**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Δύο σώματα με μάζες m1=6 Kg και m2=4 Kg συνδέονται με ιδανικό νήμα και ολισθαίνουν σε οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση της δύναμης F=10 Ν.

α) να σχεδιάσετε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα.

β) αν τα σώματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα να υπολογίσετε το συντελεστή τριβής.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Σύμφωνα με την εκφώνηση, υπάρχει τριβή ολίσθησης, άρα τα ζητούμενα διαγράμματα ελεύθερου σώματος είναι:



όπου Α είναι η τάση του νήματος, Τ οι τριβές, Ν οι κάθετες αντιδράσεις και mg τα βάρη των σωμάτων.

**β)** αφού τα σώματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα θα έχουμε:

Σώμα m1: , ,

Σώμα m2: ,,

οπότε έχουμε ότι:

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Σώμα μάζας βρίσκεται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή στατικής τριβής και συντελεστή τριβής ολίσθησης . Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη όπου ο χρόνος και σταθερά.

**α)** να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος.

**β)** να βρείτε το χρόνο για τον οποίο το σώμα αρχίζει να κινείται.

**γ)** να υπολογίσετε τη διάσταση της σταθεράς .

**δ)** να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος δίνοντας την αρχική της τιμή και σχολιάζοντας το πρόσημο της αρχικής τιμής.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Σύμφωνα με την εκφώνηση για , , οπότε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος είναι:

Οι δυνάμεις είναι το βάρος, , η αντίδραση, , και η στατική τριβή, . Το βάρος ασκείται στο κέντρο του σώματος ενώ οι υπόλοιπες δύο δυνάμεις ασκούνται στο σημείο επαφής με το οριζόντιο δάπεδο.

*Σημείωση: επειδή δεν έχουμε περιστροφή μπορούμε καταχρηστικά να σχεδιάσουμε όλες τις δυνάμεις με σημείο εφαρμογής το κέντρο του σώματος.*

**β)** το σώμα αρχίζει να κινείται όταν η δύναμη πάρει τιμή ίση με το μέγιστο της στατικής τριβής:

 (1)

**γ)** Από τη σχέση έχουμε:

**δ)** Όταν το σώμα κινείται η εξίσωση της δυναμικής είναι:

(2)

Με βάση τη σχέση (1), η κίνηση συμβαίνει για επομένως αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στην εξίσωση (2) έχουμε για την αρχική τιμή του :

Δεδομένου ότι ισχύει διαπιστώνουμε ότι το πρόσημο της αρχικής τιμής είναι θετικό, κάτι που είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι το σώμα θα κινηθεί.

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Ένα πιάτο βρίσκεται πάνω στο τραπεζομάντηλο ενός λείου τραπεζιού. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ πιάτου και τραπεζομάντηλου είναι μ. Τραβάμε το τραπεζομάντηλο με σταθερή οριζόντια δύναμη F έτσι ώστε το πιάτο να παραμένει ακίνητο ως προς το τραπεζομάντηλο (ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι πιάτο και τραπεζομάντηλο κινούνται μαζί).

α) Να σχεδιάσετε, εξηγώντας αναλυτικά τις δυνάμεις που θεωρείτε, τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για το πιάτο και το τραπεζομάντηλο.

β) Με βάση την προηγούμενη απάντησή σας να βρείτε τη μέγιστη τιμή της F έτσι ώστε το πιάτο να παραμένει ακίνητο ως προς το τραπεζομάντηλο.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το πιάτο απεικονίζεται παρακάτω:

|  |
| --- |
| Picture2_24_10_2011 |

όπου mg το βάρος του πιάτου, Τ η στατική τριβή και Ν η κάθετη αντίδραση που δέχεται από το τραπεζομάντηλο. Για τη φορά της στατικής τριβής βλέπε παρακάτω.

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για και το τραπεζομάντηλο είναι:

|  |
| --- |
| Picture3_24_10_2011 |

όπου Μg το βάρος του τραπεζομάντηλου, Τ η στατική τριβή, Ν’ η κάθετη αντίδραση που δέχεται από το πιάτο (ζεύγος δράσης-αντίδρασης με τη δύναμη Ν του πιάτου άρα Ν=Ν’), F η σταθερή οριζόντια δύναμη (αυθαίρετα επιλεγμένη με φορά προς τα αριστερά) και Ν1 η κάθετη αντίδραση που δέχεται το τραπεζομάντηλο από το τραπέζι.

*Σχόλιο για τη φορά της στατικής τριβής: από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το πιάτο παρατηρήστε ότι η μοναδική οριζόντια δύναμη είναι η στατική τριβή. Επομένως, έχοντας επιλέξει τη σταθερή οριζόντια δύναμη F προς τα αριστερά, το τραπεζομάντηλο μαζί με το πιάτο κινούνται προς τα αριστερά. Επομένως, η στατική τριβή που ασκείται στο πιάτο πηγαίνει αναγκαστικά προς τα αριστερά (η μόνη κινητήρια δύναμη) και αντίστοιχα, από το νόμο δράσης, αντίδρασης, η στατική τριβή στο τραπεζομάντηλο κατευθύνεται προς τα δεξιά.*

**β)** Προκειμένου το πιάτο να παραμένει ακίνητο ως προς το τραπεζομάντηλο θα πρέπει τα δύο αυτά σώματα να κινούνται με την ίδια επιτάχυνση, α. Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης:

Πιάτο:

 (1)

 (2)

Τραπεζομάντηλο:

 (3)

 (αφού Ν’=Ν) (4)

Για τη στατική τριβή, Τ, η μέγιστη τιμή είναι:

 (5)

Από τις σχέσεις (1), (3) και (5) παίρνουμε ότι:



**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Σώμα μάζας m κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Τη χρονική στιγμή t = 0 s, όταν το σώμα έχει ταχύτητα ίση με υ0 ασκείται πάνω του κατακόρυφη σταθερή δύναμη σταθερού μέτρου F με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το σώμα για t>0.

**β)** Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης και να υπολογίσετε την επιτάχυνση, α.

**γ)** Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το σώμα, από t = 0 s μέχρι να σταματήσει, συναρτήσει των μεγεθών υ0, Τ και m.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Στο σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

το βάρος του, mg, η δύναμη F, η κάθετη αντίδραση, Ν, και η τριβή ολίσθησης, Τ. Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το σώμα για t>0 φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**β)** Οι εξισώσεις κίνησης είναι (ο οριζόντιος άξονας με φορά προς τα δεξιά συμβολίζεται με x, ενώ ο κατακόρυφος άξονας με φορά προς τα πάνω με y):

Άξονας x:  (1)

Άξονας y:  (2)

Δεδομένου ότι Τ = μ Ν οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

 (3)

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι έχουμε επιβράδυνση.

**γ)** Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη (α σταθερό), οπότε η ταχύτητα του σώματος είναι:

 (4)

και το σώμα σταματά μετά από χρόνο:

 (5)

Από τις σχέσεις (3) και (5), στο χρόνο αυτό το σώμα έχει διανύσει απόσταση, s, ίση με:



**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Σώμα μάζας m είναι δεμένο με ιδανικό νήμα μήκους R και κινείται σε κατακόρυφο κύκλο με κέντρο το Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**α)** Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το σώμα για τυχαία τιμή της γωνίας θ.

**β)** Να υπολογίσετε την επιτρόχια επιτάχυνση σε συνάρτηση με τη γωνία θ, αt (θ). Ποιος ο ρόλος της;

**γ)** Να υπολογίσετε την τάση του νήματος, Τ, όταν το σώμα έχει ταχύτητα υ και σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, όπως στο σχήμα.

**δ)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας που πρέπει να έχει το σώμα στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του έτσι ώστε να διαγράφει τον κύκλο.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις βάρους και τάσης του νήματος, Τ. Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το σώμα για τυχαία τιμή της γωνίας θ είναι:



**β)** Αναλύοντας το βάρος στο σύστημα με άξονες τη διεύθυνση της Τ (ακτινική διεύθυνση) και την κάθετη σε αυτή (εφαπτομενική διεύθυνση) έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Διαπιστώνουμε ότι η συνιστώσα mg sinθ είναι η επιτρόχια δύναμη που προκαλεί επιτρόχια επιτάχυνση αt = gsinθ, υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας.

**γ)** Στην ακτινική διεύθυνση το άθροισμα των δυνάμεων ισούται με την κεντρομόλο δύναμη οπότε:

 (1)

**δ)** Το σώμα διαγράφει οριακά τον κύκλο όταν στο ανώτατο σημείο της τροχιάς η τάση του νήματος στιγμιαία μηδενίζεται. Στο ανώτατο σημείο θ = π, οπότε η σχέση (1) γίνεται:



και η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας προκύπτει θέτοντας Τ=0: 

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Σώμα μάζας 1 Kg βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 45º. Μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου ο συντελεστής κινηματικής τριβής είναι μ. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα και ασκείται πάνω του μεταβλητή δύναμη , όπως στο διπλανό σχήμα, όπου C θετική σταθερά. Το σώμα ολισθαίνει με την ταχύτητά του να δίνεται από τη σχέση  στο διεθνές σύστημα μονάδων.

**α)** Να κάνετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σώμα όπου οι δυνάμεις που εμφανίζονται να εξηγούνται αναλυτικά. Οι δυνάμεις να συμβολίζονται με γράμματα.

**β)** Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος, α(t).

**γ)** Να υπολογίσετε τη θέση του σώματος, x(t).

**δ)** να υπολογίσετε τη διάσταση των σταθερών  και της συνάρτησης υ(t).

**ε)** να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς C στο διεθνές σύστημα μονάδων και το συντελεστή κινηματικής τριβής μ.

**στ)** να προσδιορίσετε το χρονικό διάστημα όπου το σώμα κινείται προς τα πάνω.

Δίνεται ότι g=10 m/s2

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι: το βάρος του Β, η τριβή Τ, η κάθετη αντίδραση από το κεκλιμένο επίπεδο Ν και η δύναμη F(t). To διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σώμα είναι:



Εικόνα 1

**β)** Η επιτάχυνση, α(t), δίνεται από τη σχέση:

 (1)

**γ)** Η θέση του σώματος, x(t). δίνεται από τη σχέση:



**δ)** Συμβολίζουμε με Α =  και Β = .





**ε)** αναλύουμε τις δυνάμεις στο σύστημα που φαίνεται παρακάτω:



Άξονας x:  (2)

Άξονας y:  (3)

και , (4)

αφού m=1 Kg, cos 45º= και g=10 m/s2

Από τις σχέσεις (2) και (4) λαμβάνουμε:

 (5)

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (5) βλέπουμε ότι:

 επομένως  και μ=1.

**στ)** Το σώμα κινείται προς τα πάνω όταν υ>0. Άρα, από τη σχέση έχουμε ότι:



**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Σώμα μάζας m είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ. Τη χρονική στιγμή t = 0 δίνεται στο σώμα οριζόντια ταχύτητα υ0 και ταυτόχρονα του ασκείται δύναμη κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω που το μέτρο της δίδεται από τη σχέση F = x, όπου x είναι το διάστημα που διανύει το σώμα στο οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή που το σώμα εγκαταλείπει το επίπεδο η οριζόντια ταχύτητά του είναι η μισή της αρχικής. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g. Να βρεθούν:

**α)** το διάγραμμα ελεύθερου σώματος.

**β)** η δύναμη τριβής, Τ.

**γ)** το σημείο όπου το σώμα αρχίζει να ανυψώνεται.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** το διάγραμμα ελεύθερου σώματος είναι:



**β)** Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει:

F + N = m g ⇒ N = m g – x

Όμως Τ = μ Ν = μ (m g – x)

**γ)** Στο σημείο όπου το σώμα αρχίζει να ανυψώνεται Τ = 0. Άρα:

μ (m g – x) = 0 ⇒ x = m g

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Δύο σώματα μάζας m1 και m2 συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα και ολισθαίνουν σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης  η οποία ασκείται στο σώμα m2 και σχηματίζει γωνία  με την οριζόντια κατεύθυνση. Εάν ο κοινός συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το δάπεδο είμαι , να υπολογιστεί η κοινή επιτάχυνση των δύο σωμάτων καθώς και η τάση  του νήματος.

**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Δύο σώματα μάζας m1 και m2 συνδέονται με αβαρή ράβδο και ολισθαίνουν με την επίδραση του βάρους τους μόνο, κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνία κλίσης . Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το κεκλιμένο επίπεδο είναι αντίστοιχα και , να υπολογιστεί η κοινή επιτάχυνση των δύο σωμάτων καθώς και η τάση  της ράβδου.

 **ΑΣΚΗΣΗ 10**

Ένα σώμα μάζας m1 βρίσκεται επάνω σε ένα σώμα μάζας m2 το οποίο μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβή σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι , να υπολογιστεί η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στο σώμα 2 έτσι ώστε να αποφευχθεί η ολίσθηση του σώματος 1 και να κινηθούν τα δύο σώματα μαζί.

**ΑΣΚΗΣΗ 11**

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει κάτω από την επίδραση του βάρους του. Εάν η αντίσταση του αέρα είναι , όπουμία θετική σταθερά και  η ταχύτητα του σώματος, να βρεθεί η συνάρτηση της ταχύτητας  .

**ΑΣΚΗΣΗ 12**

Ένα σώμα μάζας m βάλλεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα . Εάν η αντίσταση του αέρα είναι , όπουμία θετική σταθερά και  η ταχύτητα του σώματος, να βρεθεί η συνάρτηση της ταχύτητας  και μετά από πόσο χρόνο θα σταματήσει.

**ΑΣΚΗΣΗ 13**

Μια βάρκα κινείται με ταχύτητα και ξαφνικά η μηχανή της σταματά. Εάν η δύναμη τριβής της βάρκας με το νερό είναι , όπουμία θετική σταθερά και  η ταχύτητα της, να βρεθεί σε πόσο χρόνο η ταχύτητα της βάρκας θα έχει υποδιπλασιαστεί.