Μάθημα 2

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

2.1 Ορισμός και βασικά θεωρήματα

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα 1 Θεώρημα 1.1 το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace:

Θεώρημα 2.1 - 1. *Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι*

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ όπου $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{2.1 - 1}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για κάθε $s > \gamma$.

Από το Θεώρημα 2.1 - 1 προκύπτουν:

Παρατήρησεις 2.1 - 1

i) αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής στο $[0, +\infty)$ και εκθετικής τάξης, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$.

ii) Έστω ότι $f(t)$, $g(t)$ δύο συνατήσεις ορισμένες στο $[0, +\infty)$. Τότε, αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και αν η συνάρτηση $g(t)$ διαφέρει από τη $f(t)$ σε πεπερασμένο μόνο πλήθος σημείων του $[0, +\infty)$, τότε υπάρχει και ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t)$ και ισχύει $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, όπως αυτό προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1 - 1

Έστω ότι $f(t) = e^{-2t}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+3}$ και

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad t = 1 \\ e^{-2t} & \text{αν} \quad t \in [0, +\infty) - \{1\}, \end{cases} \qquad \text{με} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s+3},$$

δηλαδή $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, ενώ προφανώς $f(t) \neq g(t)$.

Από την Παρατήρηση 2.1 - 1 (ii) προκύπτει ότι, αν $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f(t)$ της $\mathcal{L}^{-1}F(s)$, τότε η $f(t)$ δεν είναι πάντοτε μονοσήμαντα ορισμένη.

Το μονοσήμαντο του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{L}^{-1}$ εξασφαλίζεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1 - 2. *Έστω ότι η $f(t)$ είναι μια πραγματική, συνεχής ή τμηματικά συνεχής, εκθετικής τάξης συνάρτηση για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν για το μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ ορίζει μονοσήμαντα την $f(t)$.*

Στο εξής θα θεωρείται ότι οι συναρτήσεις πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Θεώρημα 2.1 - 2, οπότε η αντίστροφη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace θα είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace ισχύουν ανάλογα και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Οι σημαντικότερες από αυτές δίνονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 2.1 - 3 (γραμμική ιδιότητα). *Αν* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *και* $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, *τότε αν* $k, \lambda \in \Re$ *ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[kF(s) + \lambda G(s)] &= k\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \lambda\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \\ &= kf(t) + \lambda g(t). \qquad (2.1 - 2) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1 - 2

Έστω $f(t) = e^{-3t}$ και $g(t) = e^t$. Τότε

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{s+3} = F(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left[e^{t}\right] = \frac{1}{s-1} = G(s),$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 - 3 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[2\,F(s) + 5\,G(s)] = 2\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + 5\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2\,e^{-3t} + 5\,e^{t}.$$

Θεώρημα 2.1 - 4. *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k}\,f\left(\frac{t}{k}\right) \quad \textit{με} \quad k > 0. \qquad (2.1 - 3)$$

Παράδειγμα 2.1 - 3

Έστω

$$f(t) = \cos 4t, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2+16} = F(s).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 - 4, όταν $k = 2$, έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\mathbf{2}s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{2}s}{(\mathbf{2}s)^2+16}\right] = \frac{1}{\mathbf{2}}\cos\left(4\frac{t}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Θεώρημα 2.1 - 5 (προπορείας). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at}f(t), \quad \textit{όταν} \quad s + a > 0 \ \textit{και} \ a > 0. \qquad (2.1 - 4)$$

Παράδειγμα 2.1 - 4

Έστω $f(t)=\sin 2t$, οπότε $F(s)=\frac{2}{s^2+4}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 - 5 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+\underbrace{(-1)}_{a=-1})^2+4}\right]=e^{-(-1)\,t}\sin 2t=e^{t}\sin 2t.$$

Το Θεώρημα 2.1 - 6 και το Παράδειγμα 2.1 - 5 να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Θεώρημα 2.1 - 6 (υστέρησης). *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]=\begin{cases} f(t-a) & \alpha\nu \quad t>a \\ 0 & \alpha\nu \quad t<a, \end{cases} \qquad \text{όταν} \quad a>0. \qquad (2.1 - 5)$$

Παράδειγμα 2.1 - 5

Έστω $f(t)=\cos t$, οπότε $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 - 6 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s\overbrace{\pi/3}^{a=\pi/3}}F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s\,e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right]=\begin{cases} \cos(t-\pi/3) & \text{αν} \quad t>\pi/3 \\ 0 & \text{αν} \quad t<\pi/3. \end{cases}$$

Θεώρημα 2.1 - 7. *Αν* $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$, *τότε*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right]=(-1)^n\,t^n f(t). \qquad (2.1 - 6)$$

Παράδειγμα 2.1 - 6

Όμοια έστω $f(t)=\cos t$, οπότε $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 - 7 έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(2)}(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^{(2)}=(-1)^2\,t^2\cos t=t^2\cos t.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός των Θεωρημάτων $1.2-6$ και $1.2-7$ του Μαθήματος 1 παραλείπεται.

2.2 Μέθοδοι υπολογισμού

Δίνονται τώρα οι σημαντικότερες μέθοδοι προσδιορισμού της αντίστροφης συνάρτησης για μορφές της $F(s)$, που κύρια εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Με αναφορά στον Πίνακα 2.2 - 1

Παράδειγμα 2.2 - 1

Έστω
$$F(s)=\frac{1}{s^3}$$
που για ευκολία γράφεται και
$$F(s)=\frac{1}{s^{2+1}}=\frac{1}{2\,!}\,\frac{2\,!}{s^{2+1}}\,.$$
Τότε η $F(s)$ σύμφωνα με τον τύπο 3 του Πίνακα 2.2 - 1 και τη γραμμική ιδιότητα 2.1 - 3 δίνει σαν αντίστροφη συνάρτηση την
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{t^2}{2}\,.$$

Παράδειγμα 2.2 - 2

Έστω
$$F(s)=\frac{2}{s^2+4}=\frac{2}{s^2+2^2}\,.$$
Όμοια με τον τύπο 4 του Πίνακα 2.2 - 1 είναι
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sin 2t.$$

Παράδειγμα 2.2 - 3

Έστω
$$F(s)=\frac{5}{s^2+2s+37}$$
που γράφεται και
$$F(s)=\frac{5}{6}\,\frac{6}{(s+\underbrace{1}_{a=1})^2+(\underbrace{6}_{\omega=6})^2}\,.$$
Τότε ο τύπος 5 του Πίνακα 2.2 - 1 δίνει σαν αντίστροφη συνάρτηση, την
$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{5}{6}\,e^{-t}\sin 6t.$$

Πίνακας 2.2 - 1: των κυριότερων μετασχηματισμών Laplace

α/α	$f(t)$	$F(s)$	α/α	$f(t)$	$F(s)$
1	A	$\dfrac{A}{s}$	11	$e^{bt}\sinh at$	$\dfrac{a}{(s-b)^2-a^2}$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	12	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
3	$t^n;\ n=1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{n\,!}{s^{n+1}}$	13	$t^2\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega\left(3s^2-\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$
4	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	14	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
5	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	15	$t^2\cos\omega t$	$\dfrac{2s\left(s^2-3\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$
6	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	16	$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
7	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	17	$\delta(t-a)$	e^{-as}
8	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	18	$\delta'(t)$	s
9	$e^{bt}\cosh at$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	19	$\delta''(t)$	s^2
10	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	20	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{s}\right)$

Σημειώσεις 2.2 - 1

i) Όταν στον παρονομαστή υπάρχει σαν παράγοντας τριώνυμο με ρίζες μιγαδικές ($\Delta < 0$) ή ειδική περίπτωση φανταστικές, τότε ο παρανομαστής μετασχηματίζεται σε άθροισμα τετραγώνων σύμφωνα με τον τύπο

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (2.2 - 1)$$

ii) Η περίπτωση (i) εφαρμόζεται μόνον, όταν ο αριθμητής είναι βαθμού μικρότερου του παρονομαστή.

Παράδειγμα 2.2 - 4

Έστω

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+4s+5}.$$

Επειδή η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta = 4^2 - 20 = -6 < 0$ σύμφωνα με τη Σημείωση 2.2 - 1 (i) ο παρονομαστής γράφεται:

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1^2.$$

Αρχικά δημιουργείται στον αριθμητή το $s + 2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s+1}{s^2+4s+5} = \frac{2s+1}{(s+2)^2+1^2} = \frac{2s+\mathbf{4}-\mathbf{4}+1}{(s+2)^2+1^2} \\ &= \frac{2s+4\overbrace{-4+1}^{-3}}{(s+2)^2+1^2} = 2\,\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} - 3\,\frac{1}{(s+2)^2+1^2}. \end{aligned}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι συνδυασμός των τύπων 5 και 7 του Πίνακα 2.2 - 1, δηλαδή

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\,e^{-2t}\cos 2t - 3\,e^{-2t}\sin t = e^{-2t}\left(2\cos 2t - 3\sin t\right).$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων $F(s)$[1]

$i)\ \dfrac{2}{s^4}$

$ii)\ \dfrac{1}{(s+3)^2}$

$iii)\ \dfrac{2(s+2)}{s^2+4}$

$iv)\ \dfrac{s-1}{s^2-9}$

$v)\ \dfrac{1}{s^2+8s+17}$

$vi)\ \dfrac{s}{s^2-2s+1}$

$vii)\ \dfrac{6}{(s+1)^4}$

$viii)\ \dfrac{1}{9s^2+4}$

$ix)\ \dfrac{s-1}{4s^2+9}$

$x)\ \dfrac{1}{s^2+4s+4}$

$xi)\ \dfrac{4s+1}{s^2+2s+1}$

$xii)\ \dfrac{s}{s^2+s+1}\,.$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα

Έστω ότι η συνάρτηση $F(s)$ είναι ρητή, δηλαδή είναι της μορφής $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, όπου $P(s)$ και $Q(s)$ είναι ακέραια πολυώνυμα του s. Τότε, αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(s)$ είναι:

I) μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου $Q(s)$, η συνάρτηση $F(s)$ αναλύεται κατά τα γνωστά σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Παράδειγμα 2.2 - 5

Έστω

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

με ρίζες του παρονομαστή τις -1 και -2. Τότε

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}\,.$$

---

[1] $(i)\ \frac{t^3}{3},\ (ii)\ t\,e^{-3t},\ (iii)\ 2(\cos 2t + \sin 2t),\ (iv)\ \frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3},\ (v)\ e^{-4t}\sin t,\ (vi)\ e^{t}(1+t),$ $(vii)\ t^3 e^{-t},\ (viii)\ \frac{1}{6}\sin\left(\frac{2t}{3}\right),\ (ix)\ \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3t}{2}\right),\ (x)\ t\,e^{-2t},\ (xi)\ (4-3\,t)\,e^{-t},$ $(xii)\ -\frac{1}{3}e^{-t/2}\left[-3\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right].$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $(s+1)(s+2)$, έχουμε

$$s-1=(A+B)s+(A+2B).$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίσων δυνάμεων του s, προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 1 \\ A & + & 2B & = & -1, \end{array}\right\} \quad \text{οπότε} \quad A=3 \ \text{και} \ B=-2.$$

Τότε

$$F(s)=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+1}\,.$$

Άρα

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=3e^{-2t}-2e^{-t}.$$

Παράδειγμα 2.2 - 6

Όμοια, έστω

$$F(s)=\frac{1}{s\,(s^2+9)}\,.$$

Θέτοντας

$$\frac{1}{s\,(s^2+9)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+9}$$

και σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, τελικά προκύπτει

$$F(s)=\frac{1}{9}\frac{1}{s}-\frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}\,,$$

οπότε

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos 3t.$$

Παράδειγμα 2.2 - 7

Όμοια

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)^2}\,.$$

Ο παρονομαστής έχει πρωτοβάθμιο όρο υψωμένο σε δύναμη, οπότε στην περίπτωση αυτή η ανάλυση σε απλά κλάσματα έχει την παρακάτω μορφή[2]

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{\overbrace{B}^{\text{αντί } Bs+C}}{(s+2)^2}+\frac{C}{s+2}\,,$$

οπότε τελικά προκύπτει

$$F(s)=\frac{1}{9}\,\frac{1}{s-1}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{1}{9}\,\frac{1}{s+2}\,.$$

Άρα

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{9}\,e^{-2t}\left(-1-3t+e^{3t}\right).$$

Παράδειγμα 2.2 - 8

Όμοια

$$F(s)=\frac{1}{s^3\,(s^2+4)}\,.$$

Έχουμε σύμφωνα με την ανάλυση του Παραδείγματος 2.2 - 7 ότι

$$\frac{1}{s^3\,(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+4}\,,$$

οπότε

$$F(s)=-\frac{1}{16}\,\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{s^3}+\frac{1}{16}\,\frac{s}{s^2+4}\,.$$

Άρα

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{16}\left(-1+2t^2+\cos 2t\right).$$

II) Μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $Q(s)$, τότε γίνεται πρώτα η διαίρεση των πολυωνύμων, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται τελικά στην προηγούμενη[3].

---

[2] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 7.

[3] Η περίπτωση αυτή παραλείπεται.

Άσκηση

Να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, όταν η $F(s)$ είναι ίση με[4]

$i)$	$\dfrac{1}{s\,(s^2-4)}$	$v)$	$\dfrac{1}{s^3+8}$
$ii)$	$\dfrac{1}{s^3-s}$	$vi)$	$\dfrac{s}{s^4-1}$
$iii)$	$\dfrac{1}{s\,(s^2-4s+4)}$	$vii)$	$\dfrac{s+1}{s^3-1}$
$iv)$	$\dfrac{1}{s\,(s^2+\pi^2)}$	$viii)$	$\dfrac{s}{(s+2)\,(s^2+1)}\,.$

2.3 Εφαρμογές στη λύση Διαφορικών Εξισώσεων

2.3.1 Γραμμική 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωσης 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές έχει τη μορφή

$$\mathbf{y' + a\,y = r(x)}, \tag{2.3 - 1}$$

όταν α σταθερά, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$. Η αντίστοιχη **ομογενής** είναι

$$\mathbf{y' + a\,y = 0}. \tag{2.3 - 2}$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y, r \in D_{\mathcal{L}}$ και ορίζονται για κάθε $x \geq 0$. Θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της μη ομογενούς εξίσωσης $(2.3 - 1)$ έχουμε $\mathcal{L}\,(y' + ay) = \mathcal{L}[r(x)]$, που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες του

[4] $(i)\ -\frac{1}{4} + \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{e^{2t}}{8}$, $(ii)\ -1 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}$, $(iii)\ \frac{1}{4} - \frac{e^{2t}}{4} + \frac{1}{2}\,t\,e^{2t}$, $(iv)\ \frac{1}{\pi^2} - \frac{\cos \pi t}{\pi^2}$, $(v)\ \frac{e^{-2t}}{12} - \frac{1}{12}\,e^{t}\,\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{e^{t}\,\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{4\sqrt{3}}$ $(vi)\ \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{t}}{4} - \frac{\cos t}{2}$, $(vii)\ \frac{2\,e^{t}}{3} - \frac{2}{3}\,e^{-t/2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$, $(viii)\ -\frac{2}{5}\,e^{-2t} + \frac{2\cos t}{5} + \frac{\sin t}{5}$.

μετασχηματισμού Laplace[5] γράφεται

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + \alpha\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}[r(x)].$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0$ αρχική συνθήκη και λύνοντας αλγεβρικά ως προς $Y(s)$, τελικά έχουμε τον παρακάτω τύπο υπολογισμού της μετασχηματισμένης συνάρτησης $Y(s)$ της μερικής λύσης της $(2.3-1)$

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathcal{L}[\mathbf{r(x)}]}{\mathbf{s+a}} + \frac{\mathbf{y_0}}{\mathbf{s+a}} \quad \text{με} \quad s + a > 0. \qquad (2.3 - 3)$$

Τότε από από την $(2.3-3)$ προκύπτει η μερική λύση της $(2.3-1)$ ως εξής:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

Παρατήρησεις 2.3 - 1

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:

i) εφαρμόζεται κυρίως, όταν ζητείται η μερική λύση της $(2.3-1)$, δηλαδή έχουν δοθεί και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ή όταν η είσοδος $r(x)$ είναι περιοδική, μοναδιαία κρούση, κ.λπ.[6],

ii) δεν εφαρμόζεται συνήθως, όταν η $f(x)$ δεν είναι σταθερά και γενικότερα δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική μέθοδο είναι ότι η διαφορική εξίσωση λύνεται με αλγεβρικό τρόπο και εισάγονται στη λύση άμεσα, χωρίς να χρειάζεται επί πλέον υπολογισμός, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

---

[5]Βλέπε Μάθημα 1: Μετασχηματισμός Laplace

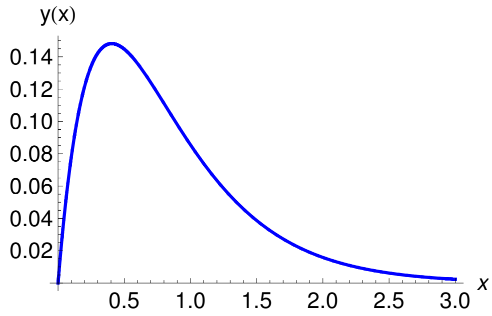
Θεώρημα 1.2-1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω $f,\, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $\kappa,\, \lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)].$$

Θεώρημα 1.2-6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \textit{με} \quad s > a > 0.$$

[6]Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 1.



Σχήμα 2.3 - 1: Παράδειγμα 2.3 - 1: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-3x}\left(-1+e^{x}\right)$, όταν $x \in [0,3]$

Παράδειγμα 2.3 - 1

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = e^{-3x}, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

Λύση. Έστω ότι η (1) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-3x}$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 2 του Πίνακα 2.2 - 1 θα είναι

$$\mathcal{L}\left[e^{-3x}\right] = \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+3>0.$$

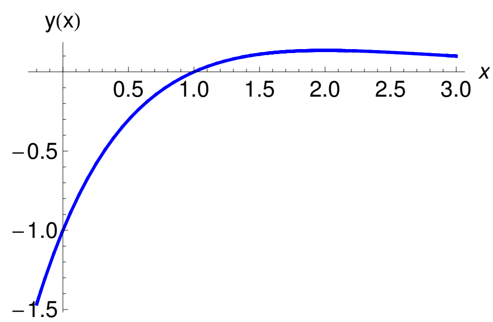
Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (1). Επειδή σύμφωνα με την (1) είναι $a=2$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = 0$ στην $(2.3-3)$ και μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα του δεξιού μέλους, προκύπτει

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+3}}{s+2} + \frac{0}{s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}, \quad \text{όταν} \quad s+2>0. \end{aligned}$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 2.3 - 1)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-2x} - e^{-3x} = e^{-3x}\left(-1+e^{x}\right).$$

■



Σχήμα 2.3 - 2: Παράδειγμα 2.3 - 2: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-x}\,(-1+x)$, όταν $x \in [-0.2, 3]$

Παράδειγμα 2.3 - 2

Να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = e^{-x} \quad \text{όταν} \quad y(0) = -1. \tag{2}$$

Λύση. Όμοια υποθέτουμε ότι η (2) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = e^{-x}$, οπότε σύμφωνα με το με τον τύπο 2 του Πίνακα 2.2 - 1 θα είναι $\mathcal{L}\left[e^{-x}\right] = \frac{1}{s+1}$, όταν $s+1>0$. Έστω $y(x)$ η μερική λύση της (2). Επειδή σύμφωνα με την (2) είναι $a=1$, θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = -1$ στην $(2.3-3)$ προκύπτει

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{s+1} + \frac{-1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}, \quad \text{όταν} \quad s+1>0.$$

Άρα η μερική λύση είναι (Σχ. 2.3 - 2)

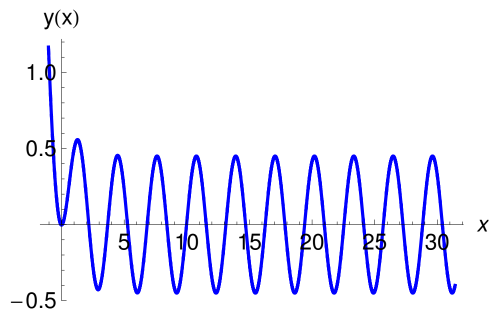
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = x\,e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}\,(-1+x)\,,$$

■

Παράδειγμα 2.3 - 3

Όμοια να λυθεί διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \sin 2x, \quad \text{όταν} \quad y(0) = 0. \tag{3}$$



Σχήμα 2.3 - 3: Παράδειγμα 2.3 - 3: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{1}{5}\, (-2\cos 2x + \sin 2x)$, όταν $x \in [-\pi/3, 10\pi]$

Λύση. Όμοια έστω ότι η (3) ορίζεται για κάθε $x \geq 0$. Είναι $r(x) = \sin 2x$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο 4 του Πίνακα 2.2 - 1 θα είναι $\mathcal{L}\left[\sin 2x\right] = \frac{2}{s^2+4}$. Αν $y(x)$ η μερική λύση της (3), τότε $a = 1$, οπότε θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ με $y(0) = y_0 = 0$ στην $(2.3 - 3)$ προκύπτει

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{2}{s^2+4}} = \frac{2}{(s+1)\,(s^2+4)} \\
&= \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\,\frac{s-1}{s^2+4} \\
&= \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\,\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{5}\,\frac{2}{s^2+2^2}\,, \quad \text{όταν} \quad s+1>0.
\end{aligned}
$$

Άρα όμοια (Σχ. 2.3 - 3)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{1}{5}\, (-2\cos 2x + \sin 2x)\,,$$

Από τη λύση προκύπτουν τα εξής:

i) $\lim_{x\to -\infty} y(x) = +\infty$,

ii) όταν $x \geq \pi$ ο όρος e^{-x} πρακτικά μηδενίζεται, οπότε η λύση γράφεται[7]

$$y(x) \approx \frac{1}{5}\, (-2\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{5}\, \sin(2x+\phi)$$

[7] Βλέπε Μάθημα 3: Σειρά Fourier - Γραμμικά φάσματα.

$$\approx \quad 0.45\sin(2x+\phi), \quad \text{όταν} \quad \phi = \arctan(-2) \approx -1.107\,\text{rad},$$

δηλαδή εκτελεί μια αμείωτη περιοδική ταλάντωση πλάτους 0.45.

∎

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις[8]

$i)$	$y' + y = x;\ y(0) = -1$	$v)$	$y' + 3y = e^{-x}\,\sin 2x;\ y(0) = 0$
$ii)$	$y' + 4y = e^{-3x};\ y(0) = 0$	$vi)$	$y' + y = \sin^2 x;\ y(0) = -1$
$iii)$	$y' + y = x\,e^{-x};\ y(0) = 0$	$vii)$	$y' + 4y = 1 - \sinh x;\ y(0) = 0$
$iv)$	$y' + y = \sin 2x;\ y(0) = 0$	$viii)$	$y' + y = \sin x\,\cos 2x;\ y(0) = 0.$

2.3.2 Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Ομογενής γραμμική 2ης τάξης

Η γενική μορφή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = 0}, \tag{2.3 - 4}$$

όταν a, b σταθερές, $y = y(x)$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Αν $y \in D_{\mathcal{L}}$, τότε από την $(2.3-4)$ έχουμε $\mathcal{L}\left[y'' + ay' + b\right] = 0$, που σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες[9] του μετασχηματισμού Laplace γράφεται

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - {y_0}'(0) + a[s\mathcal{L}(y) - y(0)] + b\mathcal{L}(y) = 0$$

[8] $(i)\,y(x) = -1 + x + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(ii)\,y(x) = e^{-3x} + c\,e^{-4x}$, μερική: $c = -1$, $(iii)\,y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + c\,e^{-x}$, μερική: $c = 0$, $(iv)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{2}\left(-2\cos 2x + \sin 2x\right)$, μερική: $c = \frac{2}{5}$, $(v)\,y(x) = c\,e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{13}\left(-3\cos 3x + 2\sin 3x\right)$, μερική: $c = -\frac{1}{13}$, $(vi)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{10}\left(5 - \cos 2x - \sin 2x\right)$, μερική: $c = -\frac{14}{10}$, $(vii)\,y(x) = c\,e^{-4x} - \frac{1}{60}\left(10 - 15e^{x} + 6e^{2x}\right)$, μερική: $c = -\frac{19}{60}$, $(viii)\,y(x) = c\,e^{-x} + \frac{1}{20}\left(5\cos x - 3\cos 3x - 5\sin x + \sin 3x\right)$, μερική: $c = -\frac{1}{10}$.

[9] Βλέπε Μάθημα 1: Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα 2.3 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω f, $g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν κ, $\lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa\mathcal{L}[f(t)] + \lambda\mathcal{L}[g(t)].$$

Θέτοντας $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ και $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ (αρχικές συνθήκες), η παραπάνω σχέση, αν λυθεί ως προς $Y(s)$, τελικά δίνει

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathbf{(s+a)y_0 + {y_0}'}}{\mathbf{s^2 + as + b}} \tag{2.3 - 5}$$

Τότε η γενική λύση της $(2.3-4)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y(x)} = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y(s)}]. \tag{2.3 - 6}$$

Είναι φανερό ότι η γενική λύση $(2.3-6)$ εξαρτάται από το είδος των ριζών του παρονομαστή $s^2+\alpha s+\beta$ στην $(2.3-5)$. Οι Παρατηρήσεις 2.3 - 1 ισχύουν ανάλογα και στην περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 2.3 - 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 0 \quad \text{και} \quad y_0' = 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(2.3-5)$ είναι

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+5)\cdot 0 + 1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{(s+3)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

μετά την ανάλυση σε απλά κλάσματα.

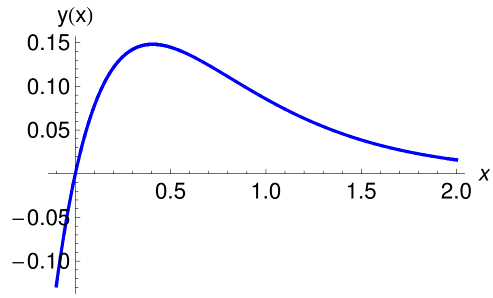
Άρα (Σχ. 2.3 - 4)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -e^{-3x} + e^{-2x}.$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ισχυρή απόσβεση**. ■

Θεώρημα 2.3 - 2 (παραγώγου 1ης και 2ης τάξης). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης και η δεύτερης τάξης παράγωγοι της f και είναι συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις για κάθε $t \geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace των παραγώγων f', f'' και ισχύει*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f'(t)\right] &= s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0), \\ \mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0), \quad \text{όταν} \quad s > a > 0. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3 - 4: Παράδειγμα 2.3 - 4: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = -e^{-3x} + e^{-2x}$, όταν $x \in [-0.1, 2]$.

Παράδειγμα 2.3 - 5

Όμοια η εξίσωση

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με την $(2.3-5)$ είναι

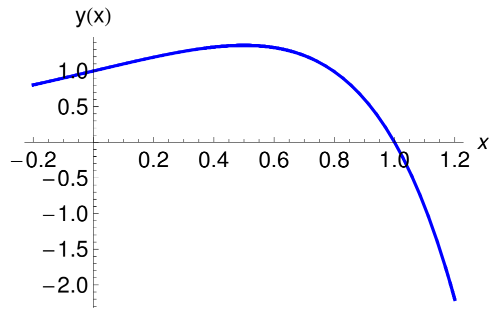
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s-4)\cdot 1 + 1}{s^2 - 4s + 4} \\ &= \frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} \\ &= \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \left(\frac{1}{s-2}\right)' \\ &= \frac{1}{s-2} - (-1)^1 \left(\frac{1}{s-2}\right)'. \end{aligned}$$

Επειδή σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace ισχύει ότι, αν $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, τότε $\mathcal{L}[x\,f(x)] = (-1)^1 F'(s)$, από την παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά ότι (Σχ. 2.3 - 5)

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{2x}(1-x).$$

Η λύση περιγράφει την **κρίσιμη απόσβεση**. Επειδή $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, η $y_h(x) = 0$, όταν $x_0 = 1$. Τότε το x_0 είναι το σημείο στατικής ισορροπίας.

■



Σχήμα 2.3 - 5: Παράδειγμα 2.3 - 5: το διάγραμμα της μερικής λύσης $y(x) = e^{-2x}(1-x)$, όταν $x \in [-0.2, 1.2]$

Παράδειγμα 2.3 - 6

Όμοια η εξίσωση

$$16y'' + 8y' + 17y = 0, \quad \text{όταν} \quad y_0 = 1 \quad \text{και} \quad y_0' = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{17}{16}y = 0$, οπότε σύμφωνα με την $(2.3-5)$ είναι

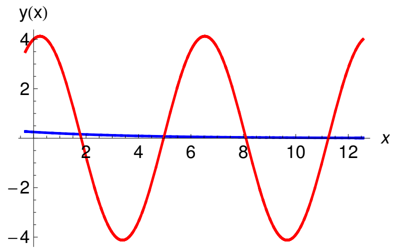
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+\frac{1}{2})\cdot 1 + 0}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{17}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{16+1}{16}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2 + 2\,\frac{1}{4}s + \frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} = \frac{s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τους τύπους 5 και 7 του Πίνακα 2.2-1 είναι (Σχ. 2.3 - 6)

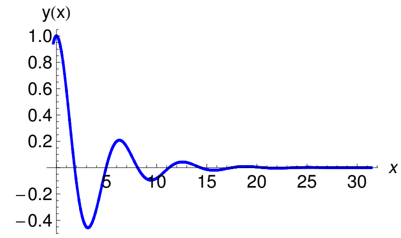
$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-x/4}\,\cos x + \frac{1}{4}\,e^{-x/4}\,\sin x,$$

Η λύση περιγράφει μια **ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση**.

■



(a)



(b)

Σχήμα 2.3 - 6: Παράδειγμα 2.3 - 5, όταν $x \in [-\pi/10, 4\pi]$:(a) το διάγραμμα της $\frac{1}{4}\, e^{-x/4}$ μπλε (απόσβεση) και της $4\cos x + \sin x$ κόκκινη καμπύλη (αμείωτη ταλάντωση), ενώ στο διάγραμμα (b) της μερικής λύσης $y(x) = \frac{1}{4}\, e^{-x/4}(4\cos x + \sin x)$. Η απόσβεση προκαλεί τελικά το μηδενισμό της μερικής λύσης

Άσκηση

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις[10]

i) $y'' + 4y' + 5y = 0;\ y_0' = y_0 = 1$

ii) $y'' - y' - 12y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$

iii) $y'' + 2y' + 10y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$

iv) $y'' + 25y = 0;\ y_0' = y_0 = 1$

v) $y'' + 2y' + 4y = 0;\ y_0' = 1,\ y_0 = 0$

vi) $y'' - 2y' + y = 0;\ y_0' = -1,\ y_0 = 1.$

Μη ομογενής γραμμική 2ης τάξης

Η γενική μορφή της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές είναι

$$\mathbf{y'' + ay' + by = r(x)} \qquad (2.3 - 7)$$

όταν $a,\, b \in \Re$, $y = y(x)$, $r(x) \neq 0$ με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και υπάρχουν οι $y'(x)$ και $y''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

[10] $(i)\ e^{-2x}\,(\cos x + 3\,\sin x)$, $(ii)\ \frac{1}{7}\left(-e^{-3x} + e^{4x}\right)$, $(iii)\ \frac{1}{3}\, e^{-x}\sin 3x$, $(iv)\ \frac{1}{5}\,(5\cos 5x + \sin 5x)$, $(v)\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-x}\,\sin\left(\sqrt{3}\, x\right)$, $(vi)\ -e^{x}\,(-1 + 2x)$.

Έστω $y,\, r \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε, ανάλογα με την αντίστοιχη λύση της ομογενούς, θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της $(2.3-7)$, τελικά προκύπτει

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathcal{L}[\mathbf{r(x)}]}{\mathbf{s^2+as+b}} + \frac{\mathbf{(s+a)y_0+y_0{}'}}{\mathbf{s^2+as+b}}\,, \qquad (2.3 \text{ - } 8)$$

οπότε η γενική λύση της μη ομογενούς θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y(x)} = \mathcal{L}^{\mathbf{-1}}[\mathbf{Y(s)}]. \qquad (2.3 \text{ - } 9)$$

Παράδειγμα 2.3 - 7

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0.$$

Λύση. Είναι $a=-3$, $b=2$ και $\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(x) = 1/s^2$. Αντικαθιστώντας στον τύπο $(2.3-8)$ μετά και την ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2-3s+2)} = \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s-2} \\ &= \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4(s-2)}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(2.3-9)$ η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{4} + \frac{x}{2} - e^x + \frac{e^{2x}}{4}\,.$$

■

Παράδειγμα 2.3 - 8

Όμοια της

$$y'' + 2y' + y = e^{-2x}, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y_0' = 0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a=2$, $b=1$ και $\mathcal{L}[r(x)]=\mathcal{L}(e^{-2x})=1/(s+2)$. Τότε από τον τύπο $(2.3-8)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)\,(s^2+2s+1)}=\frac{1}{(s+2)(s+1)^2} \\ &= \frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{\Gamma}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}\,. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα και την $(2.3-9)$ η μερική λύση είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=e^{-2x}+x\,e^{-x}-e^{-x}=e^{-2x}\,(1+x\,e^{x}-e^{x})\,.$$

■

Παράδειγμα 2.3 - 9

Όμοια η

$$y''+4y=x, \quad \text{όταν} \quad y_0=y_0'=0.$$

Λύση. Όμοια είναι $a=0$, $b=4$ και $\mathcal{L}[r(x)]=\mathcal{L}(x)=1/s^2$. Τότε από τον τύπο $(2.3-8)$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2\,(s^2+4)} \\ &= \frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4\cdot 2}\frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned}$$

μετά την κατάλληλη τροποποίηση του τελευταίου όρου στο δεξιό μέλος στην παραπάνω ισότητα.

Άρα σύμφωνα με την $(2.3-9)$ η μερική λύση είναι

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{4}\,x-\frac{1}{8}\,\sin 2x.$$

■

Παράδειγμα 2.3 - 10

Όμοια η

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad \text{όταν} \quad y_0 = y'_0 = 0.$$

Λύση. Είναι $a = 2$, $b = 10$ και $\mathcal{L}[r(x)] = \mathcal{L}(1) = 1/s$. Τότε από τον τύπο $(2.3 - 8)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s\,(s^2 + 2s + 10)} \\
&\qquad \text{(επειδή το } s^2 + 2s + 2 \text{ έχει ρίζες μιγαδικές δεν αναλύεται)} \\
&= \frac{A}{s} + \frac{Bs + \Gamma}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2 + 2s + 10} \\
&= \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\,\frac{s+2}{(s+1)^2 + 3^2} \\
&= \frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}\right]
\end{aligned}$$

μετά την τροποποίηση του παρανομαστή $s^2 + 2s + 10$ σε άθροισμα τετραγώνων.

Άρα η μερική λύση είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\left(e^{-x}\,\cos 3x + \frac{1}{3}\,e^{-x}\sin 3x\right).$$

■

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, όταν $y = y(x)$ και $y_0 = y'_0 = 0$[11]

$i)\quad y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$	$iv)\quad y'' + 2y' + y = \sin x$
$ii)\quad y'' + y = \sin x$	$v)\quad y'' + y' = e^{-x}\sin x$
$iii)\quad y'' + 3y' + 2y = x$	$vi)\quad y'' + 4y' + 3y = 4\,e^{-x}.$

[11] $(i)\ \frac{1}{30}\,e^{-2x}\,(3e^{x} - 3\cos 3x - \sin 3x)$, $(ii)\ \frac{1}{2}\,(-x\cos x + \sin x)$, $(iii)\ -\frac{3}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + e^{-x} + \frac{x}{2}$, $(iv)\ -\frac{1}{2}\,e^{-x}\,(1 + x - e^{x}\cos c)$, $(v)\ \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(-2 + e^{x} + \cos x - \sin x)$, $(vi)\ e^{-3x}\left(1 - e^{2x} + 2x\,e^{2x}\right)$.

2. Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 13y = 2\delta(t)$, όπου $y = y(x)$ και $y_0 = y_0' = 0$, έχει λύση την

$$y(x) = 2e^{-2x} \left(\cos 3x + \sin 3x\right).$$

[12]

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/