{c2} και ϵ_{s1} μπορούμε να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα αναπτυσσόμενα εσωτερικά μεγέθη μ και ν .

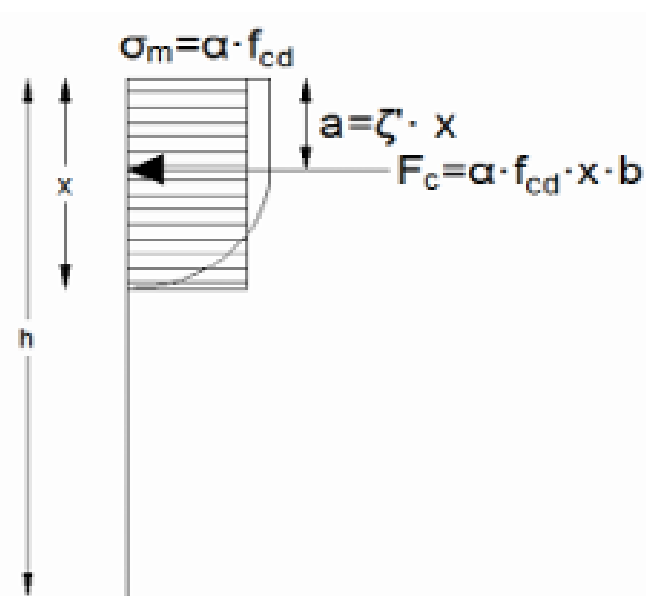
Πίνακας II: Τιμές των συντελεστών ζ' και ξ

ϵ_{c2}	ζ'	ξ
0.0	0.000	0.333
0.1	0.049	0.335
0.2	0.097	0.336
0.3	0.143	0.338
0.4	0.187	0.339
0.5	0.229	0.341
0.6	0.270	0.343
0.7	0.309	0.344
0.8	0.347	0.346
0.9	0.383	0.348
1.0	0.417	0.350
1.1	0.449	0.352
1.2	0.480	0.354
1.3	0.509	0.356
1.4	0.537	0.359
1.5	0.563	0.361
1.6	0.587	0.364
1.7	0.609	0.366
1.8	0.630	0.369
1.9	0.649	0.372
2.0	0.667	0.375
2.1	0.683	0.378
2.2	0.697	0.381
2.3	0.710	0.385
2.4	0.722	0.388
2.5	0.733	0.391
2.6	0.744	0.394
2.7	0.753	0.397
2.8	0.762	0.400
2.9	0.770	0.402
3.0	0.778	0.405
3.1	0.785	0.407
3.2	0.792	0.410
3.3	0.798	0.412
3.4	0.804	0.414
3.5	0.810	0.416

Επεξήγηση α και ζ'



Τιμές του συντελεστή « α » (μέση τάση) και του συντελεστή « ζ' » (συνισταμένη) συναρτήσει της ακραίας παραμόρφωσης του σκυροδέματος ϵ_c .

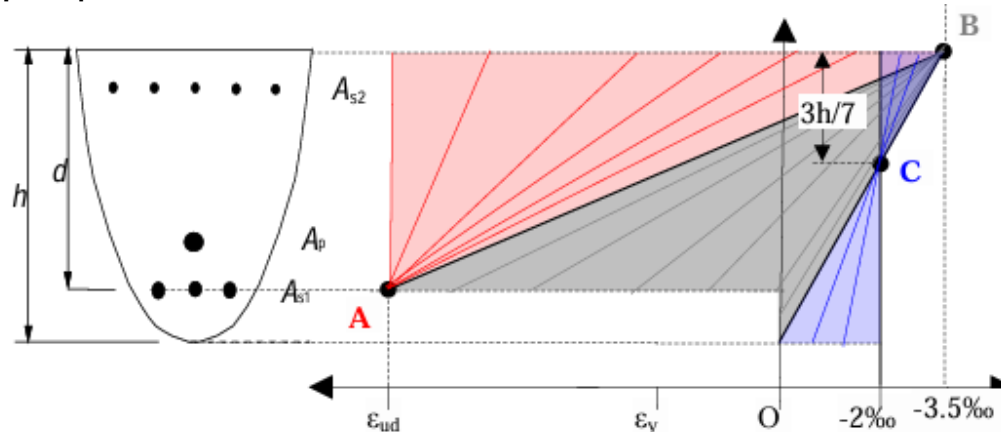


Επεξηγηματικό σκαρίφημα για τον ορισμό του συντελεστή « α » (μέση τάση) και του συντελεστή « ζ' » (συνισταμένη)

Διαγράμματα αλληλεπίδρασης

Υπενθυμίζονται εδώ οι πιθανές κατανομές των παραμορφώσεων καθ' ύψος μιας διατομής στην ΟΚΑ. Μέχρι τώρα είχαμε δει τις περιπτώσεις όπου η μία ακραία ίνα της διατομής θλιβόταν ενώ ή άλλη εφελκυόταν ή δεν θλιβόταν όλη η διατομή. Στην περίπτωση αυτή η μέγιστη παραμόρφωση του σκυροδέματος ήταν $\epsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$. Όλες αυτές οι κατανομές απεικονίζονται στην γκρίζα περιοχή του παρακάτω Σχήματος (περιστροφή περίξ του σημείου Β).

Ωστόσο, αν για κάποιο συνδυασμό ροπής και αξονικής βρεθεί να θλίβεται όλη η διατομή τότε η μέγιστη παραμόρφωση του σκυροδέματος μειώνεται μέχρι την τιμή $\epsilon_{c2} = -2.0\text{‰}$ (τιμή που αντιστοιχεί στην κεντρική θλίψη). Οι ενδιάμεσες αυτές καταστάσεις (δηλαδή από την στιγμή που αρχίζει να θλίβεται όλη η διατομή μέχρι την κεντρική θλίψη) προσδιορίζονται από την περιστροφή περίξ του σημείου C (μπλε περιοχή). Το σημείο C απέχει απόσταση $3h/7$ από την πλέον θλιβόμενη ίνα (προσδιορίζεται γεωμετρικά).



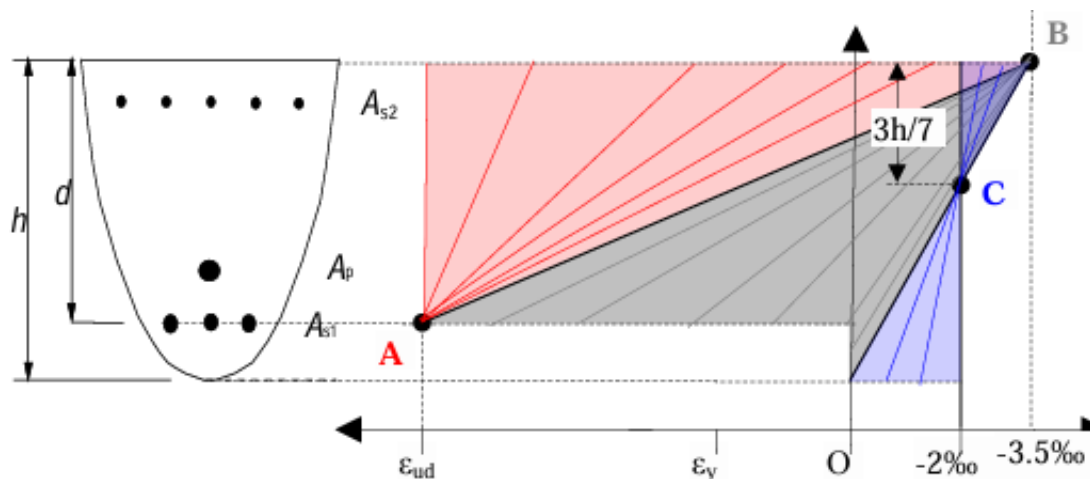
Διαγράμματα αλληλεπίδρασης

- Όταν αρχίζει να θλίβεται ολόκληρη η διατομή και η μέγιστη παραμόρφωση του σκυροδέματος μεταβάλλεται σταδιακά από το -3.50‰ στο -2.00‰ , η σχέση που συνδέει τις δύο ακραίες παραμορφώσεις ϵ_{c0} και ϵ_{cu} είναι:

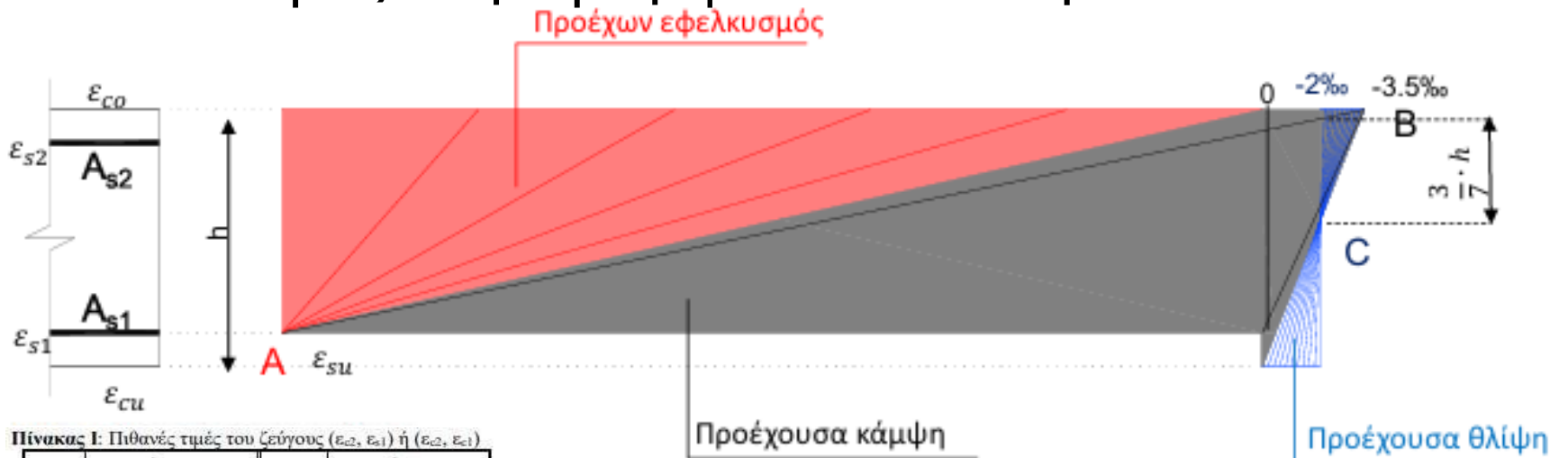
$$\epsilon_{cu} = -(\mathbf{14+4\epsilon_{c0}})/\mathbf{3} \text{ και ισχύει για } -0.0035 \leq \epsilon_{c0} \leq -0.002.$$

Προσοχή: Όταν θλίβεται όλη η διατομή δουλεύουμε με την παραμόρφωση ϵ_{cu} και όχι με την ϵ_{s1} .

- Στις περιπτώσεις κατά τις οποίες υπάρχει περιορισμός της παραμόρφωσης του χάλυβα ($\epsilon_{s1} \leq \epsilon_{ud} = 67.5 \text{‰}$) υπάρχει το ενδεχόμενο να εφελκύεται όλη η διατομή, οπότε οι πιθανές κατανομές προσδιορίζονται από την περιστροφή της στραμμένης διατομής περίξ του σημείου A (κόκκινη περιοχή).



Κατανομές παραμορφώσεων στην ΟΚΑ



Πίνακας I: Πιθανές τιμές του ζεύγους (ϵ_{c0} , ϵ_{s1}) ή (ϵ_{c0} , ϵ_{cu})

ϵ_{c0}	ϵ_{s1} ή ϵ_{cu}	Κεντρικός εφελκυσμός	ϵ_{c0}	ϵ_{s1} ή ϵ_{cu}
67,5	67,5	Κεντρικός εφελκυσμός	-3,5	2,5
2,17	67,5		-3,5	2,17
2,0	67,5		-3,5	2,0
1,5	67,5		-3,5	1,0
1,0	67,5		-3,5	0,5
0,5	67,5		-3,5	0,0
0,0	67,5		-3,5	0,00
-0,5	67,5		-3,4	-0,13
-1,0	67,5		-3,3	-0,27
-1,5	67,5		-3,2	-0,40
-2,0	67,5		-3,1	-0,53
-2,5	67,5		-3,0	-0,67
-3,0	67,5		-2,9	-0,80
-3,5	67,5		-2,8	-0,93
-3,5	50,0		-2,7	-1,07
-3,5	40,0		-2,6	-1,20
-3,5	30,0		-2,5	-1,33
-3,5	20,0		-2,4	-1,47
-3,5	10,0		-2,3	-1,60
-3,5	5,0		-2,2	-1,73
-3,5	4,0		-2,1	-1,87
-3,5	3,0		-2,0	-2,00

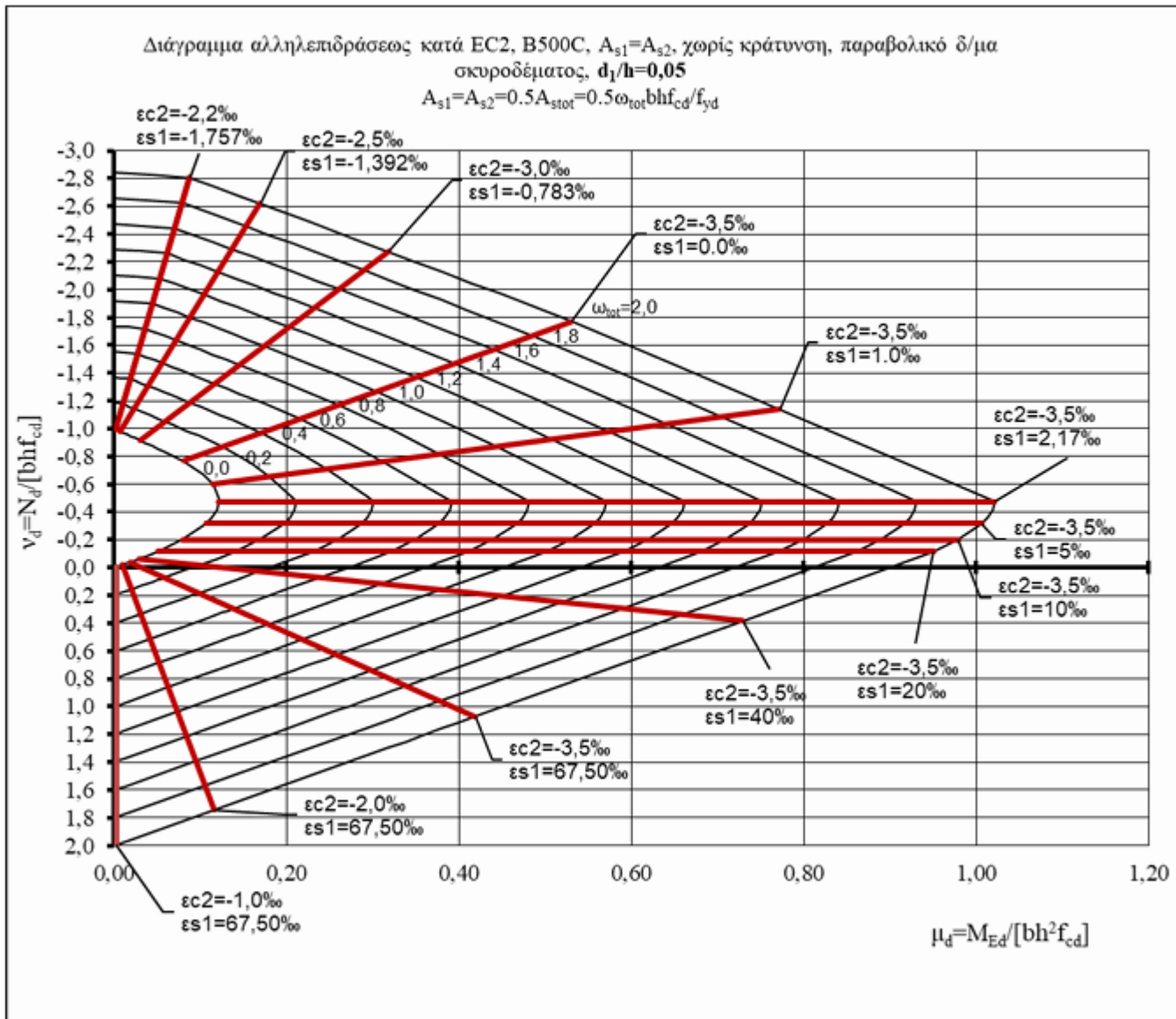
Ολόκληρη η διατομή βρίσκεται σε θλίψη (σημείο περιτροπής το C): $\epsilon_{c1} = (14 + \epsilon_{c2})/3$

Όταν $\epsilon_{c0} = \epsilon_{s1}$: κεντρικός εφελκυσμός

Όταν $\epsilon_{c0} = \epsilon_{cu}$: κεντρική θλίψη

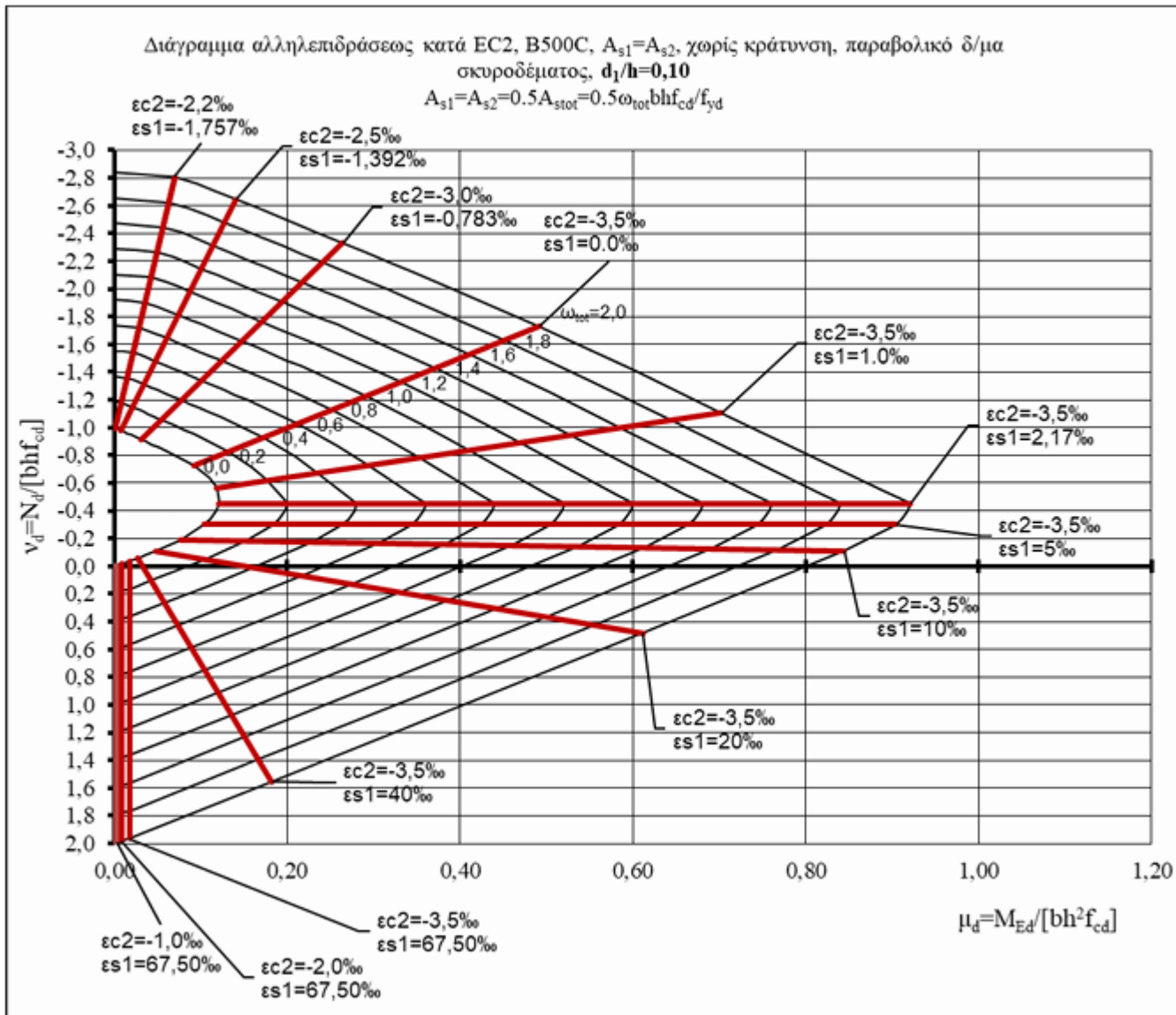
Όταν $N = 0$: Καθαρή κάμψη

Διαγράμματα αλληλεπίδρασης κατά EC2



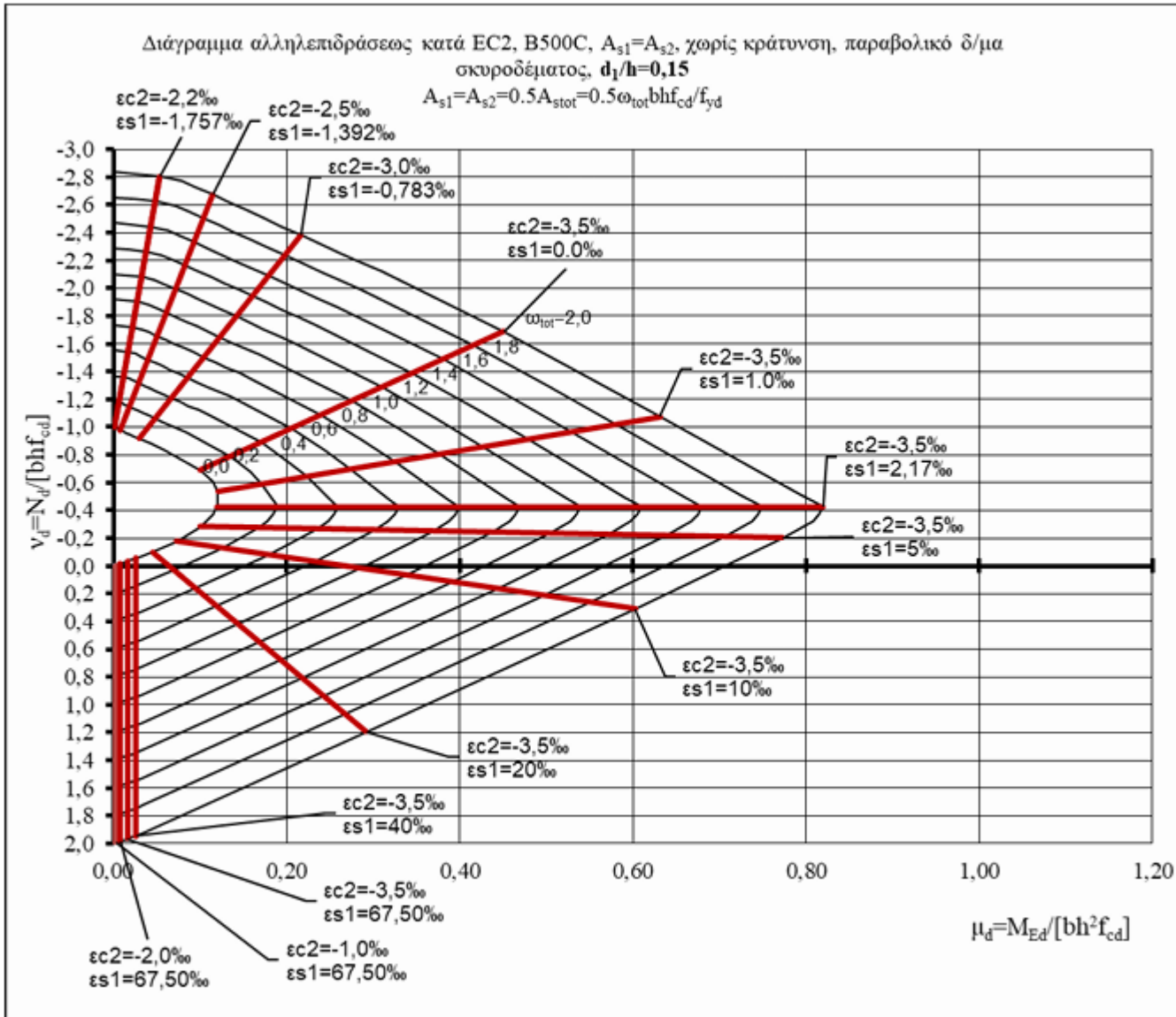
Διαγράμματα Αλληλεπίδρασης κατά EC2, $A_{s1}=A_{s2}=0.5A_{s,tot}$ χωρίς κράτνυση, $d_1/h=0.05$ (για κατηγορίες σκυροδέματος $\leq C50/60$)

Διαγράμματα αλληλεπίδρασης κατά EC2



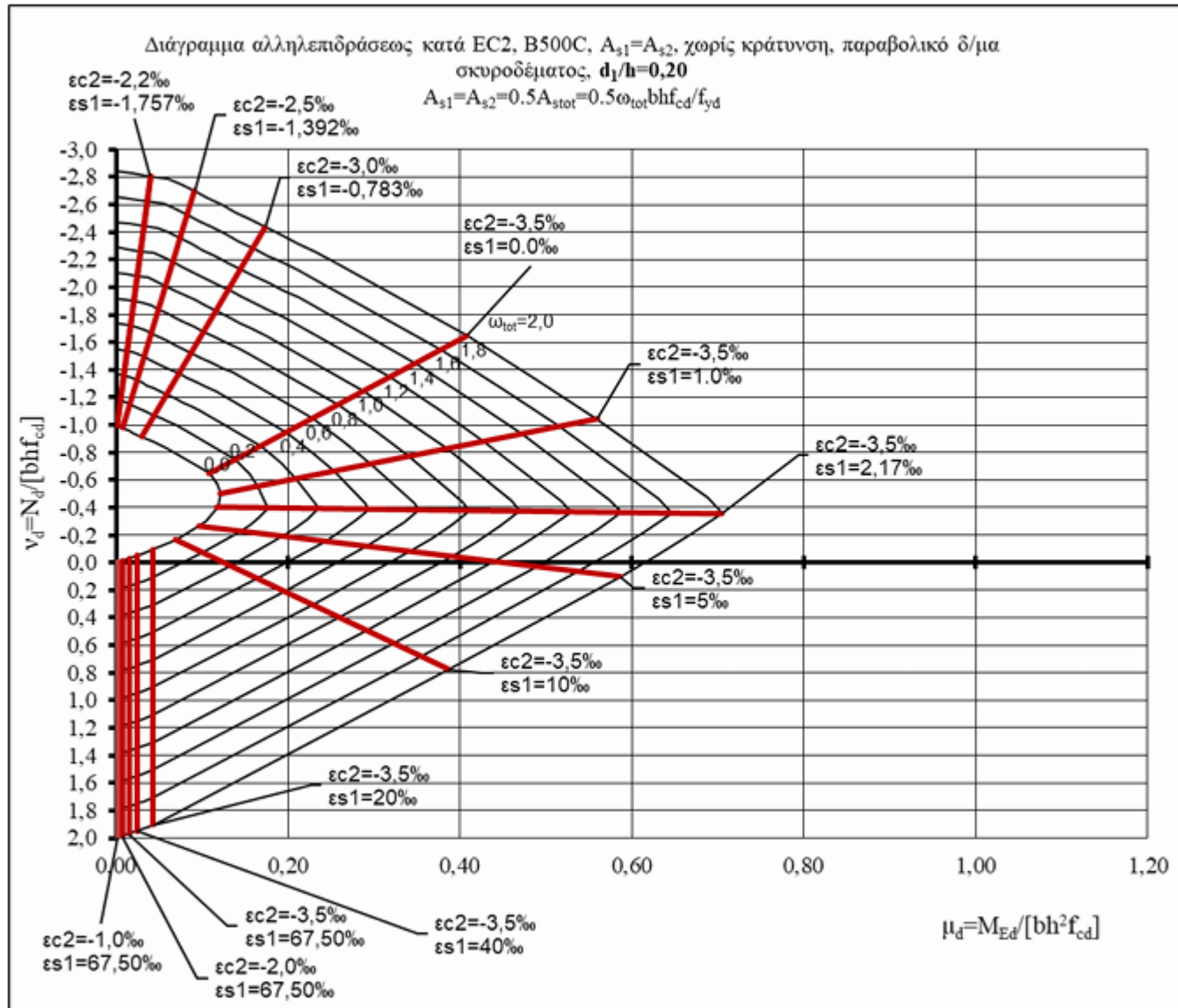
Διαγράμματα
 Αλληλεπίδρασης
 κατά EC2,
 $A_{s1} = A_{s2} = 0.5A_{s,tot}$
 χωρίς κράτυνση,
 $d_1/h = 0.10$ (για
 κατηγορίες
 σκυροδέματος \leq
 C50/60)

Διαγράμματα αλληλεπίδρασης κατά EC2



Διαγράμματα
 Αλληλεπίδρασης
 κατά EC2,
 $A_{s1} = A_{s2} = 0.5A_{s,tot}$
 χωρίς κράτνυση,
 $d_1/h = 0.15$ (για
 κατηγορίες
 σκυροδέματος \leq
 C50/60)

Διαγράμματα αλληλεπίδρασης κατά EC2



Διαγράμματα Αλληλεπίδρασης κατά EC2, **$A_{s1} = A_{s2} = 0.5A_{s,tot}$** χωρίς κράτυνση, **$d_1/h = 0.20$** (για κατηγορίες σκυροδέματος $\leq C50/60$)

Χαρακτηριστικά σημεία των διαγραμμάτων

1. Κεντρικός εφελκυσμός (δηλαδή στην διατομή ασκείται μόνον μια εφελκυστική δύναμη και όχι ροπή). Από την εξίσωση των αξονικών δυνάμεων προκύπτει:

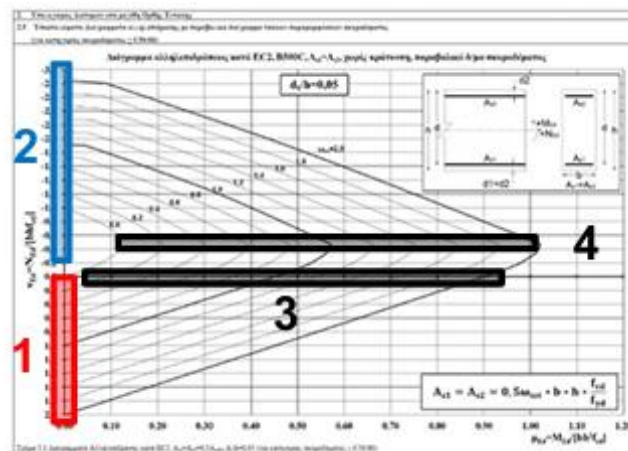
$$V_{Ed} = \omega_{s2} \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \text{ και επειδή οι οπλισμοί έχουν προφανώς διαρρεύσει:}$$

$$V_{Ed} = \omega_{tot} \text{ και προφανώς } \mu_{Ed} = 0$$

2. Κεντρική θλίψη (δηλαδή στην διατομή ασκείται μόνον μια θλιπτική δύναμη και όχι ροπή). Στην περίπτωση αυτή όλη η διατομή έχει θλιπτικές παραμορφώσεις -0.002 και **οι οπλισμοί δεν έχουν διαρρεύσει**. Επιπλέον επειδή όλη η διατομή θλίβεται και οι τάσεις είναι σταθερές $\alpha = 1.00$. Από την εξίσωση των αξονικών δυνάμεων προκύπτει:

$$V_{Ed} = \alpha \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right) + \omega_{s2} \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow V_{Ed} = 1 + \omega_{s2} \cdot \frac{f_{yd} \cdot \frac{2.00}{2.17}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \frac{f_{yd} \cdot \frac{2.00}{2.17}}{f_{yd}}$$

$$V_{Ed} = -[1 + 0.92 \cdot \omega_{tot}] \text{ και προφανώς } \mu_{Ed} = 0$$



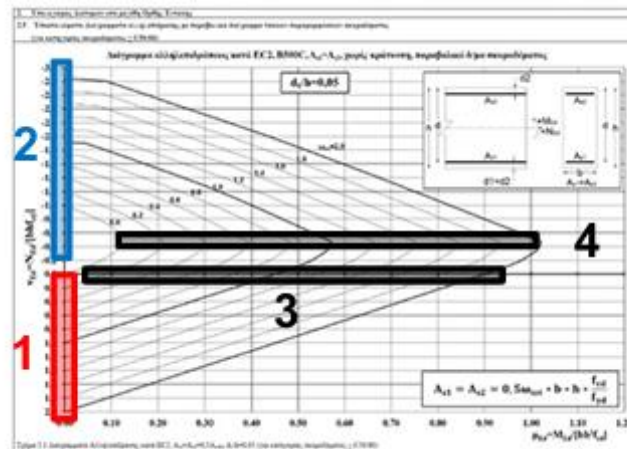
Χαρακτηριστικά σημεία των διαγραμμάτων

3. **Καθαρή κάμψη** (δηλαδή στην διατομή ασκείται μόνον μια ροπή κάμψεως και μηδενική αξονική δύναμη). Εφόσον η αξονική είναι 0 τότε: $F_c + F_{s2} = F_{s1}$

Κάνουμε την προσεγγιστική παραδοχή ότι η F_c ασκείται περίπου στην ίδια θέση με την F_{s2} , συνεπώς η συνισταμένη τους απέχει απόσταση d_2 από την πάνω ίνα. Τότε η ροπή είναι $M_{Ed} = F_{s1} \cdot (d - d_2)$ και αφού ο εφελκόμενος οπλισμός έχει διαρρεύσει ισχύει: $M_{Ed} = A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot (d - d_2) \rightarrow \mu_{Ed} = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot (h - d_1 - d_2)}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \rightarrow \mu_{Ed} = 0.5 \cdot \omega_{tot} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot d_1}{h}\right)$ και προφανώς $v_{Ed} = 0$

4. **Σημείο μέγιστης ροπής (balanced point)**. Στα διαγράμματα αλληλεπίδρασης όλες οι καμπύλες παρουσιάζουν ένα μέγιστο για μια ροπή μ_{bal} καθώς μεταβάλλεται η αξονική δύναμη v_{Ed} .

Ένας τρόπος για να βρούμε αυτό το μέγιστο είναι να εκφράσουμε την ροπή μ_{Ed} συναρτήσει της αξονικής δυνάμεως v_{Ed} . Γι' αυτό υπολογίζουμε από την εξίσωση των αξονικών το ύψος της θλιβόμενης ζώνης ξ συναρτήσει της v_{Ed} και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξίσωση των ροπών. Κάνουμε τη λογική υπόθεση ότι $\epsilon_{co} = -3.50\text{‰}$ και ότι αμφότεροι οι οπλισμοί έχουν διαρρεύσει. Συγκεκριμένα:



Χαρακτηριστικά σημεία των διαγραμμάτων

$$v_{Ed} = \alpha \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right) + \omega_{s2} \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} - \omega_{s1} \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow v_{Ed} = 0.81 \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right) \rightarrow \xi = \frac{v_{Ed}}{0.81 \cdot \left(\frac{d}{h}\right)} \rightarrow \xi = 1.235 \cdot v_{Ed} \cdot \frac{h}{d}$$

$$\mu_{Ed} = \alpha \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \zeta' \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right)\right] + \omega_{s2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_1}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow$$

$$\mu_{Ed} = 0.81 \cdot 1.235 \cdot v_{Ed} \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(\frac{d}{h}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - 0.416 \cdot 1.235 \cdot v_{Ed} \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(\frac{d}{h}\right)\right] + \omega_{s2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_1}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow$$

$$\mu_{Ed} = 0.81 \cdot 1.235 \cdot v_{Ed} \cdot \left[\frac{1}{2} - 0.416 \cdot 1.235 \cdot v_{Ed}\right] + \omega_{s2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_1}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow$$

$$\mu_{Ed} = 0.50 \cdot v_{Ed} - 0.514 \cdot v_{Ed}^2 + \omega_{s2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_1}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}}$$

Για να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα μ_{Ed} αναζητούμε την τιμή της v_{Ed} για την οποία μηδενίζεται η παράγωγος της μ_{Ed} ως προς v_{Ed} (οι όροι των χαλύβων μηδενίζονται γιατί δεν εξαρτώνται από το v_{Ed}), οπότε:

$$\frac{d\mu_{Ed}}{dv_{Ed}} = 0 \rightarrow 0.50 - 2 \cdot 0.514 \cdot v_{Ed} = 0 \rightarrow v_{Ed} = \frac{0.50}{2 \cdot 0.514} \rightarrow v_{Ed} = 0.486 \quad \text{και από } \xi = 1.235 \cdot v_{Ed} \cdot \frac{h}{d} \rightarrow \xi = 0.601 \cdot \frac{h}{d}$$

$$\mu_{Ed} = 0.50 \cdot 0.486 - 0.514 \cdot 0.486^2 + \omega_{s2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_1}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow \mu_{Ed} = 0.122 + \omega_{tot} \cdot \left(0.50 - \frac{d_1}{h}\right)$$

Η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι χάλυβες έχουν διαρρεύσει (βλ. εξίσωση 1).

Ελέγχουμε την υπόθεση αυτή. Επειδή για να έχουμε διαρροή πρέπει $\xi = 0.601 \cdot \frac{h}{d} < 0.617 \rightarrow \frac{h}{d} < \frac{0.617}{0.601} = 1.03 \rightarrow \frac{d}{h} >$

$$0.974 \rightarrow \frac{h-d_1}{h} > 0.974 \rightarrow \frac{d_1}{h} < 0.026$$

Στις περισσότερες όμως πρακτικές εφαρμογές $\frac{d_1}{h} > 0.026$ (οι συνήθεις τιμές είναι $\frac{d_1}{h} = 0.05$ ή $\frac{d_1}{h} = 0.10$ ή $\frac{d_1}{h} = 0.15$ κ.λπ.)

Χαρακτηριστικά σημεία των διαγραμμάτων

Συνεπώς η υπόθεση της προηγούμενης ανάλυσης δεν ικανοποιείται, επομένως η μέγιστη ροπή δεν θα προκύψει από τον μηδενισμό της παραγώγου αλλά κρατώντας την παραμόρφωση του εφελκόμενου χάλυβα $\epsilon_{s1} = \epsilon_{yd} = 2.17\%$.

Τότε $\xi = \frac{3.5}{3.5+2.17} = 0.617$ συνεπώς από την εξίσωση των αξονικών δυνάμεων προκύπτει:

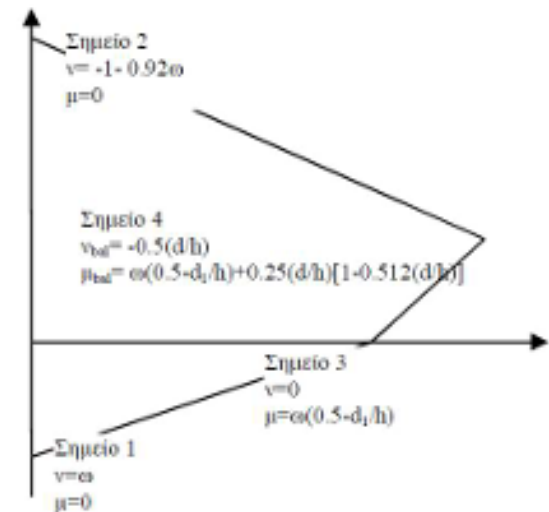
$$v_{Ed} = \alpha \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right) + \omega_{s2} \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} - \omega_{s1} \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow v_{bal} = 0.81 \cdot 0.617 \cdot \left(\frac{d}{h}\right) \rightarrow v_{bal} = 0.50 \cdot \left(\frac{d}{h}\right)$$

$$\mu_{Ed} = \alpha \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \zeta' \cdot \xi \cdot \left(\frac{d}{h}\right)\right] + \omega_{s2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_2}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \omega_{s1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{d_1}{h}\right) \cdot \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \rightarrow$$

$$\mu_{bal} = 0.81 \cdot 0.617 \cdot \left(\frac{d}{h}\right) \cdot \left[0.5 - 0.416 \cdot 0.617 \cdot \left(\frac{d}{h}\right)\right] + \omega_{tot} \cdot \left(0.5 - \frac{d_1}{h}\right) \rightarrow$$

$$\mu_{bal} = 0.25 \cdot \left(\frac{d}{h}\right) - 0.128 \cdot \left(\frac{d}{h}\right)^2 + \omega_{tot} \cdot \left(0.5 - \frac{d_1}{h}\right)$$

Το προσεγγιστικό (γραμμικοποιημένο) διάγραμμα αλληλεπίδρασης αποτελούμενο από τα παραπάνω τέσσερα σημεία φαίνεται στο παράπλευρο σχήμα 2.0 (η γραμμικοποίηση μεταξύ των σημείων 2 και 4 δεν είναι τόσο καλή, αλλά πάντως είναι συντηρητική).



Εφαρμογή 1α

$$\frac{1}{2} A_{s,tot}$$

$$\frac{1}{2} A_{s,tot}$$

Έστω διατομή 30x50, C30/37,
B500C, 8Φ25, $d_1=0.05m$,
 $N_{Ed}=1530$ kN (θλιπτική)
Ζητείται η M_{Rd} .

$$v_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{-1530}{0.30 \cdot 0.50 \cdot 17000} = -0.60$$

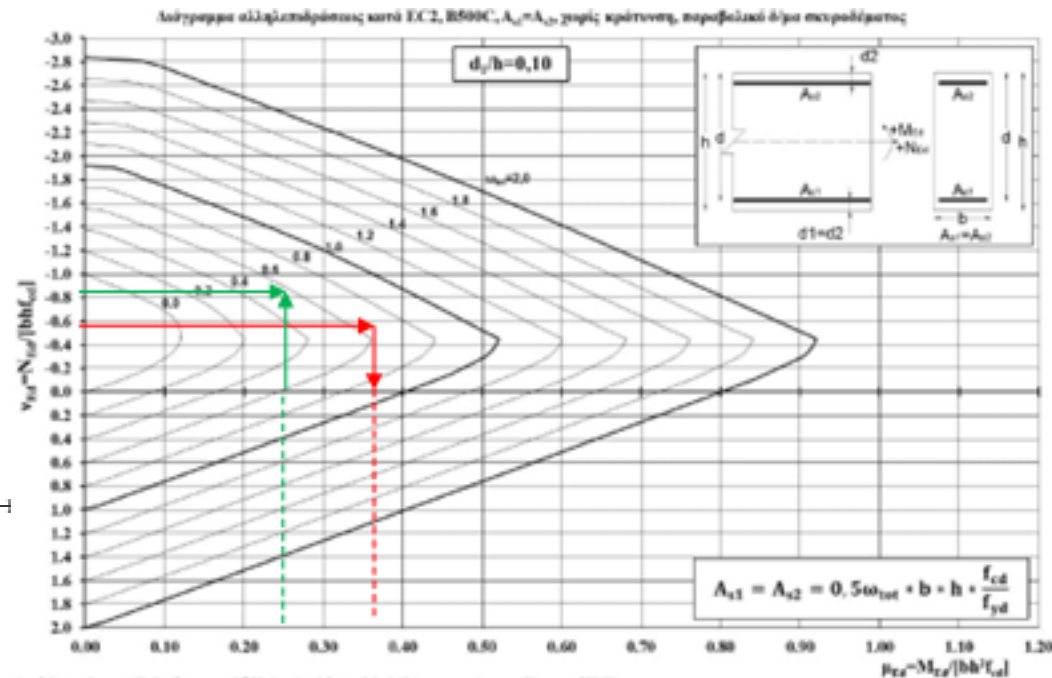
$$\omega_{tot} = \frac{A_{s,tot}}{b \cdot h} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = \frac{8 \cdot 4.91}{30 \cdot 50} \cdot \frac{435}{17} = 0.67 \Rightarrow$$

$$\mu_{Ed} = 0.37 \rightarrow M_{Ed} = 0.37 \cdot 0.30 \cdot 0.50^2 \cdot 17000 \rightarrow$$

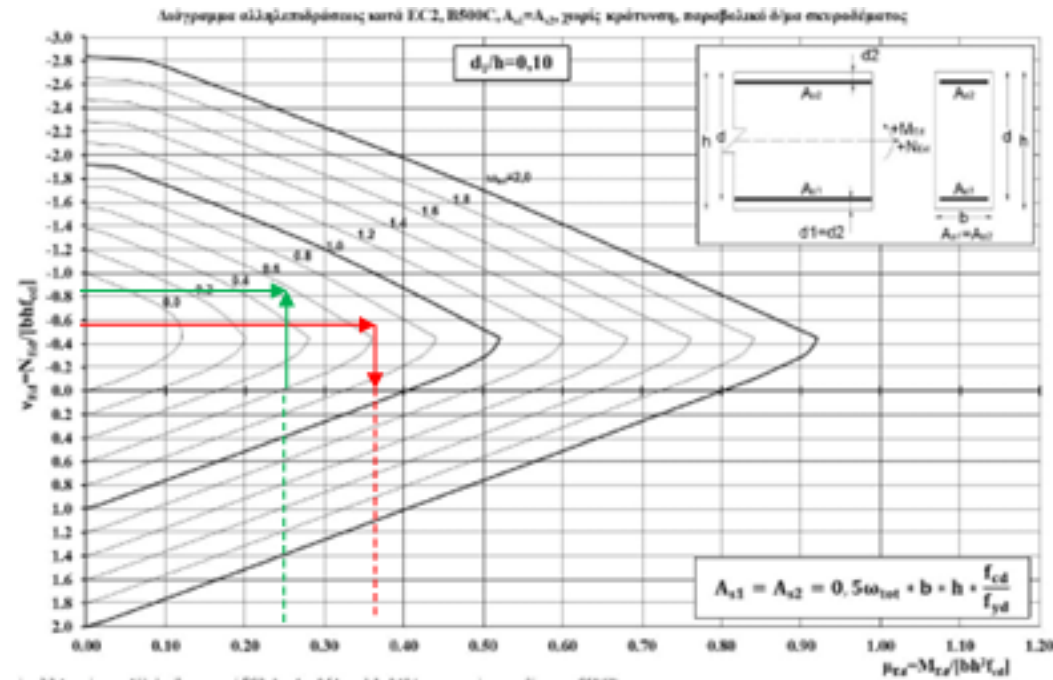
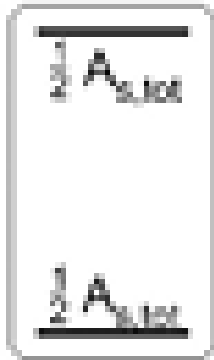
$$M_{Ed} = 472 \text{ kNm}$$

M_{Rd} : αντίσταση M_{Ed} : δράση

Μέγιστη δράση $M_{Ed} \leq M_{Rd}$



Εφαρμογή 1β



Γραμ. 2.2 Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης κατά EC2, $A_{s1}=A_{s2}=0,5A_{s,tot}$, $d_1/h=0,10$ (για κατηγορία εκτροχιάματος C30/37)

Έστω διατομή 30x50, C30/37, B500C, $d_1=0.05m$, $N_{Ed}=2040$ kN (θλιπτική), $M_{ed}=332$ kNm.

$$v_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{-2040}{0.30 \cdot 0.50 \cdot 17000} = -0.80 \quad \mu_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \frac{332}{0.30 \cdot 0.50^2 \cdot 17000} = 0.26 \Rightarrow \omega_{tot} = 0.55$$

$$A_{tot} = \omega \cdot b \cdot h \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0.55 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \frac{17}{435} = 32.20 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \cdot (2\Phi 25 + 2\Phi 20)$$

Εφαρμογή 2

Δίδεται τετραγωνική διατομή πλευράς 400 mm. Η διατομή είναι άοπλη (έστω ότι αυτό ήταν επιτρεπτό). Ζητείται να σχεδιασθεί το διάγραμμα αλληλεπιδράσεως της διατομής, σε άξονες M (kNm) και N (kN), για συνδυασμούς φορτίσεων που συμπεριλαμβάνουν σεισμό.

Το διάγραμμα να σχεδιασθεί από τα δύο σημεία που αντιστοιχούν στην μέγιστη και ελάχιστη αξονική δύναμη και με 3^ο σημείο αυτό που αντιστοιχεί σε παραμορφώσεις της διατομής $\epsilon_{c1}=0$ (προσοχή όχι ϵ_{s1}) και $\epsilon_{c2}=-3.5\%$. Ενδιαμέσως το διάγραμμα να θεωρηθεί γραμμικό. Σκυρόδεμα C30/37, η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος αγνοείται.

Εφαρμογή 2

Μέγιστη (θλιπτική) αξονική δύναμη: $N_{Rd} = -0.40 \cdot 0.40 \cdot \frac{30000}{1.5} = -3200 \text{ kN}$

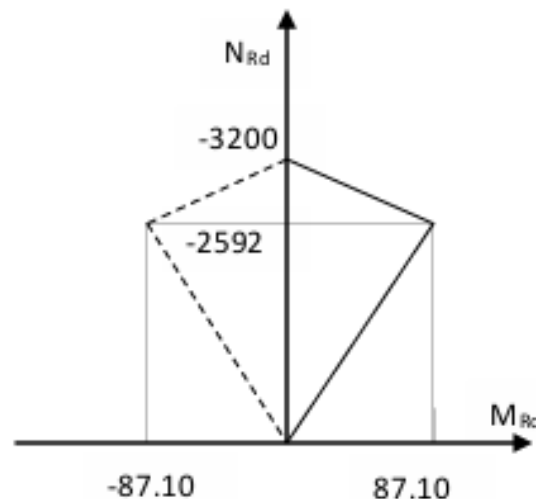
Ελάχιστη αξονική δύναμη: $N_{Rd} = 0$ (η εφελκυστική αντοχή, σύμφωνα με την εκφώνηση, αγνοείται)

Παραμόρφωση $\varepsilon_{c1} = 0, \varepsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$:

$$N_{Rd} = -0.81 \cdot 0.40 \cdot 0.40 \cdot \frac{30000}{1.5} = -2592 \text{ kN}$$

$$M_{Rd} = 2592 \cdot (0.20 - 0.416 \cdot 0.40) = 87.10 \text{ kNm}$$

Σημείωση: Έχουν υπολογισθεί/απεικονισθεί με αρνητικό πρόσημο οι θλιπτικές δυνάμεις, σε συμβατότητα με ό,τι ακολουθείται στο τυπολόγιο. (είναι, βεβαίως, ορθή και η απεικόνιση της θλίψης με θετικό πρόσημο).



Εφαρμογή 3

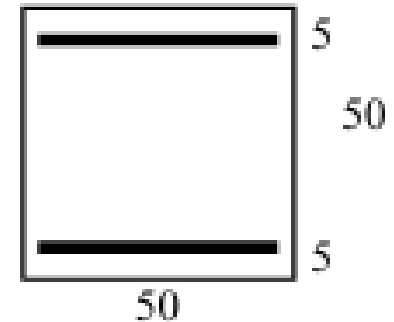
Έλεγχος ορθογωνικής διατομής με «πολύ μεγάλη» θλιπτική δύναμη, επίλυση με δοκιμές.

Δίδεται η τετραγωνική διατομή του διπλανού σχήματος.

$$A_{s1} = A_{s2} = 19 \text{ cm}^2$$

C20/25, /B500C, αξονική δύναμη $N_d = -3800 \text{ kN}$

Να βρεθεί η ροπή αντοχής.



Εφαρμογή 3

1^η δοκιμή

Έστω ότι $\varepsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ και $\varepsilon_{c1} = 0\text{‰}$ (Προσέξατε ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε αυθαίρετα από οποιοδήποτε ζεύγος τιμών παραμορφώσεων αστοχίας). Εδώ θεωρήσαμε ότι όλη η διατομή θλίβεται.

Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει το προσεγγιστικό δ/μα τάσεων σκυροδέματος. Θα χρησιμοποιήσουμε το «ακριβές» διάγραμμα. $x=h=0.50\text{m}$

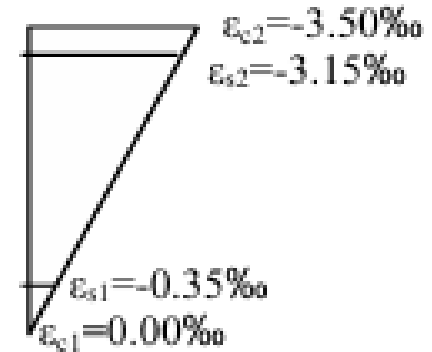
$$F_c = -0.81 \cdot 0.85 \cdot 0.50 \cdot 0.50 \cdot 13333 \text{ kN} = -2065 \text{ kN}$$

$$F_{s2} = -19 \cdot 43.5 = -826.5 \text{ kN}$$

$$F_{s1} = -19 \cdot (20 \cdot 0.35) = -133 \text{ kN}$$

$$\text{Άρα } N_{\varepsilon\sigma} = -2065 - 826.5 - 133 = -3024.5 > -3800 \text{ kN} = N_{\varepsilon\xi}$$

Παρατηρούμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις δεν δίνουν επαρκή θλίψη, άρα πρέπει να αυξήσουμε και άλλο την θλιπτική παραμόρφωση του κάτω πέλματος. Όταν όμως όλη η διατομή είναι σε θλίψη, τότε το κριτήριο αστοχίας δεν είναι $\varepsilon_{c2} = -3.5\text{‰}$ αλλά είναι εκείνα τα ζεύγη τιμών που αντιστοιχούν σε θέσεις της εστραμμένης διατομής που διέρχονται από το σημείο C (παραμόρφωση 2‰ στο ύψος $3h/7$).



Εφαρμογή 3

1^η δοκιμή

Αυτό γίνεται για να περάσουμε, βαθμιαία, από την παραμόρφωση $\epsilon_{c2} = -3.5\%$, που ισχύει για την θλίψη εκ κάμψεως, στην παραμόρφωση $\epsilon_{c2} = -2.0\%$, που ισχύει για την κεντρική θλίψη.

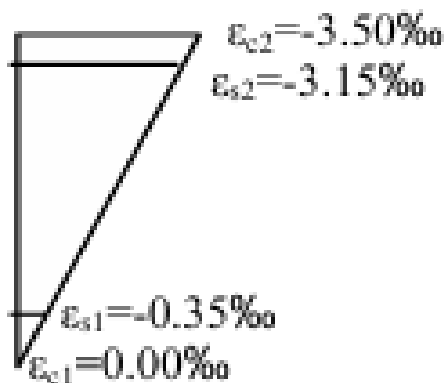
Έτσι λοιπόν, τα παρακάτω ζεύγη τιμών αντιστοιχούν σε κατάσταση αστοχίας όταν η διατομή είναι όλη σε θλίψη: ϵ_{c2} μεταξύ -2% και -3.5% και $\epsilon_{c1} = \epsilon_{c2} - (2\% + \epsilon_{c2}) * 7/3$.

Π.χ. ενδεικτικά: για $\epsilon_{c2} = -3.50\%$ θα είναι $\epsilon_{c1} = 0.0\%$

ή για $\epsilon_{c2} = -3.00\%$ θα είναι $\epsilon_{c1} = -1.17\%$,

ή για $\epsilon_{c2} = -2.50\%$ θα είναι $\epsilon_{c1} = -1.33\%$,

ή για $\epsilon_{c2} = -2.0\%$ θα είναι $\epsilon_{c1} = -2.0\%$.



Εφαρμογή 3

2η δοκιμή

Έστω $\varepsilon_{c2} = -2.75\text{‰}$ άρα η παραμόρφωση της κάτω ίνας πρέπει να είναι:

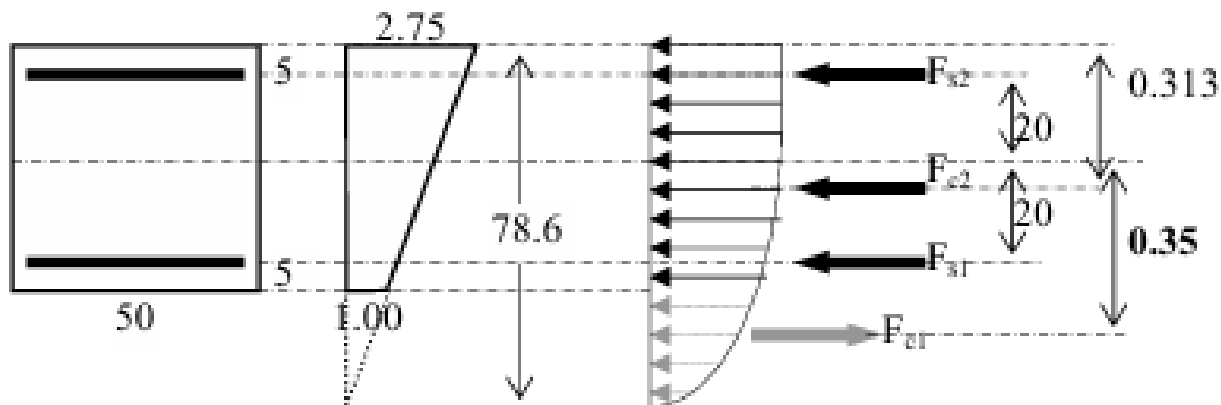
$\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c2} - (2\text{‰} + \varepsilon_{c2}) * 7/3 = -1\text{‰}$. Επίσης προκύπτει ότι: $\varepsilon_{s2} = -2.575\text{‰}$ και $\varepsilon_{s1} = -1.175\text{‰}$

Για $\varepsilon_{c2} = 2.75\text{‰}$ έχουμε $\alpha = 0.758$, $\zeta' = 0.398$ και για $\varepsilon_{c1} = 1\text{‰}$ έχουμε $\alpha = 0.42$, $\zeta' = 0.35$

Ύψος θλιβόμενης ζώνης:

$$x = 2.75 / (2.75 - 1.00) * 0.50 = 0.786\text{m} > 0.50\text{m}$$

άρα η θλιπτική δύναμη θα προκύψει ως η διαφορά των δυνάμεων που αναπτύσσει μια ορθογωνική διατομή ύψους 0.786m (και πλάτους 0.50m) μείον την δύναμη που δεν αναλαμβάνει ορθογωνική διατομή ύψους 0,286m (και πλάτους 0.50m).



Εφαρμογή 3

$$F_{c2} = 0.758 \cdot 0.85 \cdot 0.5 \cdot 0.786 \cdot 13333 = 3376 \text{ kN}$$

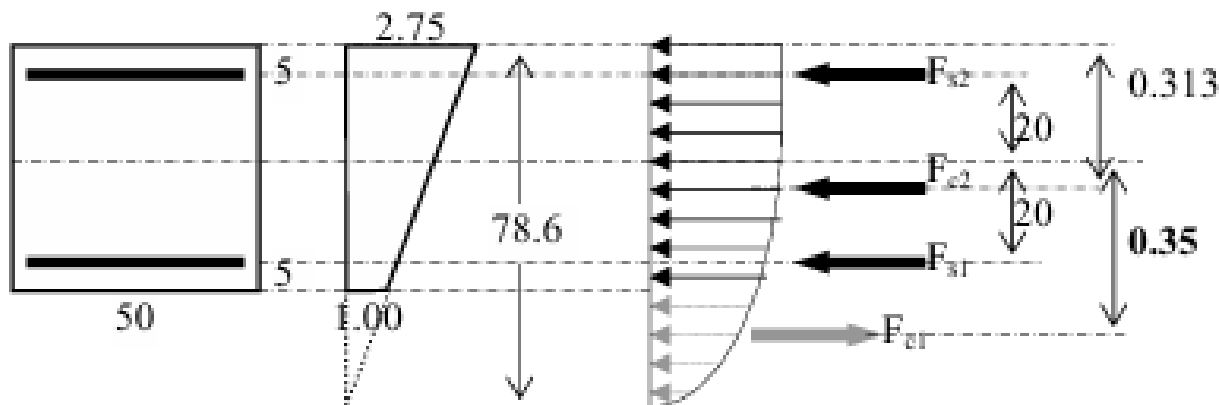
$$F_{s2} = 19 \cdot 43.5 = 826.5 \text{ kN},$$

$$F_{s1} = 19 \cdot (20 \cdot 1.175) = 446.5 \text{ kN}$$

$$F_{c1} = 0.420 \cdot 0.85 \cdot 0.5 \cdot 0.286 \cdot 13333 = 681 \text{ kN}$$

$$\text{Έλεγχος: } 3376 + 826.5 + 446.5 - 681 = 3968 \text{ kN} > 3800 \text{ kN}$$

Τώρα, αντιθέτως, οι εσωτερικές δυνάμεις δίνουν μεγαλύτερη θλίψη από ότι οι εξωτερικώς επιβαλλόμενη.



Εφαρμογή 3

3^η Δοκιμή

Έστω $\varepsilon_{c2} = -2.95\%$ άρα η παραμόρφωση της κάτω ίνας πρέπει να είναι:

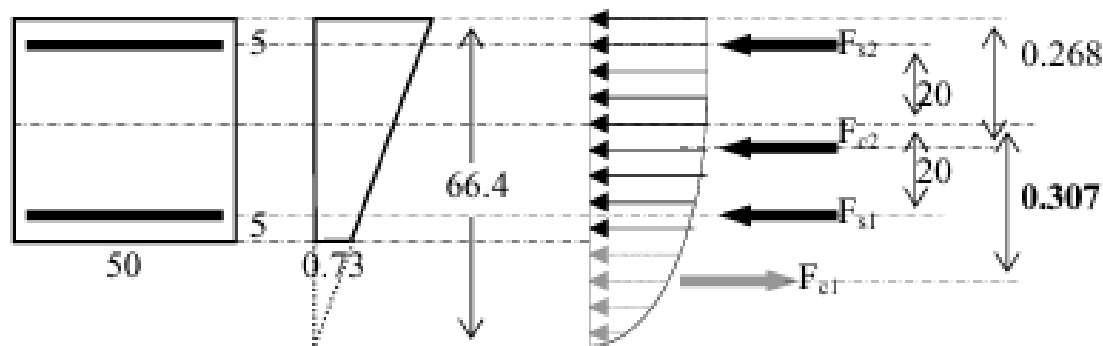
$\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c2} - (2\% + \varepsilon_{c2}) * 7/3 = -0.73\%$. Επίσης προκύπτει ότι: $\varepsilon_{s2} = -2.735\%$ και $\varepsilon_{s1} = -0.955\%$

Για $\varepsilon_{c2} = 2.95\%$ έχουμε $\alpha = 0.774$, $\zeta' = 0.404$ και για $\varepsilon_{c1} = 0.73\%$ έχουμε $\alpha = 0.32$, $\zeta' = 0.345$

Ύψος θλιβόμενης ζώνης:

$$x = 2.95 / (2.95 - 0.73) * 0.50 = 0.664\text{m} > 0.50\text{m}$$

άρα η θλιπτική δύναμη θα προκύψει ως η διαφορά των δυνάμεων που αναπτύσσει μια ορθογωνική διατομή ύψους 0.664m (και πλάτους 0.50m) μείον την δύναμη που δεν αναλαμβάνει ορθογωνική διατομή ύψους 0.164m (και πλάτους 0.50m).



Εφαρμογή 3

3^η Δοκιμή

$$F_{c2} = 0.774 \cdot 0.85 \cdot 0.5 \cdot 0.664 \cdot 13333 = 2912.2 \text{ kN} \quad F_{s2} = 19 \cdot 43.5 = 826.5 \text{ kN},$$
$$F_{s1} = 19 \cdot (20 \cdot 0.955) = 362.9 \text{ kN} \quad F_{c1} = 0.320 \cdot 0.85 \cdot 0.5 \cdot 0.164 \cdot 13333 = 297.4 \text{ kN}$$

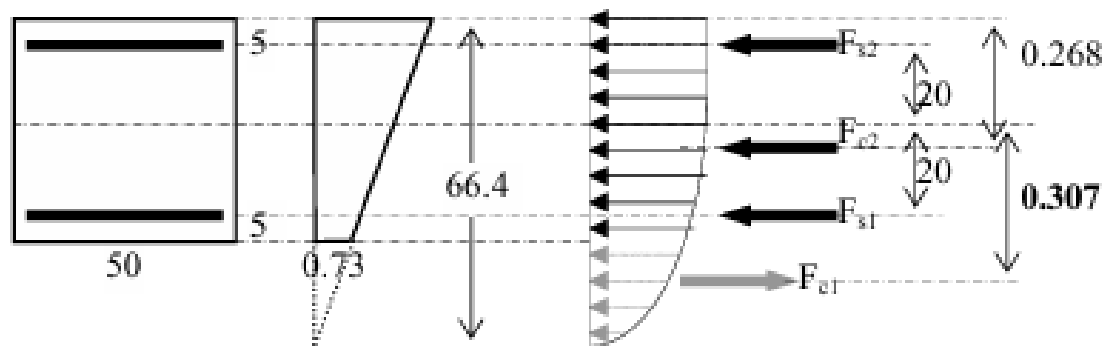
$$\text{Ελεγχος: } 2912.2 + 826.5 + 362.9 - 297.4 = 3804 \text{ kN} \approx 3800 \text{ kN}$$

Εχουμε ισοδυναμία αξονικών δυνάμεων δηλαδή ορθώς υποθέσαμε ότι $\epsilon_{c2} = -2.95\text{‰}$, και η ροπή αντοχής ως **προς το Κ.Β.** της διατομής είναι:

$$\mathbf{M_{Rd}} = 2912 \cdot (0.25 - 0.404 \cdot 0.664) + 826.5 \cdot 0.20 -$$
$$362.9 \cdot 0.2 + 297.4 \cdot (0.25 + 0.345 \cdot 0.164) = -53.16 + 165.3 -$$
$$72.6 + 91.16 = \mathbf{130.7 \text{ kNm}}$$

Με πίνακες θα είχαμε βρει: $\omega = 38 \cdot 435 / [2500 \cdot 11.333] = 0.58$

$\nu = -3800 / [0.25 \cdot 11333] = -1.34$ και από το διάγραμμα για $d_1/h = 0.1$ διαβάζουμε $\mu = 0.093$ και άρα: $\mathbf{M_{Rd}} = 0.093 \cdot 0.5 \cdot 0.5^2 \cdot 11333 = \mathbf{131.7 \text{ kNm}}$



Επισημάνσεις

1. Πριν ξεκινήσουμε τις δοκιμές, αναζητήσαμε την μέγιστη θλιπτική δύναμη, N_{max} , που μπορεί να αντέξει η διατομή σε κεντρική θλίψη (χωρίς καθόλου ροπή). Το νόημα αυτής της αναζήτησης είναι μήπως η αξονική που μας δόθηκε, $N_d = -3800$ kN, είναι μεγαλύτερη ακόμη και από αυτήν την N_{max} οπότε δεν έχει νόημα να ψάχνουμε να βρούμε πόση ροπή αντέχει αφού δεν θα αντέχει ούτε καν την αξονική.

Προφανώς είναι: $N_{max} = f_{cd} A_c + f_{yd} (2.00/2.17) * (A_{s1} + A_{s2}) = 0.85 * 13333 * 0.5 * 0.5 + 43.5 (2.00/2.17) * (19 + 19) = 2833 + 1545 = 4378$ kN > 3800 kN άρα έχει νόημα να συνεχίσουμε.

1. F_{c2} είναι η δύναμη που θα ανελάμβανε μια ορθογωνική διατομή με ύψος 78.6cm και μέγιστη παραμόρφωση σκυροδέματος $\epsilon_{c2} = -2.75\%$
2. F_{c1} είναι η δύναμη που θα ανελάμβανε μια ορθογωνική διατομή με ύψος 28.6cm και μέγιστη παραμόρφωση σκυροδέματος $\epsilon_{c2} = -1.00\%$ και αντιπροσωπεύει την παραπανίσια δύναμη που θεωρήσαμε στην F_{c2} .
3. Συνήθως στα υποστυλώματα η ροπή αναφέρεται στο Κ.Β. της διατομής, ενώ στις δοκούς (στοιχεία με μικρή ή ανύπαρκτη αξονική δύναμη και τα οποία κατά κανόνα δεν οπλίζονται συμμετρικώς) η ροπή συνήθως ανάγεται στην στάθμη το εφελκυσμένου οπλισμού (όταν συνυπάρχει και αξονική δύναμη. Όταν δεν υπάρχει αξονική είναι αδιάφορο το πού θα γίνει η αναγωγή). 37