"ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ"
Ι. Σ.Δ.Ε. Α΄ ΤΑΞΗΣ

Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

Ορισμός 1: Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) α΄ τάξης είναι μια εξίσωση με άγνωστο μια πραγματική συνάρτηση $y = y(x)$ και η οποία (εξίσωση) περιέχει **οπωσδήποτε** την πρώτη παράγωγο $y' = y'(x)$ της άγνωστης συνάρτησης. Δηλ. μια ΣΔΕ α΄ τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

όπου $F(x, y, z)$ πραγματική συνάρτηση τριών μεταβλητών ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο του D του $\mathbb{R}^3$.

Σημ. ότι για λόγους που διευκολύνουν την επίλυση μιας ΣΔΕ α΄ τάξης, αντί των όρων $y(x)$, $y'(x)$ γράφουμε απλά y, y'.

Το x στην εξίσωση (1) ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y **άγνωστη συνάρτηση ή εξαρτημένη μεταβλητή.**

Παράδειγμα : Οι εξισώσεις

$$(y')^2 + xy = e^x, \quad y' + y^2 = x, \quad y' = e^y, \quad (y')^2 = e^x$$

είναι ΣΔΕ α΄ τάξης (παρατηρήστε ότι στην προτελευταία λείπει το x και στην τελευταία το y), ενώ η εξίσωση

$$y^2 + x^2 = 1$$

δεν είναι ΣΔΕ.

Ορισμός 2: Λύση της ΣΔΕ (1) ονομάζουμε κάθε πραγματική συνάρτηση $y(x)$ ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in I$,

$$(x, y(x)) \in D, \qquad F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Παραδείγματα:

(i) Η ΣΔΕ $y' = 0$ δίνει απ' ευθείας $y = c$, όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Δηλ. οι λύσεις της είναι όλες οι σταθερές πραγματικές συναρτήσεις.

(ii) Η ΣΔΕ $y' = 2x$ με ολοκλήρωση και των δύο μελών δίνει

$$y = x^2 + c,$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Οι λύσεις της ΣΔΕ είναι όλες οι συναρτήσεις που έχουν την παραπάνω μορφή.

(iii) Η ΣΔΕ $yy' = x$ γράφεται

$$2yy' = 2x \Leftrightarrow (y^2)' = 2x$$

και με ολοκλήρωση,

$$y^2 = x^2 + c,$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Σημείωση: Για ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$[\ y' = f(x), \quad x \in I\ ] \ \Leftrightarrow \ [\ y = \int f(x)dx + c, \quad x \in I\ ].$$

Ακολουθώντας διάφορες τεχνικές επίλυσης συνήθως προσπαθούμε να απαλείψουμε την παράγωγο y' από τη ΣΔΕ (1), οπότε σε αυτή την περίπτωση καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής

$$G(x, y, c) = 0, \tag{2}$$

όπου $G(x, y, z)$ πραγματική συνάρτηση τριών μεταβλητών και c αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Η εξίσωση (2) λέγεται **γενικό ολοκλήρωμα** της (1).

Π.χ. στο παραπάνω παράδειγμα (iii), η εξίσωση $y^2 = x^2 + c$ είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ $yy' = x$.

Στην περίπτωση που μπορούμε να λύσουμε την (2) ως προς $y = y(x)$ πάνω σε ένα ανοικτό διάστημα I, παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής

$$y = \varphi(x, c), \quad x \in I \tag{3}$$

όπου $\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και c αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Η εξίσωση (3) λέγεται **γενική λύση** της (1).

Π.χ. στα παραδείγματα (i),(ii) βρήκαμε τη γενική λύση της ΣΔΕ.

Α. ΣΔΕ α′ τάξης χωριζομένων μεταβλητών.

Μια ΣΔΕ α′ τάξης ονομάζεται **χωριζομένων μεταβλητών** αν είναι της μορφής

$$y' = f(x)g(y), \tag{4}$$

της οποίας το δεύτερο μέλος αποτελείται από δύο παράγοντες εκ των οποίων ο ένας εξαρτάται μόνο από το x και ο άλλος μόνο από το y.

Η (4) γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

και με ολοκλήρωση και των δύο μελών παίρνουμε το γενικό ολοκλήρωμα της (4)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \;+\; c.$$

Παραδείγματα:
(i) Να λυθεί η ΣΔΕ $x^2y' = y$.
Λύση: Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$x^2\frac{dy}{dx} = y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{y} = x^{-2}dx \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{y}dy = \int x^{-2}dx + c$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln|y| = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$\Leftrightarrow\quad |y| = e^{-1/x\,+\,c}$$

(η τελευταία είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ.).

(ii) Να λυθεί η ΣΔΕ $yy' = (y^2+1)(x+1)$.
Λύση: Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$y\frac{dy}{dx} = (y^2+1)(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y}{y^2+1}dy = (x+1)dx \;\Leftrightarrow\; \int \frac{y}{y^2+1}dy = \int (x+1)dx + c$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\int \frac{(y^2+1)'}{y^2+1}dy = \int (x+1)dx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{(x+1)^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y^2+1) = (x+1)^2 + 2c$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 + 1 = e^{(x+1)^2 \, + \, 2c}$$

(η τελευταία είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ).

(iii) Να λυθεί η ΣΔΕ $y' = e^{x+y}$.
Λύση: Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y}dy = e^x dx \;\Leftrightarrow\; \int e^{-y}dy = \int e^x dx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-y} = e^x + c$$

(η τελευταία είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ).

(iv) Να λυθεί η ΣΔΕ $(x^2+1)y' = y$.
Λύση: Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2+1} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{y}dy = \int \frac{dx}{x^2+1} + c \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \mathrm{Arctanx} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = e^{\mathrm{Arctanx} \, + \, c}$$

(η τελευταία είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ.).

(v) Να λυθεί η ΣΔΕ $y'e^x = x\cos^2 y$.
Λύση: Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{dy}{dx}e^x = x\cos^2 y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = xe^{-x}dx \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int xe^{-x}dx + c.$$

Είναι

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \tan y,$$

ενώ εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο ολοκλήρωμα του β′ μέλους έχουμε

$$\int xe^{-x}dx = -\int x(e^{-x})'dx = -xe^{-x} + \int (x)'e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

Συνεπώς, το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ είναι

$$\tan y = -(x+1)e^{-x} + c.$$

(vi) Να λυθεί η ΣΔΕ $y' \sin y = x^2 \cos y$.
Λύση: Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}\sin y = x^2\cos y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin y}{\cos y}dy = x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int x^2 dx + c \\
&\Leftrightarrow \quad -\int \frac{(\cos y)'}{\cos y}dy = \frac{x^3}{3} + c \Leftrightarrow -\ln|\cos y| = \frac{x^3}{3} + c \\
&\Leftrightarrow \quad |\cos y| = e^{-x^3/3 \,-\, c}
\end{aligned}$$

(η τελευταία είναι το γενικό ολοκλήρωμα της ΣΔΕ).

B. Γραμμικές ΣΔΕ α′ τάξης.

Μια ΣΔΕ της μορφής

$$y' \; + \; p(x)y \; = \; q(x) \tag{5}$$

όπου $p(x)$, $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις πάνω σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμική ΣΔΕ α′ τάξης**.

Για την επίλυση της (5) αναζητούμε μια συνάρτηση $\varphi(x)$ με την εξής ιδιότητα: αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (5) με $\varphi(x)$, να προκύψει η εξίσωση

$$[\; \varphi(x)y(x) \;]' \; = \; \varphi(x)q(x), \quad x \in I. \tag{6}$$

Δηλ. μια τέτοια συνάρτηση θα ικανοποιεί

$$\varphi(x)[\; y' \; + \; p(x)y \;] = [\; \varphi(x)y(x) \;]'$$

ή

$$\varphi(x)y' \; + \; \varphi(x)p(x)y = \varphi'(x)y \; + \; \varphi(x)y'$$

ή

$$\varphi(x)p(x)y = \varphi'(x)y.$$

Αρκεί λοιπόν να ικανοποιεί

$$\varphi'(x) = \varphi(x)p(x) \Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = p(x) \Leftrightarrow \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int p(x)dx + c \quad \Leftrightarrow \quad \ln|\varphi(x)| = \int p(x)dx + c$$

$$\Leftrightarrow \quad |\varphi(x)| = e^{\int p(x)dx \, + \, c}.$$

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την τελευταία, οπότε και την (6), είναι η

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx}. \tag{7}$$

Στην πράξη, για να λύσουμε την (5), θεωρούμε εξ' αρχής τη συνάρτηση φ που δίνεται από την (7). Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (5) με φ παίρνουμε απ' ευθείας την (6), απ' όπου με ολοκλήρωση προκύπτει

$$\varphi(x)y(x) = \int \varphi(x)p(x)dx + c$$

ή

$$y(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\left[\int \varphi(x)p(x)dx + c\right].$$

Η τελευταία είναι η γενική λύση της (5).

Παραδείγματα:

(i) Να λυθεί η ΣΔΕ $y' - xy = -x$.

Λύση: Η ΣΔΕ είναι γραμμική με $p(x) = -x$ και $q(x) = -x$. Σύμφωνα με τη θεωρία, γράφεται ισοδύναμα

$$[\ \varphi(x)y(x)\ ]' = -x\varphi(x),$$

όπου

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int x dx} = e^{-x^2/2}.$$

Επομένως,

$$[\ y(x)e^{-x^2/2}\ ]' = -xe^{-x^2/2} \ \Leftrightarrow\ y(x)e^{-x^2/2} = -\int xe^{-x^2/2}dx + c = \int(-x^2/2)'e^{-x^2/2}dx + c = e^{-x^2/2} + c,$$

ή

$$y(x) = 1 + c\ e^{x^2/2}$$

που είναι η γενική της λύση.

Παρατήρηση: Η παραπάνω ΣΔΕ είναι ταυτόχρονα και χωριζομένων μεταβλητών! (Να λυθεί και με αυτή τη μέθοδο).

(ii) Να λυθεί η ΣΔΕ

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}\ , \quad x > 0.$$

Λύση: Η ΣΔΕ είναι γραμμική με $p(x) = 2/x$ και $q(x) = \cos x/x^2$. Σύμφωνα με τη θεωρία, γράφεται ισοδύναμα

$$[\ \varphi(x)y(x)\ ]' = \varphi(x)\frac{\cos x}{x^2},$$

όπου

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = x^2.$$

Επομένως,

$$[\ x^2y(x)\ ]' = x^2 \cdot \frac{\cos x}{x^2} = \cos x \ \Leftrightarrow\ x^2y(x) = \int \cos x\ dx + c = \sin x + c$$

και συνεπώς η γενική λύση της ΣΔΕ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι

$$y(x) = \frac{\sin x + c}{x^2}\ , \quad x > 0.$$

(iii) Να λυθεί η ΣΔΕ

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{3}{x^2}\ , \quad x > 0.$$

Λύση: Η ΣΔΕ είναι γραμμική με $p(x) = -3/x$ και $q(x) = 3/x^2$. Σύμφωνα με τη θεωρία, γράφεται ισοδύναμα

$$[\ \varphi(x)y(x)\ ]' = \frac{3}{x^2}\varphi(x),$$

όπου

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}.$$

Επομένως,

$$[\ y(x)x^{-3}\ ]' = x^{-3}\cdot\frac{3}{x^2} \ \Leftrightarrow\ y(x)x^{-3} = 3\int x^{-5}dx + c = 3\frac{x^{-4}}{-4} + c$$

ή

$$y(x) = cx^3 - \frac{3}{4x}, \quad x > 0,$$

που είναι η γενική της λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(iv) Να λυθεί η ΣΔΕ $y' + (1+2x)y = e^{-x^2}$.

Λύση: Η ΣΔΕ είναι γραμμική με $p(x) = 1 + 2x$ και $q(x) = e^{-x^2}$. Σύμφωνα με τη θεωρία, γράφεται ισοδύναμα

$$[\ \varphi(x)y(x)\ ]' = \varphi(x)e^{-x^2},$$

όπου

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (1+2x)dx} = e^{x+x^2}\ .$$

Επομένως,

$$[\ e^{x+x^2}y(x)\ ]' = e^{x+x^2}\cdot e^{-x^2} = e^x\cdot e^{x^2}\cdot e^{-x^2} = e^x \ \Leftrightarrow\ e^{x+x^2}y(x) = \int e^x\ dx + c = e^x + c,$$

ή

$$y(x) = e^{-x^2}(1 + ce^{-x}),$$

που είναι η γενική λύση της ΣΔΕ.

(v) Να λυθεί η ΣΔΕ $xy' + (1+x)y = e^{-x}, \quad x > 0$.

Λύση: Η ΣΔΕ είναι γραμμική αλλά, για να εφαρμόσουμε τη γνωστή μέθοδο επίλυσης, θα πρέπει ο συντελεστής του όρου y' να είναι 1. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $x > 0$ προκύπτει η ΣΔΕ

$$y' + \left(\frac{1}{x} + 1\right) y = \frac{e^{-x}}{x}$$

που έχει τη γνωστή μορφή με

$$p(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad q(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία, γράφεται ισοδύναμα

$$[\ \varphi(x)y(x)\ ]' = \varphi(x)\frac{e^{-x}}{x},$$

όπου

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx}\ .$$

Είναι

$$\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} + \int dx = \ln x + x \Rightarrow \varphi(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\ln x} \cdot e^{x} = xe^{x},$$

οπότε

$$[\ xe^{x}y(x)\ ]' = xe^{x} \cdot \frac{e^{-x}}{x} = 1 \ \Leftrightarrow\ xe^{x}y(x) = \int\ dx + c = x + c,$$

ή

$$y(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{c}{x}\right), \quad x > 0,$$

που είναι η γενική λύση της ΣΔΕ.

Γ. Πλήρεις ΣΔΕ α΄ τάξης.

Μια ΣΔΕ που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P(x,y)dx \ + \ Q(x,y)dy \ = \ 0, \tag{8}$$

όπου $P(x,y)$, $Q(x,y)$ συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών πάνω σε ένα ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$, λέγεται **πλήρης ή ακριβής ή ολικού διαφορικού** στο D, εάν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών $F(x,y)$ πάνω στο D τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y), \quad (x,y) \in D. \tag{9}$$

Εάν βρούμε μια συνάρτηση F που ικανοποιεί την (9) τότε το α΄ μέλος της (8) ταυτίζεται με το ολικό διαφορικό dF της F και η (8) γράφεται

$$dF = 0 \Longleftrightarrow F(x,y) = c,$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Η εξίσωση

$$F(x,y) = c$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (8).

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για το πότε η ΣΔΕ (8) είναι πλήρης και ταυτόχρονα μας δίνει και το γενικό της ολοκλήρωμα.

Πρόταση: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις P, Q και οι μερικές τους παράγωγοι P_x , P_y , Q_x , Q_y είναι συνεχείς στο απλά συνεκτικό χωρίο D (δηλ. το D είναι ανοικτό χωρίο που δεν έχει ``τρύπες''). Η ΣΔΕ (8) είναι πλήρης αν και μόνο αν

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \ , \quad \text{για όλα τα } \ (x,y) \in D.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, το γενικό ολοκλήρωμα της (8) στο D δίνεται από τη σχέση

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y)\, dt \ + \ \int Q(x_0\,,y)\, dy = c\ , \quad (x,y) \in D$$

(το x_0 επιλέγεται τυχαία ώστε να ορίζονται οι P, Q και να απλοποιούνται οι υπολογισμοί).

Παραδείγματα: Για τις παρακάτω ΣΔΕ να δείξετε ότι είναι πλήρεις και να τις λύσετε.
(i) $(2x+y)dx \ + \ (x+2y)dy = 0.$
Λύση: Θέτουμε

$$P(x,y) = 2x+y, \quad Q(x,y) = x+2y$$

και έχουμε

$$P_y = 1 = Q_x \ .$$

Συνεπώς, η ΣΔΕ είναι πλήρης με γενικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^x P(t,y)dt + \int Q(0,y)dy = c \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^x (2t+y)dt + \int 2ydy = c \\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^x 2tdt + \int_0^x ydt + y^2 = c \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y(x-0) + y^2 = c \ \Leftrightarrow \ x^2 + xy + y^2 = c.\end{aligned}$$

(ii) $(e^y+y)dx \ + \ x(e^y+1)dy = 0.$
Λύση: Θέτουμε

$$P(x,y) = e^y + y, \quad Q(x,y) = x(e^y+1)$$

και έχουμε

$$P_y = e^y + 1 = Q_x \ .$$

Συνεπώς, η ΣΔΕ είναι πλήρης με γενικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^x P(t,y)dt + \int Q(0,y)dy = c \Leftrightarrow \int_0^x (e^y+y)dt + \int 0dy = c \Leftrightarrow x(e^y+y) = c.$$

(iii) $(e^x \sin y \ + \ \cos x)dx \ + \ (e^x \cos y + 3e^{3y})dy = 0.$
Λύση: Θέτουμε

$$P(x,y) = e^x \sin y \ + \ \cos x, \quad Q(x,y) = e^x \cos y + 3e^{3y}$$

και έχουμε

$$P_y = e^x \cos y = Q_x \ .$$

Συνεπώς, η ΣΔΕ είναι πλήρης με γενικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int_0^x P(t,y)dt + \int Q(0,y)dy = c \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^x (e^t \sin y \ + \ \cos t)dt + \int (\cos y + 3e^{3y})dy = c \\
&\Leftrightarrow \quad \sin y \int_0^x e^t dt + \int_0^x \cos t dt + \int \cos y dy + \int 3e^{3y} dy = c \\
&\Leftrightarrow \quad \sin y(e^x - 1) + \sin x + \sin y + e^{3y} = c \\
&\Leftrightarrow \quad e^x \sin y + \sin x + e^{3y} = c.
\end{aligned}$$

(iv) $\left(\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^2}{x}\right) dx - \left(\dfrac{x^3}{3y^2} + 2y \ln x\right) dy = 0, \ x > 0.$

Λύση: Θέτουμε

$$P(x,y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}, \qquad Q(x,y) = -\frac{x^3}{3y^2} - 2y \ln x$$

κι έχουμε

$$P_y = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{2y}{x}, \qquad Q_x = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{2y}{x} \Longrightarrow P_y = Q_x$$

και άρα η ΣΔΕ είναι πλήρης. Το γενικό της ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned}
\int_1^x P(t,y)dt + \int Q(1,y)dy = c \quad &\Leftrightarrow \quad \int_1^x \left(\frac{t^2}{y} - \frac{y^2}{t}\right) dt - \int \frac{1}{3y^2} dy = c \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \int_1^x t^2 \ dt \ - \ y^2 \int_1^x \frac{1}{t} \ dt \ + \ \frac{1}{3y} = c \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3 - 1}{3y} - y^2 \ln x + \frac{1}{3y} = c \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{3y} - y^2 \ln x = c.
\end{aligned}$$

(v) $(\ln x + 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0.$

Λύση:
Θέτουμε

$$P(x,y) = \ln x + 2xy^3, \quad Q(x,y) = 3x^2y^2$$

και έχουμε

$$P_y = 6xy^2, \quad Q_x = 6xy^2,$$

δηλ.

$$P_y = Q_x$$

και συνεπώς η ΣΔΕ είναι πλήρης με γενικό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_1^x P(t,y)dt + \int Q(1,y)dy = c \quad &\Leftrightarrow \quad \int_1^x (\ln t + 2ty^3)dt + \int 3y^2 dy = c \\ &\Leftrightarrow \quad \int_1^x \ln t \; dt + y^3 \int_1^x 2tdt + \int 3y^2 dy = c.\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\int_1^x 2tdt = x^2 - 1, \qquad \int 3y^2 dy = y^3.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_1^x \ln tdt$$

εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln tdt = \int_1^x (t)' \ln tdt \quad &= \quad [t \ln t]_1^x \; - \; \int_1^x t(\ln t)' dt = x \ln x \; - \; \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \quad x \ln x \; - \; \int_1^x dt = x \ln x \; - \; x + 1.\end{aligned}$$

Επομένως, το γενικό ολοκλήρωμα είναι

$$x \ln x - x + 1 + y^3(x^2 - 1) + y^3 = c \; \Leftrightarrow \; x \ln x - x + y^3 x^2 = c_1$$

(θέσαμε $c_1 = c - 1$).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Άσκηση 1: Να λύσετε τις παρακάτω Σ.Δ.Ε. με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών:

(i) $y' = ye^{-x}$ (ii) $(1+x^2)y' = yx$ (iii) $y' = \dfrac{(2x-1)y}{x}$

(iv) $xe^{x+y} = yy'$ (v) $y' = \dfrac{x\cos y}{e^x \sin y}$ (vi) $yy' = (y^2+1)(x^2+1)$.

Άσκηση 2: Να λύσετε τα παρακάτω Π.Α.Τ. (Προβλήματα Αρχικών Τιμών):

(i) $y' = \dfrac{(x^2+2)(y+1)}{xy}, \quad y(1) = \sqrt{e} - 1$

(ii) $y' = ye^{-x}, \quad y(0) = e$

(iii) $y' = \dfrac{y^3+2y}{x^2+3x}, \quad y(1) = 1.$

Άσκηση 3: Να λύσετε τις παρακάτω γραμμικές ΣΔΕ:

(i) $y' + (1+2x)y = e^{-x^2}$ (ii) $y' + y = e^{-x}$

(iii) $y' - (\tan x)y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

(iv) $xy' - 2y = x^3 \cos x$ (v) $y' - y = (2x-1)e^{x^2}$ (vi) $(1+x^2)y' + 2xy = 4x^3$.

Άσκηση 4: Να λύσετε τα παρακάτω Π.Α.Τ. (Προβλήματα Αρχικών Τιμών):

(i) $y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1$

(ii) $y' + y = \sin x, \quad y(0) = 1$

(iii) $y' - y = (2x-1)e^{x^2}, \quad y(0) = 2$

(iv) $(1+x^2)y' + 2xy = 4x^3, \quad y(0) = -1$

(v) $xy' - y = \sqrt{x}, \quad y(4) = 0$

Άσκηση 5: Για τις παρακάτω Σ.Δ.Ε. να δείξετε ότι είναι πλήρεις και να τις λύσετε:

(i) $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$

(ii) $(2xy + 1)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

(iii) $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$

(iv) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

(v) $(7x - 2\cos y)dx + 2x \sin y dy = 0$

(vi) $(e^x \sin y - 2y \sin x)dx \ + \ (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0.$