Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ' 2012
''ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ''
Διδάσκων : Δρ. Γ. Σμυρλής, Επίκ. Καθηγητής
Αιγάλεω, 04/07/2012

Θέμα 1 : Να λυθούν οι παρακάτω ΣΔΕ α′ τάξης:
(i) $(1+x^2)y' = xe^y$ (1 μ.) **(ii)** $xy' + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2}$, $x > 0$. (1,5 μ.)

Θέμα 2 : Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές ΣΔΕ β′ τάξης:

(i)

$$y'' \ + \ y = \frac{1}{\cos x} \ .$$

[*Υπόδειξη*: Βρείτε ειδική λύση με τη μέθοδο Lagrange.] (1,5 μ.)

(ii)

$$y'' + 6y' + 9y = (x+1)e^{-3x}.$$

[*Υπόδειξη*: Αναζητήστε ειδική λύση της μορφής $y_m(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{-3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.]

(1,5 μ.)

Θέμα 3 : Εάν $z = f(x,y)$ και

$$x = e^{u+w}, \qquad y = e^{uw},$$

να δείξετε ότι

$$\frac{z_u \ - \ z_w}{u \ - \ w} = \ -yf_y.$$

(1,5 μ.)

Θέμα 4 : **(i)** Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου (Π) της επιφάνειας

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 2$$

στο σημείο $M_0(1, 1, 0)$. (1,5 μ.)

(ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης

$$\gamma : \quad x = \cos t - t, \qquad y = e^t, \qquad z = t^2, \qquad t \in \mathbb{R}$$

στο σημείο M_0 βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (Π). (1 μ.)

Θέμα 5 : Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$$

ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία. (1,5 μ.)

Θέμα 6 : Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy$, όπου D ο δακτύλιος που περικλείεται από τους κύκλους

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

(*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιήσετε πολικές συντεταγμένες.) (1,5 μ.)

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 12,5
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1: (i) Η Δ.Ε. γράφεται :

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=xe^y \Leftrightarrow e^{-y}dy=\frac{x}{1+x^2}dx \Leftrightarrow \int e^{-y}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx+c$$

και τελικά

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

Η τελευταία είναι το Γενικό Ολοκλήρωμα της Δ.Ε.

(ii) Διαιρώντας και τα δύο μέλη της δ.ε. με $x>0$ πορκύπτει η δ.ε.

$$y'+\frac{3}{x}y=\frac{\sin x}{x^3}\ .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=e^{\int p(x)dx},$$

όπου $p(x)=\dfrac{3}{x}$.
Έχουμε

$$\int p(x)dx=3\int\frac{1}{x}dx=3\ln x,$$

οπότε

$$\varphi(x)=e^{3\ln x}=(e^{\ln x})^3=x^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας και δύο μέλη της Δ.Ε. με $\varphi(x)=x^3$, η Δ.Ε. γράφεται

$$[\ y(x)x^3\ ]'=\varphi(x)\frac{\sin x}{x^3}=x^3\cdot\frac{\sin x}{x^3}=\sin x,$$

ή

$$y(x)x^3 = \int \sin x dx + c = -\cos x + c \;\Leftrightarrow\; y(x) = \frac{-\cos x + c}{x^3}, \quad x > 0.$$

Θέμα 2: **(i)** Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i,$$

οπότε η Γενική Λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Για την εύρεση ειδικής λύσης της μη ομογενούς ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία (μέθοδος Lagrange):

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ h(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & h(x) \end{vmatrix},$$

όπου

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad h(x) = \frac{1}{\cos x}\ .$$

Έχουμε

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$W_1(x) = -y_2(x)h(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad W_2(x) = y_1(x)h(x) = 1.$$

Μια ειδική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y_m(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x,$$

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} = \ln|\cos x|,$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx = \int dx = x\ .$$

Επομένως,

$$y_m(x) = (\ln|\cos x|)\cos x + x\sin x$$

και άρα, η Γενική Λύση της μη ομογενούς είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_m(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + (\ln|\cos x|)\cos x + x\sin x.$$

(ii) Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3(\text{διπλή}),$$

οπότε η Γενική Λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_o(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Η μη ομογενής γράφεται σε τελεστική μορφή ως εξής:

$$(D^2 + 6D + 9)y(x) = (x+1)e^{-3x} \Leftrightarrow (D+3)^2 y(x) = (x+1)e^{-3x},$$

όπου $D = d/dx$ ο τελεστής διαφόρισης.
Αντικαθιστώντας στην παραπάνω όπου y την

$$y_m(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{-3x},$$

παίρνουμε

$$(D+3)^2[\ (Ax^3+Bx^2)e^{-3x}\ ] = (x+1)e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-3x}(D+3-3)^2[\ (Ax^3+Bx^2)\ ] = (x+1)e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow (Ax^3+Bx^2)'' = x+1$$

και τελικά

$6Ax+2B = x+1 \Leftrightarrow (\ 6A=1, \quad 2B=1) \Leftrightarrow (A=1/6, \quad B=1/2).$

Άρα,

$$y_m(x) = \left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-3x}\ .$$

Η Γενική Λύση της μη ομογενούς είναι

$$\begin{aligned} y(x) = y_o(x)+y_m(x) &= c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-3x} \\ &= e^{-3x}\left(c_1+c_2x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)\ . \end{aligned}$$

Θέμα 3: Από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$z_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\ ,$$

$$z_w = \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}\ .$$

Αλλά,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{u+w}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(u+w) = x, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = e^{uw}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uw) = wy$$

και

$$\frac{\partial x}{\partial w} = e^{u+w} \cdot \frac{\partial}{\partial w}(u+w) = x, \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = e^{uw} \cdot \frac{\partial}{\partial w}(uw) = uy.$$

Επομένως,

$$z_u = xf_x \ + \ wyf_y, \quad z_w = xf_x \ + \ uyf_y$$

$$\Rightarrow \ z_u \ - \ z_w = yf_y(w \ - \ u)$$

$$\Rightarrow \ \frac{z_u \ - \ z_w}{u \ - \ w} = -yf_y.$$

Θέμα 4: **(i)** Η εξίσωση της επιφάνειας S γράφεται

$$F(x,y,z) = 0,$$

όπου

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \ - \ xyz - 2.$$

Έχουμε

$$F_x = 2x \ - \ yz, \quad F_y = 2y \ - \ xz, \quad F_z = 2z \ - \ xy.$$

Ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο $M_0(1,1,0)$ είναι η κλίση

$$\nabla F(M_0) = (F_x(M_0),\ F_y(M_0),\ F_z(M_0)) = (2,2,-1).$$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο M_0 είναι

$$(2,2,-1)\cdot(x-1,\ y-1,\ z-0) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x+2y-z = 4.$$

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας της καμπύλης στο σημείο M_0 είναι κάθετο στο διάνυσμα κλίσης $\nabla F(M_0)$.

Από τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης έχουμε

$$x'(t) = -\sin t - 1, \quad y'(t) = e^t, \quad z'(t) = 2t.$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας της γ στο $M_0(1,1,0) = \gamma(0)$ είναι

$$\vec{v} = (x'(0), y'(0), z'(0)) = (-1, 1, 0).$$

Επομένως,

$$\vec{v} \cdot \nabla F(M_0) = (-1,1,0) \cdot (2,2,-1) = 0$$

και άρα $\vec{v} \perp \nabla F(M_0)$.

Θέμα 5: Είναι

$$f_x = 3x^2 \ + \ 6x = 3x(x+2), \qquad f_y = 3y^2 \ - \ 6y = 3y(y-2).$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$f_x = 0, \qquad f_y = 0$$

απ' όπου παίρνουμε

$$[x = 0 \ \text{ ή } \ x = -2] \quad \text{και} \quad [y = 0 \ \text{ ή } \ y = 2].$$

Προκύπτουν 4 κρίσιμα σημεία:

$$O(0,0), \quad A(-2,2), \quad B(0,2) \quad C(-2,0).$$

Στη συνέχεια θα χαρακτηρίσουμε τα κρίσιμα σημεία με το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου.

Έχουμε

$$f_{xx} = 6x + 6, \qquad f_{yy} = 6y - 6, \qquad f_{xy} = 0.$$

Η Εσσιανή ορίζουσα είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (6x+6)(6y-6) - 0^2 = 36(x+1)(y-1).$$

- $\Delta(0,0) = \Delta(-2,2) = -36 < 0$, οπότε η f παρουσιάζει στα σημεία O, A σαγματικό σημείο.

- $\Delta(0,2) = 36 > 0$, $\quad f_{xx}(0,2) = 6 > 0$, οπότε η f παρουσιάζει στο σημείο B τοπικό ελάχιστο.

- $\Delta(-2,0) = 36 > 0$, $\quad f_{xx}(-2,0) = -6 < 0$, οπότε η f παρουσιάζει στο σημείο C τοπικό μέγιστο.

Θέμα 6: Εάν (r, φ) οι πολικές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου (x, y) του δακτυλίου D, τότε

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad 1 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Το διπλό ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int\int_{D'} e^{r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r e^{r^2} dr \right) d\varphi.$$

Έχουμε

$$\int_1^2 r e^{r^2} dr = \frac{1}{2} \left[e^{r^2} \right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e),$$

οπότε

$$I = \frac{1}{2}(e^4 - e) \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi(e^4 - e).$$