Μάθημα 2

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

2.1.1 Ορισμός γραμμικού συστήματος

Ορισμός 2.1.1 - 1. *Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος (linear system) m-εξισώσεων με n-αγνώστους x_1, x_2, …, x_n είναι*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (2.1.1 - 1)$$

όπου τα a_{ij} με $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι συντελεστές του συστήματος και τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι γνωστοί αριθμοί.

Αν $b_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε το σύστημα $(2.1.1 - 1)$ λέγεται **ομογενές** και μία προφανής λύση του είναι η $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ενώ, όταν ένα τουλάχιστον από τα b_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διάφορο του μηδενός, τότε λέγεται **μη ομογενές**.

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα $(2.1.1-1)$ γράφεται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \text{ ή } \overrightarrow{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} \text{ ή } \overrightarrow{b}}$$

ή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.1.1 - 2}$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων με $A \in \Re^{m\times n}$ ή $A \in \mathcal{C}^{m\times n}$ και $\mathbf{b}$ διάνυσμα τάξης m. . Αντίστοιχη μορφή της $(2.1.1-2)$ ισχύει για στοιχεία από το $\mathcal{C}$ αντί του $\Re$.

2.1.2 Μέθοδοι λύσης

Οι μέθοδοι λύσης του συστήματος $(2.1.1-2)$ χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

- **άμεσες** (direct), και
- **επαναληπτικές** (iterative).

[1] Από το σύνολο των λύσεων θα δοθούν στη συνέχεια μόνον οι κυριότερες, που αναφέρονται στην περίπτωση όπου ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων είναι τετραγωνικός τάξης n και η ορίζουσα του $|A| \neq 0$.[2]

---

[1] Για άλλες περιπτώσεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 3.

[2] Η Παράγραφος 2.2 που ακολουθεί δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη.

2.2 Άμεσοι μέθοδοι

2.2.1 Μέθοδος του Cramer

Επειδή $|A| \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο A^{-1}, οπότε από την $(2.1.1-2)$ διαδοχικά έχουμε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad ή \quad \overbrace{A^{-1}A}^{\mathrm{I}}\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad ή \quad \mathrm{I}\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n, δηλαδή τελικά

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}. \tag{2.2.1 - 1}$$

Η $(2.2.1-1)$ συναρτήσει των αγνώστων x_1, x_2, $\ldots$, x_n του συστήματος αποδεικνύεται ότι τελικά γράφεται

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2.1 - 2}$$

όταν με $|A_i|$ συμβολίζεται η ορίζουσα που προκύπτει, αν η i-στήλη του πίνακα A αντικατασταθεί από τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{b}$. Η μέθοδος αυτή, που είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Cramer** , λόγω του μεγάλου αριθμού των πράξεων και των υπεισερχομένων σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (round-off errors), έχει θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον.

Παράδειγμα 2.2.1 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} -3x_1 & + & 6x_2 & - & 11x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 13x_3 & = & 4 \end{array}$$

που γράφεται

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Αν A είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, τότε $|A| = 10$, οπότε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

Ο τύπος $(2.2.1-1)$ δίνει τότε την παρακάτω λύση

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.2 \\ -2.5 \\ -6.4 \end{bmatrix}.$$

Η παραπάνω λύση προκύπτει επίσης και από τον τύπο $(2.2.1-2)$ όπου

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -11 \\ -2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = -72, \quad |A_2| = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -11 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -25,$$

$$|A_3| = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} = -64.$$

2.2.2 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss χωρίς διάταξη[3] (pivoting) περιγράφεται από τα παρακάτω **βήματα** (steps):

1ο βήμα. Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(2.1.1-1)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $a_{11} \neq 0$. Το a_{11} λέγεται και **οδηγό στοιχείο** (pivot). Τότε ο άγνωστος x_1 απαλείφεται από τη 2η, 3η, …, n-οστή

[3] Όμοια για άλλες περιπτώσεις βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 3.

εξίσωση, αφαιρώντας:

$$
\begin{array}{rcllll}
m_{21} & = & \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \text{φορές την} & \text{πρώτη} & \text{από τη δεύτερη εξίσωση} \\
m_{31} & = & \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \text{"} & \text{"} & \text{τρίτη} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
m_{n1} & = & \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & \text{"} & \text{"} & \text{τελευταία,}
\end{array}
$$

όταν τα m_{i1}; $i = 2, 3, \ldots, n$ είναι οι **πολλαπλασιαστές** του Gauss για το πρώτο βήμα. Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 1ου βήματος είναι

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 & & \vdots & & & & & \vdots & \\
 & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array}
\qquad (2.2.2 - 1)
$$

όπου με $a_{ij}^{(\varkappa)}$, $b_i^{(k)}$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$ θα συμβολίζεται στο εξής η νέα τιμή των a_{ij} και b_i στο τέλος του k-βήματος γενικά.

2ο βήμα. Όμοια, έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(2.2.2 - 1)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Τότε ο άγνωστος x_2 απαλείφεται από την 3η, ... , n-οστή εξίσωση, αφαιρώντας

$$
\begin{array}{rcllll}
m_{32} & = & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \text{φορές τη} & \text{δεύτερη} & \text{από την τρίτη εξίσωση} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
m_{n2} & = & \dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \text{"} & \text{"} & \text{τελευταία.}
\end{array}
$$

Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 2ου βήματος θα είναι

$$
\begin{array}{rcccccccl}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)} \\
 & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = b_3^{(2)} \\
 & & & \vdots & & & & & \quad \vdots \\
 & & & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = b_n^{(2)}.
\end{array}
\qquad (2.2.2 - 2)
$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο στο τέλος και του $n-1$ βήματος, η μορφή του αρχικού συστήματος $(2.1.1-1)$ τελικά θα είναι

$$
\begin{array}{rcccccl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{22}^{(1)}\,x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}
\end{array}
\qquad (2.2.2 - 3)
$$

όπου προφανώς το σύστημα $(2.2.2-3)$ είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Το σύστημα $(2.2.2-3)$ γράφεται απλούστερα ως

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & u_{13}x_3 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & u_{22}x_2 & + & u_{23}x_3 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & u_{33}x_3 & + & \cdots & + & u_{3n}x_n & = & c_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}
$$

ή με τη βοήθεια των πινάκων

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \text{με} \quad U \in \Re^{n\times n} \qquad (2.2.2 - 4)$$

όπου ο U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Η λύση του συστήματος $(2.2.2 - 4)$ γίνεται με ανάδρομη αντικατάσταση (backward substitution), δηλαδή από την τελευταία προς την πρώτη εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} x_n &= c_n/u_{nn} \\ x_{n-1} &= \left[c_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n\right]/u_{n-1,n-1} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_1 &= \left[c_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j}\, x_j\right] / \, u_{11}\,. \end{aligned} \qquad (2.2.2 - 5)$$

Παράδειγμα 2.2.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 &+ 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 &+ 2x_2 - x_3 = 5. \end{aligned} \qquad (2.2.2 - 6)$$

Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς διάταξη η λύση είναι:

1ο βήμα

Γίνεται απαλοιφή του αγνώστου x_1 από τη 2η και 3η εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Εξίσωση } 2: &= \text{Εξίσωση } 2 - m_{21} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{21} = -1/2 \\ \text{Εξίσωση } 3: &= \text{Εξίσωση } 3 - m_{31} * \text{Εξίσωση } 1\,; \quad m_{31} = 1/2\,. \end{aligned}$$

Άρα στο τέλος του 1ου βήματος το σύστημα γράφεται

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 2, \end{array}$$

που προφανώς είναι ισοδύναμο με το αρχικό, επειδή έχει διατηρηθεί η 1η εξίσωση.

2ο βήμα

Απαλείφεται ο άγνωστος x_2 από την 3η εξίσωση ως εξής:

$$\text{Εξίσωση } 3: \;=\; \text{Εξίσωση } 3 \;-\; m_{32} * \text{Εξίσωση } 2; \quad m_{32} = 1/3.$$

Άρα στο τέλος του 2ου βήματος το σύστημα θα έχει τελικά τη μορφή

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & & - & \dfrac{8}{3}x_3 & = & 0 \end{array} \tag{2.2.2 - 7}$$

που είναι επίσης λόγω της διατήρησης και της 2ης εξίσωσης ισοδύναμο με το αρχικό. Λύνοντας τώρα το σύστημα $(2.2.2-7)$ με την ανάδρομη αντικατάσταση, δηλαδή από την 3η προς την 1η εξίσωση, προκύπτει η λύση: $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ και $x_1 = 1$.

2.3 Επαναληπτικές Μέθοδοι

2.3.1 Ορισμοί

Όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι σχετικά μικρό, τότε είναι προτιμότερο για τη λύση του συστήματος $(2.1.1-2)$ να χρησιμοποιηθούν οι άμεσοι μέθοδοι της προηγούμενης παραγράφου Σε μεγάλο όμως αριθμό εξισώσεων για περισσότερη ακρίβεια των λύσεων συνήθως προτιμούνται οι **επαναληπτικές μέθοδοι** (iterative methods).

Έστω λοιπόν το σύστημα $(2.1.1-2)$, δηλαδή το

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.3.1 - 1}$$

όπου ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τάξης n με $|A| \neq 0$. Τότε έχοντας υπ' όψιν το ανάλογο πρόβλημα της εύρεσης των ριζών της Εξίσωσης $(1.1-2)$ του Μαθήματος 1 θα πρέπει και για την περίπτωση του συστήματος $(2.3.1-1)$ να δημιουργηθεί για κάθε άγνωστο $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n$ χωριστά μια επαναληπτική σχέση ανάλογη της $(1.1-3)$. Αν για ευκολία η επαναληπτική σχέση για τον άγνωστο, έστω x_1, γραφεί στη μορφή $x_1^{i+1} = g_1\left(x_1^i\right);\; i = 0,\, 1,\, \dots$, τότε για τον x_k άγνωστο θα έχει τη μορφή

$$x_k^{i+1} = g_k\left(x_k^i\right); \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, n \text{ και } i = 0,\, 1,\, \dots . \qquad (2.3.1 \text{ - } 2)$$

Οι τιμές των αγνώστων για κάθε τιμή του δείκτη i ή διαφορετικά για κάθε επανάληψη, ορίζουν ένα διάνυσμα με συντεταγμένες τις αντίστοιχες τιμές των $x_1^i,\, x_2^i,\, \dots,\, x_n^i$. Έστω $\mathbf{x}_k^{i+1} = \left[x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i\right]^T$ το διάνυσμα αυτό. Τότε τα διανύσματα αυτά δημιουργούν μια ακολουθία διανυσμάτων, που θεωρητικά θα πρέπει να συγκλίνει στη λύση του συστήματος $(2.3.1-1)$.

Επομένως το πρόβλημα της εύρεσης της λύσης του συστήματος $(2.3.1-1)$ ανάγεται στον προσδιορισμό της επαναληπτικής συνάρτησης g_k στην $(2.3.1-2)$. Όπως και στο Μάθημα 1 ο τρόπος προσδιορισμού καθορίζει και την αντίστοιχη μέθοδο λύσης του συστήματος. Τα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων του Μαθήματος 1 ισχύουν και στην περίπτωση των επαναληπτικών μεθόδων για συστήματα.

Εξετάζονται στη συνέχεια οι αρχικές κλασικές μέθοδοι που προκύπτουν από τη μορφή $(2.3.1-2)$, ενώ ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου για μια εκτενέστερη αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος.

2.3.2 Μέθοδος του Jacobi

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Jacobi η επαναληπτική σχέση $(2.3.1-2)$ δημιουργείται από το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_n, \end{array} \qquad (2.3.2 \text{ - } 1)$$

όταν αυτό λυθεί διαγώνια για κάθε έναν άγνωστο χωριστά, δηλαδή η 1η εξίσωση για τον άγνωστο x_1, η 2η για τον x_2 και τελικά η n-οστή για τον x_n θεωρώντας τους άλλους αγνώστους σε κάθε περίπτωση σαν γνωστούς.

Άρα σύμφωνα με τη μέθοδο από το σύστημα $(2.3.2-1)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{array}{rcllllll}
x_1 & = & -\dfrac{1}{a_{11}}[& & a_{12}\,x_2 & + \; a_{13}\,x_3 & +\ldots+ \quad a_{1n}\,x_n] & +\dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 & = & -\dfrac{1}{a_{22}}[a_{21}\,x_1 & & & + \; a_{23}\,x_3 & +\ldots+ \quad a_{2n}\,x_n] & +\dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\vdots & = & \vdots & & & & & \vdots \\
x_n & = & -\dfrac{1}{a_{nn}}[a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & & +\ldots+ \quad a_{n\,n-1}\,x_{n-1}] & +\dfrac{b_n}{a_{nn}}\,,
\end{array}$$

όταν $a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0$.

Από την παραπάνω μορφή του συστήματος, η επαναληπτική σχέση

$$x_k^{(i+1)} = g_k\left(x_k^{(i)}\right); \quad i=0,\,1,\,\ldots; \quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n$$

προκύπτει τότε ως εξής:[4]

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3.2\text{ - }2) \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1^{(i)} + a_{n2}\,x_2^{(i)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(i)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}$$

Η $(2.3.2-2)$ ορίζει τότε την επαναληπτική σχέση της **μεθόδου του Jacobi**. Η μέθοδος περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.3.2 - 1.

[4] Στα συστήματα χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $(i+1)$, δηλαδή το $i+1$ σε παρένθεση για να διαφέρει από το δείκτη k, που χρησιμοποιείται για τους αγνώστους. Στις εξισώσεις, που δεν απαιτείται ανάλογη διάκριση, χρησιμοποιείται το $i+1$.

Αλγόριθμος 2.3.2 - 1 (μεθόδου του Jacobi)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \Re^{n\times n}$,

αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^T$,

ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Για $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$

  Για $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

  τέλος i

  αν $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| < \varepsilon$,

  τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ STOP

  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$

τέλος k

Τύπωσε “ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ”

Σημείωση 2.3.2 - 1

Στα συστήματα, σε αντίθεση με τις εξισώσεις όπου η αρχική τιμή x_0 των επαναλήψεων είναι δυνατόν να προσδιοριστεί γραφικά ή με τη μέθοδο του μέσου σημείου κ.λπ., δεν είναι εύκολος ο προσδιορισμός των αρχικών τιμών $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Για το λόγο αυτό συνήθως θέτουμε $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0, \ldots, x_n^{(0)} = 0$, εκτός αν διαφορετικά δίνεται.

Παράδειγμα 2.3.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 15 \end{array} \qquad (2.3.2 - 3)$$

με ρίζες $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$ και $x_3^* = -2$.

Σύμφωνα με την $(2.3.2 - 1)$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2 - 3\,x_3\right] - \frac{1}{5} \\ x_2 &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1 - x_3\right] - \frac{5}{9} \\ x_3 &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1 + x_2\right] - \frac{15}{7}\,, \end{aligned}$$

οπότε από την $(2.3.2 - 2)$ προκύπτει η παρακάτω επαναληπτική σχέση:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] - \frac{1}{5} \\ x_2^{(i+1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(i)} - x_3^{(i)}\right] - \frac{5}{9} \\ x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(i)} + x_2^{(i)}\right] - \frac{15}{7}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \end{aligned} \qquad (2.3.2 - 4)$$

Θέτοντας στην $(2.3.2 - 4)$ σύμφωνα με τη Σημείωση 2.3.2 - 1 σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ διαδοχικά έχουμε:

για $\quad i = 0$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(0+1)} = x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(0)} - 3\,x_3^{(0)}\right] - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} = 0.2 \\
x_2^{(0+1)} = x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right] - \frac{5}{9} = -\frac{5}{9} = -0.555\,556 \\
x_3^{(0+1)} = x_3^{(1)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right] - \frac{15}{7} = -\frac{15}{7} = -2.142\,857\,.
\end{aligned}
$$

για $\quad i = 1$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1+1)} = x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(1)} - 3\,x_3^{(1)}\right] - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}\left[2 * (-0.555) - 3 * (-2.142)\right] - 0.2 = 0.863\,492 \\
x_2^{(1+1)} = x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(1)} - x_3^{(1)}\right] - \frac{5}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[3 * 0.2 - (-2.142)\right] - 0.555 = -0.384\,127 \\
x_3^{(1+1)} = x_3^{(2)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right] - \frac{15}{7} \\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.2 + (-0.555)\right] - 2.142\,857 = -2.034\,921\,.
\end{aligned}
$$

Όμοια για $i = 2,\, 3,\, \ldots$. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας μέχρι και την 12η επανάληψη δίνονται στον Πίνακα 2.3.2 - 1. Συγκρίνοντας με τις ρίζες προκύπτει τότε ότι στη 12η επανάληψη υπάρχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για την 1η και τη 2η ρίζα και 6 για την 3η.

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.2 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.2 - 1 (μεθόδου του Jacobi)

```
n = 12; x = 0; y = 0; z = 0;
f1[y_, z_] := (2 y - 3 z)/5 - 1/5;
f2[x_, z_] := (3 x - z)/9 - 5/9;
```

Πίνακας 2.3.2 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου του Jacobi

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$
1	-0.200 000	-0.555 556	-2.142 857
2	0.863 492	-0.384 127	-2.092 063
3	0.901 587	-0.035 273	-1.964 626
⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.999 939	-0.000 061	-2.000 003
11	0.999 977	-0.000 020	-2.000 000
12	*0.999 992*	*-7.536 012* $\times 10^{-6}$	*-2.000 000*

```
f3[x_, y_] := -(-x + y)/7 - 15/7;
Do[x1 = f1[y, z]; y1 = f2[x, z]; z1 = f3[x, y];
 Print[i, "    ,    ", N[x1, 7], "    ,    ", N[y1, 7], " , ",
 N[z1, 7]]; x = x1; y = y1; z = z1, {i, 1, n}]
```

2.3.3 Μέθοδος των Gauss-Seidel

Η **μέθοδος των Gauss-Seidel** χρησιμοποιεί την ίδια διαδικασία για τη δημιουργία της επαναληπτικής σχέσης $(2.3.2-2)$, δηλαδή της

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\;\;\vdots \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1^{(i)} + a_{n2}\,x_2^{(i)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(i)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}$$

με τη διαφορά ότι η όποια τιμή υπολογίζεται, χρησιμοποιείται στη συνέχεια της διαδικασίας για τον υπολογισμό των υπόλοιπων τιμών.

Επομένως η επαναληπτική σχέση της μεθόδου έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
{x_1}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
{x_2}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{33}}\left[a_{21}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{22}\,{x_2}^{(i+1)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3.3 - 1) \\
{x_{n-1}}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{n-1,\,n-1}}\Big[a_{n-1,1}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{n-1,2}\,{x_2}^{(i+1)} + \ldots \\
&\quad + a_{n\,n-2}\,{x_{n-2}}^{(i+1)} + a_{n\,n}\,x_n^{(i)}\Big] + \frac{b_n}{a_{nn}} \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,{x_1}^{(i+1)} + a_{n2}\,{x_2}^{(i+1)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,{x_{n-1}}^{(i+1)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}
$$

Η μέθοδος περιγράφεται από τον Αλγόριθμο 2.3.3 - 1.

Παράδειγμα 2.3.3 - 1

Έστω το σύστημα $(2.3.2 - 3)$ του Παραδείγματος 2.3.2 - 1, δηλαδή το

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\
-3x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & = & -5 \\
x_1 & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 15
\end{array}
\qquad (2.3.3 - 2)
$$

με ρίζες

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad \text{και} \quad x_3^* = -2.$$

Αλγόριθμος 2.3.3 - 1 (μεθόδου των Gauss-Seidel)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \Re^{n \times n}$,

αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^T$,

ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Για $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, N$

Για $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} + b_i\right) / a_{ii}$$

τέλος i

αν $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| < \varepsilon$, τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ STOP

$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$

τέλος k

Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

Σύμφωνα με την $(2.3.2 - 4)$ και την $(2.3.3 - 1)$ έχουμε την παρακάτω επαναληπτική μέθοδο των Gauss-Seidel για το σύστημα $(2.3.3 - 2)$

$$\begin{aligned} x_1{}^{(i+1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] - \frac{1}{5} \\ x_2{}^{(i+1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1{}^{(i+1)} - x_3^{(i)}\right] - \frac{5}{9} \\ x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1{}^{(i+1)} + x_2{}^{(i+1)}\right] - \frac{15}{7}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots . \end{aligned} \tag{2.3.3 - 3}$$

Έχοντας υπ' όψιν τη Σημείωση 2.3.2 - 1 και θέτοντας στην $(2.3.3 - 3)$ σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$ διαδοχικά έχουμε:

για $\quad i = 0$

$$\begin{aligned} x_1{}^{(0+1)} = x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(0)} - 3\,x_3^{(0)}\right] - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} = 0.2 \\ x_2{}^{(0+1)} = x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1{}^{(1)} - x_3^{(0)}\right] - \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{9}\left[3 * 0.2 - 0\right] - \frac{5}{9} = -0.622\,222 \\
x_3^{(0+1)} = x_3^{(1)} &= -\frac{1}{7}\left[-x_1{}^{(1)} + x_2{}^{(1)}\right] - \frac{15}{7} \\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.2 + (-0.622)\right] - \frac{15}{7} = -2.082\,540\,.
\end{aligned}
$$

για $\quad i = 1$

$$
\begin{aligned}
x_1{}^{(1+1)} = x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(1)} - 3\,x_3^{(1)}\right] - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}\left[2 * (-0.622) - 3 * (-2.082)\right] - 0.2 = 0.800\,635 \\
x_2{}^{(1+1)} = x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1{}^{(2)} - x_3^{(1)}\right] - \frac{5}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[3 * 0.800 - (-2.082)\right] - 0.555 = -0.057\,284 \\
x_3^{(1+1)} = x_3^{(2)} &= -\frac{1}{7}\left[-x_1{}^{(2)} + x_2{}^{(2)}\right] - \frac{15}{7} \\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.800 + (-0.557)\right] - 2.142\,857 = -2.020\,297\,.
\end{aligned}
$$

Όμοια για $i = 2,\ 3,\ \ldots$.Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας μέχρι και την 7η επανάληψη δίνονται στον Πίνακα 2.3.3 - 1. Συγκρίνοντας με τις ρίζες $\quad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad$ και $\quad x_3^* = -2$ προκύπτει ότι στην 7η επανάληψη έχουμε ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων, ενώ με τη μέθοδο του Jacobi, όπως έχει προκύψει από τον Πίνακα 2.3.2 - 1, στη 12η επανάληψη υπήρχε ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για την 1η και τη 2η ρίζα και 6 δεκαδικών για την 3η.

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.3 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.3 - 1 (μεθόδου των Gauss-Seidel)

```
n = 7; x = 0; y = 0; z = 0;
f1[y_, z_] := (2 y - 3 z)/5 - 1/5;
f2[x_, z_] := (3 x - z)/9 - 5/9;
```

Πίνακας 2.3.3 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου των Gauss-Seidel

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$
1	-0.200 000	-0.622 222	-2.082 540
2	0.800 635	-0.057 384	-2.020 297
3	0.989 265	-0.001 323	-2.001 345
4	1.000 277	0.000 242	-1.999 995
5	1.000 094	0.000 031	-1.999 991
6	1.000 007	$1.287\,801 \times 10^{-6}$	-1.999 999
7	*1.000 000*	$-7.717\,425 \times 10^{-8}$	*-2.000 000*

```
f3[x_, y_] := -(-x + y)/7 - 15/7;
Do[x1 = f1[y, z]; y1 = f2[x1, z]; z1 = f3[x1, y1];
 Print[i, "   ,   ", N[x1, 7], "   ,   ", N[y1, 7],
 "   ,   ",N[z1, 7]]; x = x1; y = y1; z = z1,
 {i, 1, n}]
```

2.3.4 Σύγκλιση των μεθόδων

Οι επαναληπτικές σχέσεις $(2.3.2-2)$ και $(2.3.3-1)$ των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel αντίστοιχα δεν συγκλίνουν πάντοτε στις ρίζες του συστήματος $(2.3.2-1)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν περιπτώσεις που η εφαρμογή τους σε ορισμένα συστήματα δίνει επαναληπτικές σχέσεις, που αποκλίνουν.

Παράδειγμα 2.3.4 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 5x_2 & = & -4 \\ 7x_1 & - & x_2 & = & 6 \end{array} \quad \text{με ρίζες} \quad x_1^* = x_2^* = 1. \qquad (2.3.4 - 1)$$

Πίνακας 2.3.4 - 1: Παράδειγμα 2.3.4 - 1 επαναληπτική σχέση (2.3.4 − 2): αποτελέσματα μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel

	Jacobi		Gauss-Seidel	
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
1	-4.000	-6.000	-4.000	-34.000
2	-34.000	-34.000	-174.000	-1224.000
3	-174.000	-244.000	-6124.000	-42.874
4	-1244.000	-1244.000	-214.374	-1500.624
5	-6124.000	-8574.000	-7503.124	-52521.874
6	-42.874	-42.874		
7	-214.374	-300.124		

Τότε προκύπτουν αντίστοιχα σύμφωνα με τα παραπάνω οι παρακάτω μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= 5x_2^{(i)} \quad -4 \\ x_2^{(i+1)} &= 7x_1^{(i)} \quad -6 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= 5x_2^{(i)} \quad -4 \\ x_2^{(i+1)} &= 7x_1^{(i+1)} \quad -6, \end{aligned} \tag{2.3.4 - 2}$$

όταν $i = 0,\ 1,\ \ldots$. Θέτοντας όμοια στην $(2.3.4-2)$ σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$ έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.3.4 - 1. Άμεσα προκύπτει τότε ότι και οι δύο μέθοδοι αποκλίνουν με ταχύτερα αποκλίνουσα τη μέθοδο των Gauss-Seidel. Ανάλογο αποκλίνον αποτέλεσμα θα προκύψει και με άλλη αρχική τιμή.

Οι συνθήκες που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση των παραπάνω μεθόδων είναι αντικείμενο μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας.[5] Στη συνέχεια του μαθήματος δίνεται μια από αυτές τις συνθήκες με τη μορφή του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.4 - 1. *Αν ο πίνακας $A \in \Re^{n\times n}$ είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος, τότε το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει ακριβώς μια λύση στην οποία*

[5] Βλέπε βιβλιογραφία.

συγκλίνουν οι μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel για κάθε αρχική τιμή.

Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 2.3.4 - 1 *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται* **αυστηρά διαγώνια ορισμένος** *(strictly diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \ \text{ για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ισχύει}$$

$$\begin{aligned} |a_{11}| = |-4| > |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 1 = 3 \\ |a_{22}| = 6 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 2 = 3 \ , \\ |a_{33}| = 5 > |a_{31}| + |a_{32}| = 1 + |-2| = 3 \end{aligned}$$

δηλαδή ο A είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Στο σύστημα $(2.3.4 - 1)$ ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ προφανώς δεν είναι αυστηρά διαγώνιος. Όταν όμως το σύστημα γραφεί στη μορφή

$$\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & - & x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 5x_2 & = & -4, \end{array} \qquad (2.3.4 \text{ - } 3)$$

τότε οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel

$$\begin{array}{rcll} x_1^{(i+1)} & = & \frac{1}{7}\, x_2^{(i)} & + \frac{6}{7} \\ x_2^{(i+1)} & = & \frac{1}{5}\, x_1^{(i)} & + \frac{4}{5} \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rcll} x_1^{(i+1)} & = & \frac{1}{7}\, x_2^{(i)} & + \frac{6}{7} \\ x_2^{(i+1)} & = & \frac{1}{5}\, x_1^{(i+1)} & + \frac{4}{5}\,, \end{array} \qquad (2.3.4 \text{ - } 4)$$

όταν $i = 0, 1, \ldots ,$ συγκλίνουν θέτοντας όμοια σαν αρχικές τιμές $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 2.3.4 - 2.

Πίνακας 2.3.4 - 2: Παράδειγμα 2.3.4 - 1 επαναληπτική σχέση (2.3.4 − 4): αποτελέσματα μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel

	Jacobi		Gauss-Seidel	
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
1	0.857	0.800	0.857	0.971
2	0.971	0.971	0.996	0.999
3	0.996	0.994	1.000	1.000
4	0.999	0.999	1.000	1.000
5	1.000	1.000		
6	1.000	1.000		

Σημείωση 2.3.4 - 1

Η συνθήκη ο πίνακας A στο Θεώρημα 2.3.4 - 1 να είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος είναι μόνον αναγκαία. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} -4x_1 & + & 5x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3, \end{array}$$

όπου ο πίνακας A δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος, ενώ και οι δύο μέθοδοι με αρχική τιμή $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$ συγκλίνουν στη λύση $x_1^* = x_2^* = 1$ του συστήματος.

Σύγκριση των μεθόδων

Γενικότερα από την πειραματική εφαρμογή των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel έχουν προκύψει τα παρακάτω αποτελέσματα:

i) η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει, όταν και η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει,

ii) η μέθοδος των Gauss-Seidel είναι δυνατόν να συγκλίνει, όταν η μέθοδος του Jacobi αποκλίνει, και

iii) όταν οι μέθοδοι συγκλίνουν, τότε η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο του Jacobi.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν με τη μέθοδο του Jacobi και των Gauss-Seidel τα παρακάτω συστήματα

$$i) \quad \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 5, \end{array}$$

$$ii) \quad \begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 2x_2 & = & -6 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & 1, \end{array}$$

$$iii) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -6, \end{array}$$

$$iv) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & 11. \end{array}$$

Η διαδικασία να σταματήσει, όταν για το σφάλμα ισχύει $\left|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\right| < 10^{-3}$.

2. Όμοια τα συστήματα εφαρμόζοντας κατάλληλη εναλλαγή των εξισώσεων το Θεώρημα 2.3.4 - 1:

$$i) \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 3, \end{array}$$

$$ii) \quad \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & = & 2, \end{array}$$

$$
iii)\quad \begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -7 \\
x_1 & + & 3x_2 & - & 10x_3 & = & 9 \\
3x_1 & & & + & x_3 & = & 13,
\end{array}
$$

$$
iv)\quad \begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\
3x_1 & - & x_2 & & & = & 5 \\
& & x_2 & + & 2x_3 & = & 1.
\end{array}
$$

3. Δείξτε ότι στα παρακάτω συστήματα

$$
i)\quad \begin{array}{rcrcr}
-4x_1 & + & 5x_2 & = & 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & = & 3,
\end{array}
$$

$$
ii)\quad \begin{array}{rcrcrcr}
4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\
x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 5,
\end{array}
$$

αν και δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.3.4 - 1, υπάρχει λύση με τις μεθόδους των Jacobi και Gauss-Seidel, την οποία και προσδιορίστε.

4. Να γραφεί πρόγραμμα με το MATLAB αντίστοιχο των Προγραμμάτων 2.3.2 - 1 και 2.3.3 - 1.

[6]

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Acton (1990), F. S. Numerical Methods That Work, 2nd printing. Washington, DC: Math. Assoc. Amer.

[5] Bronshtein, I. N. and Semendyayev (1997), K. A. Handbook of Mathematics, 3rd ed. New York: Springer-Verlag.

[6] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[8] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[9] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[12] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

[13] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[14] Varga, R. (1962), Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[15] Young, D. (1971), Iterative Solutions of Large Linear Systems. New York: Academic Press.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/