Μάθημα 3

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

3.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι στα διάφορα προβλήματα των εφαρμογών τις περισσότερες φορές παρουσιάζονται συναρτήσεις, που περιγράφονται από πολύπλοκους τύπους, δηλαδή τύπους στους οποίους υπεισέρχονται τριγωνομετρικές, εκθετικές, αντίστροφες τριγωνομετρικές, λογαριθμικές, κ.λπ. συναρτήσεις. Τότε η λύση του προβλήματος είναι δύσκολη και τις περισσότερες φορές αδύνατη. Επομένως άμεσα δημιουργείται η ανάγκη της αντικατάστασης αυτών των συναρτήσεων με άλλες απλούστερες, έτσι ώστε να γίνει δυνατή η λύση των παραπάνω προβλημάτων. Στην κατηγορία αυτή προστίθενται και οι περιπτώσεις που κατά το πλείστον εμφανίζονται στις εφαρμογές και είναι αυτές, που ο τύπος της συνάρτησης, έστω $f(x)$, είναι άγνωστος και οι μόνες πληροφορίες που υπάρχουν για την f είναι ότι γνωρίζουμε ένα σύνολο τιμών της, δηλαδή τα σημεία $(x_i, f(x_i))\,;\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Στο μάθημα αυτό, οι συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν για τις προσεγγίσεις αυτές, θα είναι οι **πολυωνυμικές**. Τα πλεονεκτήματα της προσέγγισης μιας συνάρτησης με ένα πολυώνυμο είναι πολλά και ενδεικτικά αναφέρεται ότι η παράγωγος, το ολοκλήρωμα κ.λπ., υπολογίζονται ευκολότερα με τη χρήση του πολυωνύμου αντί της συνάρτησης, ενώ τα αποτελέσματά τους είναι επίσης πολυώνυμα. Επομένως γίνεται άμεσα αντιληπτό η ανάγκη αναζήτησης αυτού του είδους της προσέγγισης.

3.1.1 Σχετικοί ορισμοί και θεωρήματα

Είναι γνωστό στα μαθηματικά ότι η προσέγγιση μιας συνεχούς συνάρτησης με ένα πολυώνυμο, έστω P, βαθμού n της μορφής

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad \text{όταν } a_i \in \Re\,;\, i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$$

είναι πάντοτε δυνατή και με όση ακρίβεια κάθε φορά ζητείται.

Συγκεκριμένα ισχύει:

Θεώρημα 3.1 - 1 (Weierstrass). *Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο P, έτσι ώστε*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [a, b]. \tag{3.1 - 1}$$

Το Θεώρημα 3.1 - 1 αναφέρεται στην ύπαρξη του πολυωνύμου P, δε δίνει όμως τον τύπο του και επομένως έχει μαθηματικό θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον.

Μια πρώτη απάντηση στον προσδιορισμό του τύπου του πολυωνύμου P δίνεται από το πολυώνυμο του Taylor, αντίστοιχα του Maclaurin, που όπως είναι ήδη γνωστό, δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\approx \quad P_n(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 \\ &\qquad + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}(x-\xi)^n, \end{aligned} \tag{3.1 - 2}$$

όταν το σημείο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και ορίζει το κέντρο του παραπάνω αναπτύγματος, αντίστοιχα

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\approx \quad P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &\qquad + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n, \end{aligned} \tag{3.1 - 3}$$

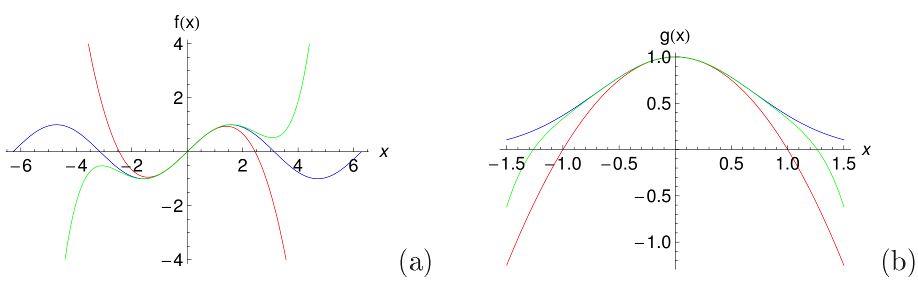
όταν το κέντρο είναι στην περίπτωση αυτή το 0. Τα παραπάνω πολυώνυμα δίνουν τότε τη δυνατότητα να έχουμε μία πολυωνυμική προσέγγιση μιας συνάρτησης f σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι το πολυώνυμο του Taylor, αντίστοιχα του Maclaurin:

- δεν παρουσιάζει ακρίβεια που να αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό n του πολυωνύμου,
- απαιτεί τη γνώση του κέντρου ξ,
- η προσέγγιση είναι ακριβής μόνον για τιμές του x πλησίον του ξ,

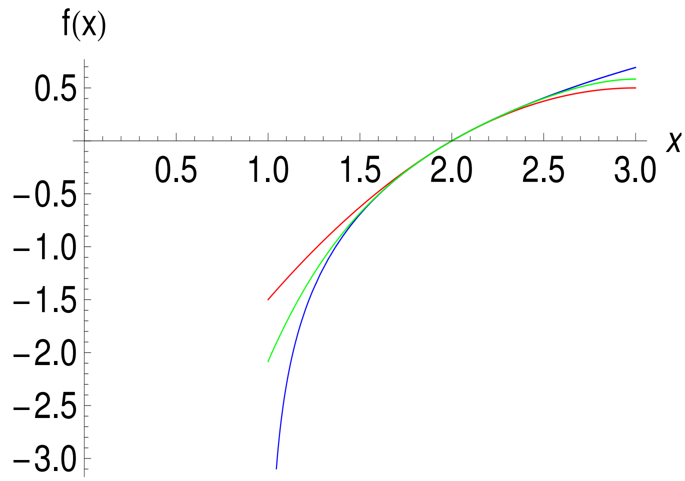
Παράδειγμα 3.1 - 1

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \sin x.$$
Το πολυώνυμο του Maclaurin βαθμού 3, αντίστοιχα 5 είναι
$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3\,!}\,, \quad \text{αντίστοιχα} \quad P_5(x) = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!}\,.$$
Από το Σχ. 3.1 - 1a είναι προφανές ότι, αν $x \to 0$, τα διαγράμματα των f, P_3 και P_5 συμπίπτουν και αποκλίνουν, όταν το x απομακρύνεται από το 0.



Σχήμα 3.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x)$ μπλε, P_3 κόκκινη και P_5 πράσινη καμπύλη. (b) Όμοια $g(x)$ μπλε, P_2 κόκκινη και P_6 πράσινη καμπύλη

Ανάλογη παρατήρηση ισχύει για τη συνάρτηση (Σχ. 3.1 - 1b)
$$g(x) = e^{-x^2},$$



Σχήμα 3.1 - 2: Συνάρτηση $f(x)$ μπλε, P_2 κόκκινη και P_4 πράσινη καμπύλη

όταν προσεγγίζεται από τα παρακάτω πολυώνυμα του Maclaurin

$$P_2(x) = 1 - x^2, \quad \text{αντίστοιχα} \quad P_6(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}.$$

Παράδειγμα 3.1 - 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - 1).$$

Το πολυώνυμο του Taylor με κέντρο $\xi = 2$ βαθμού 2, αντίστοιχα 4 είναι

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x - 2 - \frac{(x-2)^2}{2}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ P_4(x) &= x - 2 - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} - \frac{(x-2)^4}{4}. \end{aligned}$$

Από το Σχ. 3.1 - 2 προκύπτει ότι, αν $x \to 2$, τα διαγράμματα των f, P_2 και P_4 συμπίπτουν και αποκλίνουν, όταν το x απομακρύνεται από το 2.

- Απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της f, που όμως τις περισσότερες φορές είναι δύσκολος ή και αδύνατος, και

- ο τύπος $(3.1-2)$, αντίστοιχα $(3.1-3)$ δεν εφαρμόζεται, όταν η f είναι γνωστή μόνον σε έναν αριθμό σημείων του πεδίου ορισμού της, διαφορετικά, όπως συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές, όταν δεν είναι γνωστός ο αναλυτικός της τύπος.

3.2 Θεώρημα του Lagrange

Μια γενικότερη αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος προσέγγισης μιας συνάρτησης, που ξεπερνά τις δυσκολίες της προηγούμενης παραγράφου, δίνεται στη συνέχεια.

Αρχικά ορίζεται η έννοια της παρεμβολής ως εξής:

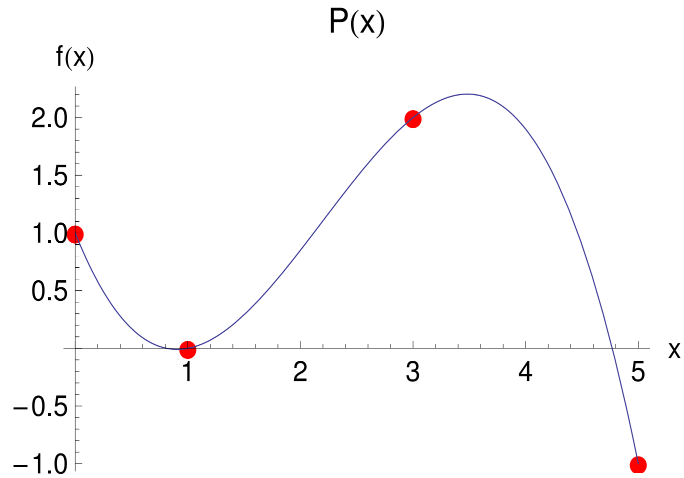
Ορισμός 3.2 - 1 (πολυωνυμικής παρεμβολής). *Έστω ότι x_0, x_1, …, x_n είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a,b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a,b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$ για κάθε $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$. Τότε η πολυωνυμική παρεμβολή (polynomial interpolation) ορίζεται από ένα πολυώνυμο, έστω P_n βαθμού $\leq n$, έτσι ώστε $P_n(x_i)=f(x_i)$ για κάθε $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$ (Σχ. 3.2 - 1).*

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για κάθε σύνολο σημείων (x_i,y_i); $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$, όταν τα x_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Σχετικά με την ύπαρξη και το μονοσήμαντο του πολυωνύμου παρεμβολής $P_n(x)$ ισχύει:

Θεώρημα 3.2 - 1 (παρεμβολής του Lagrange). *Έστω ότι x_0, x_1, …, x_n είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a,b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f(x_i)$ για κάθε $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $P_n(x)$ βαθμού $\leq n$, που δίνεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+\ldots+l_n(x)f(x_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f(x_i) \qquad (3.2 - 1) \end{aligned}$$



Σχήμα 3.2 - 1: Σημεία $\{0,1\},\{1,0\},\{3,2\},\{5,-1\}$

όπου

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$= \prod_{j=0\,\mu\varepsilon\, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,. \qquad (3.2 - 2)$$

και το οποίο συμπίπτει (ταυτίζεται) με την $f(x)$ *στα σημεία* x_i *για κάθε* $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$.

Ο τύπος $(3.2-1)$ είναι γνωστός σαν **τύπος παρεμβολής του Lagrange**, ενώ τα πολυώνυμα $l_i(x)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, που ορίζονται με τον τύπο $(3.2-2)$, λέγονται **πολυώνυμα παρεμβολής** του Lagrange για τα σημεία ή κόμβους (nodes) $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$.

Παρατήρησεις 3.2 - 1

Από τον τύπο $(3.2-2)$ προκύπτουν τα εξής:

i) στον αριθμητή κάθε ένα από τα πολυώνυμα $l_i(x)$ έχει όλους τους παράγοντες εκτός από τον $x-x_i$ (διαφορετικά αν τους είχε όλους θα προέκυπτε πολυώνυμο $n+1$ βαθμού),

ii) ο παρονομαστής προκύπτει από τον αριθμητή αντικαθιστώντας το x με το x_i. Άρα ο παρονομαστής είναι σταθερά.

Πόρισμα 3.2 - 1. *Τα πολυώνυμα $l_i(x)$; $i = 0, 1, \ldots, n$ είναι βαθμού n και επιπλέον*

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad i = j \\ 0 & \text{αν} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{3.2 - 3}$$

Απόδειξη. Έχοντας υπ' όψιν την Παρατήρηση 3.2 - 1(i) κάθε ένα από τα πολυώνυμα $l_i(x)$ στον αριθμητή έχει όλους τους παράγοντες εκτός από τον $x - x_i$. Άρα, επειδή η αρίθμηση αρχίζει από το 0, υπάρχουν n διαφορετικοί παράγοντες, οπότε ο βαθμός του κάθε ενός πολυωνύμου και συνεπώς όλων θα είναι n (ο παρονομαστής είναι σταθερά).

Επίσης είναι

$$l_i(x_i) = \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = 1.$$

Έστω για ευκολία $j = 0$ και $i = 1$, οπότε

$$\begin{aligned} l_1(x_0) &= \left.\frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}\right|_{x=x_0} \\ &= \frac{\overbrace{(x_0 - x_0)}^{0}(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)} = 0. \end{aligned}$$

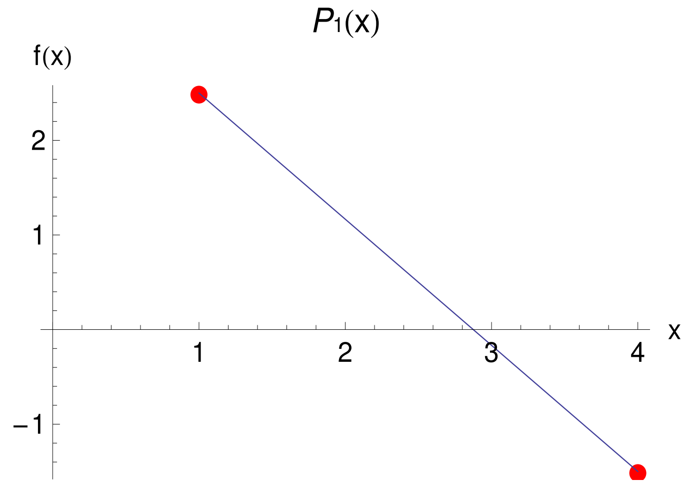
Όμοια για τους γενικούς δείκτες i, j. ∎

Παράδειγμα 3.2 - 1 (γραμμική παρεμβολή)

Ζητείται να προσδιοριστεί το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$ της συνάρτησης $f(x)$ για τα σημεία x_0, x_1.

Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων παρεμβολής είναι 2, πρέπει το ζητούμενο πολυώνυμο να είναι 1ου βαθμού, δηλαδή σύμφωνα με τον τύπο $(3.2 - 2)$

$$P(x) = P_1(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x)\,(x_1)\,.$$



Σχήμα 3.2 - 2: Σημεία $\{1, 2.5\}, \{4, -1.5\}$

Τα πολυώνυμα παρεμβολής $l_0(x)$, $l_1(x)$ σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 3.2 - 1 υπολογίζονται από τον τύπο $(3.2 - 1)$ ως εξής:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{και} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,.$$

Άρα

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f\left(x_0\right) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f\left(x_1\right),$$

δηλαδή

$$P_1(x) = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right) \tag{3.2 - 4}$$

που είναι γνωστός και σαν ο τύπος της **γραμμικής παρεμβολής** (Σχ. 3.2 - 2).

Παράδειγμα 3.2 - 2

Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία

$$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right) = (-0.5, 1.5), \;\; \left(x_1, f\left(x_1\right)\right) = (0.8, 2.0) \;\; \text{και}$$

$$\left(x_2, f\left(x_2\right)\right) = (1.2, -1.5).$$

Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων παρεμβολής είναι 3, πρέπει το ζητούμενο πολυώνυμο να είναι 2ου βαθμού, δηλαδή

$$P(x) = P_2(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x) f\,(x_1) + l_2(x) f\,(x_2)\,.$$

Όμοια τα πολυώνυμα παρεμβολής $l_0(x)$, $l_1(x)$ και $l_2(x)$ σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 3.2 - 1 υπολογίζονται από τον τύπο $(3.2-1)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-0.8}{-0.5-0.8}\,\frac{x-1.2}{-0.5-1.2} \\ &= 0.434\,389 - 0.904\,977\,x + 0.452\,489\,x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-(-0.5)}{0.8-(-0.5)}\,\frac{x-1.2}{0.8-1.2} \\ &= 1.153\,846 + 1.346\,154\,x - 1.923\,077\,x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-(-0.5)}{1.2-(-0.5)}\,\frac{x-0.8}{1.2-0.8} \\ &= -0.588\,235 - 0.441\,177\,x + 1.470,588\,x^2. \end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας τελικά (Σχ. 3.2 - 3)

$$\begin{aligned} P_2(x) &= l_0(x)\,1.5 + l_1(x)\,2.0 + l_2(x)(-1.5) \\ &= 3.841\,629 + 1.996\,606x - 5.373\,303x^2. \end{aligned}$$

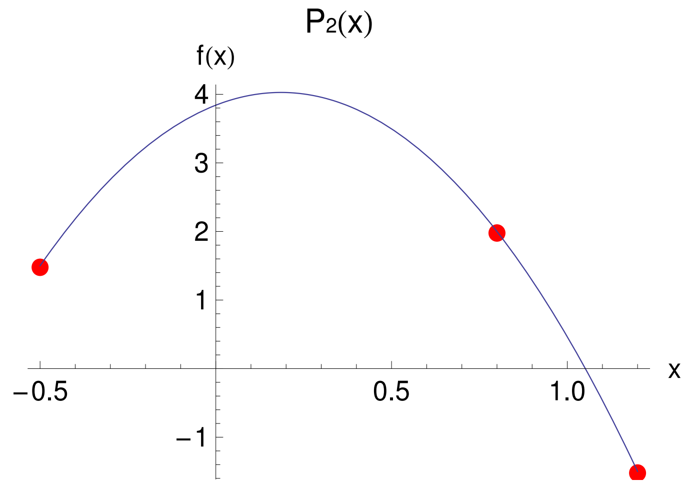
Παράδειγμα 3.2 - 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad (3.2 - 5)$$

όταν τα σημεία παρεμβολής[1] είναι:

[1] Είναι προφανές ότι στις περιπτώσεις αυτές **όλα** τα σημεία παρεμβολής πρέπει να ανήκουν στο διάστημα ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.2 - 3: Σημεία $\{-0.5, 1.5\}, \{0.8, 2.0\}, \{1.2, -1.5\}$

i) $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1.0$, και

ii) $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.3, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1.0.$

Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή $I = 0.746\,824$.

Λύση. Ανάλογα με το Παράδειγμα 3.2 - 2 έχουμε:

i) Επειδή τα σημεία είναι 3, το πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P_2(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x) f\,(x_1) + l_2(x) f\,(x_2)\,,$$

όταν

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 0.5}{0 - 0.5}\,\frac{x - 1.0}{0 - 1.0} \\ &= 1 - 3\,x + 2\,x^2, \\ l_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{0.5 - 0}\,\frac{x - 1.0}{0.5 - 1.0} \\ &= 4\,x - 4\,x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{1.0-0}\,\frac{x-0.5}{1.0-0.5} \\ &= -x+2\,x^2. \end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας τελικά

$$\begin{aligned} P_2(x) &= l_0(x)\,e^0 + l_1(x)\,e^{-0.5^2} + l_2(x)\,e^{-1^2} \\ &= 1 - 0.252\,676\,x - 0.379\,444\,x^2. \end{aligned} \qquad (3.2 - 6)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^1 P_2(x)\,dx \approx 0.747\,180 \quad \text{με σφάλμα} \\ e_1 &= |0.747\,180 - 0.746\,824| = 0.000\,356. \end{aligned}$$

ii) Στην περίπτωση αυτή τα σημεία είναι 4, οπότε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P_3(x) = l_0(x)\,(x_0) + l_1(x) f\,(x_1) + l_2(x) f\,(x_2) + l_3(x) f\,(x_3)\,,$$

όταν

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_0-x_3} \\ &= \frac{x-0.3}{0-0.3}\,\frac{x-0.6}{0-0.6}\,\frac{x-1.0}{0-1.0} \\ &= 1 - 6\,x + 10.555\,56\,x^2 - 5.555\,556\,x^3, \\ l_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_1-x_3} \\ &= \frac{x-0}{0.3-0}\,\frac{x-0.6}{0.3-0.6}\,\frac{x-1.0}{0.3-1.0} \\ &= 9.523\,81\,x - 25.396\,83\,x^2 + 15.873\,02\,x^3, \\ l_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,\frac{x-x_3}{x_2-x_3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x-0}{0.6-0}\,\frac{x-0.3}{0.6-0.3}\,\frac{x-1.0}{0.6-1.0}\\
&= -4.166\,667\,x + 18.055\,56\,x^2 - 13.888\,89\,x^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\\
&= \frac{x-0}{1.0-0}\,\frac{x-0.3}{1.0-0.3}\,\frac{x-0.6}{1.0-0.6}\\
&= 0.642\,857\,x - 3.214\,286\,x^2 + 3.571\,429\,x^3
\end{aligned}
$$

Άρα αντικαθιστώντας τελικά

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= l_0(x)\,e^0 + l_1(x)\,e^{-0.3^2} + l_2(x)\,e^{-0.6^2} + l_3(x)\,e^{-1^2} \qquad (3.2 - 7)\\
&= 1 + 0.033\,616\,x - 1.24\,093\,x^2 + 0.575\,195\,x^3.
\end{aligned}
$$

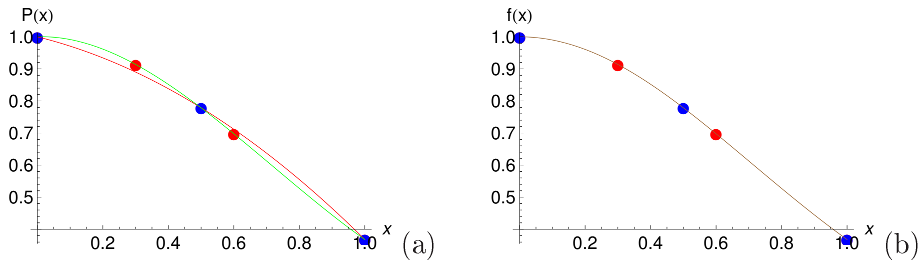
Άρα

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 P_3(x)\,dx \approx 0.746\,963 \quad \text{με σφάλμα}\\
e_2 &= |0.746\,963 - 0.746\,824| = 0.000\,139.
\end{aligned}
$$

Τότε προφανώς $e_2 < e_1$, που επαληθεύει και το θεωρητικά αναμενόμενο αποτέλεσμα, δηλαδή ότι η αύξηση των σημείων παρεμβολής αυξάνει και την ακρίβεια της προσέγγισης. Στο Σχ. 3.2 - 4a δίνεται η γραφική παράσταση των πολυωνύμων P_2 και P_3 με τα αντίστοιχα σημεία παρεμβολής, ενώ στο Σχ. 3.2 - 4b η γραφική παράσταση της e^{-x^2} με όλα τα χρησιμοποιηθέντα σημεία.

3.3 Διαιρεμένες διαφορές. Τύπος του Newton

Το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n(x)$ του Lagrange, που ορίζεται από τον τύπο $(3.2 - 2)$, απαιτεί για τον υπολογισμό του έναν μεγάλο αριθμό πράξεων. Συγκεκριμένα, όταν ο υπολογισμός του γίνεται με ΗΥ, αρχικά υπολογίζεται η παράσταση $(x-x_0)\,(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ και στη συνέχεια τα πολυώνυμα



Σχήμα 3.2 - 4: $x \in [0,1]$ (a) Πολυώνυμο P_2 κόκκινη (σημεία μπλε), P_3 πράσινη καμπύλη (σημεία κόκκινα) και (b) συνάρτηση e^{-x^2}

$l_i(x)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ με κατάλληλες διαιρέσεις της παράστασης αυτής. Όπως έχει ήδη προκύψει και από το Παράδειγμα 3.2 - 3, για να αυξηθεί η ακρίβεια της προσέγγισης, πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάθε φορά και μεγαλύτερος αριθμός σημείων παρεμβολής x_i. Αυτό όμως τότε έχει σαν αποτέλεσμα μία αντίστοιχη αύξηση του βαθμού των αντίστοιχων πολυωνύμων παρεμβολής $P_i(x)$, ενώ, όπως προκύπτει από τον τύπο $(3.2-2)$, στον υπολογισμό των πολυωνύμων $P_i(x)$ δε λαμβάνεται υπ' όψιν η μέχρι τότε γνώση των πολυωνύμων P_0, P_1, $\ldots$, P_{i-1}, με αποτέλεσμα ο τύπος αυτός να οδηγεί κάθε φορά και σε ένα μεγάλο αριθμό επαναλαμβανόμενων πράξεων. Συνολικά, αυτά έχουν σαν αποτέλεσμα ο τελικός υπολογισμός του πολυωνύμου $P_i(x)$ να είναι αρκετά επίπονος αφενός και αφετέρου με πολλά λάθη στρογγυλοποίησης. Επομένως σε ένα πρόβλημα με μεγάλο αριθμό δεδομένων το πολυώνυμο που θα προκύψει, δε θα διέρχεται από τα σημεία, δηλαδή θα υπάρχει σφάλμα, με ότι αυτό συνεπάγεται στην περαιτέρω λύση του προβλήματος.

Στην προσπάθεια περιορισμού του αριθμού των πράξεων που απαιτούνται για τον προσδιορισμό του πολυωνύμου παρεμβολής $P_n(x)$, το οποίο διέρχεται από τα σημεία x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, το ζητούμενο πολυώνυμο γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= A_0 + A_1\,(x - x_0) + A_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\quad + \ldots + A_n\,(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\,. \end{aligned} \qquad (3.3\text{ - }1)$$

Στον τύπο $(3.3-1)$ τα A_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ είναι οι προσδιοριστέοι συντελεστές του πολυωνύμου. Σε αντίθεση με τον γνωστό τύπο των δυνάμεων (power form)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

όταν a_i; $i = 0, 1, \ldots, n$ συντελεστές με $a_n \neq 0$ και $n = 0, 1, \ldots$, ο τύπος αυτός λαμβάνει υπ' όψιν τα σημεία παρεμβολής x_0, x_1, …, x_{n-1}.

Διαιρεμένες διαφορές

Στην $(3.3 - 8)$ ο υπολογισμός των συντελεστών A_i; $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ γίνεται εύκολα με την εισαγωγή της έννοιας της **διαιρεμένης διαφοράς**, που ορίζεται στη συνέχεια ως εξής: αν x_0, x_1, …, x_n είναι $n+1$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$ και $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού επίσης το $[a, b]$ και της οποίας είναι γνωστές οι τιμές $f\left(x_i\right)$ για κάθε $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, τότε

Ορισμός 3.3 - 1. *Η διαιρεμένη διαφορά* **μηδενικής τάξης** *στο σημείο* x_i *συμβολίζεται με* $f\left[x_i\right]$ *και ισούται με*

$$f\left[x_i\right] = f\left(x_i\right). \tag{3.3 - 2}$$

Ορισμός 3.3 - 2. *Η διαιρεμένη διαφορά* **1ης τάξης** *στα σημεία* x_i, x_{i+1} *συμβολίζεται με* $f\left[x_i, x_{i+1}\right]$ *και ισούται με*

$$f\left[x_i, x_{i+1}\right] = \frac{f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)}{x_{i+1} - x_i}. \tag{3.3 - 3}$$

Ορισμός 3.3 - 3. *Η διαιρεμένη διαφορά* **2ης τάξης** *στα σημεία* x_i, x_{i+1}, x_{i+2} *συμβολίζεται με* $f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right]$ *και ισούται με*

$$f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, x_{i+2}\right] - f\left[x_i, x_{i+1}\right]}{x_{i+2} - x_i}. \tag{3.3 - 4}$$

Γενικά ορίζεται ότι:

Ορισμός 3.3 - 4. *Η διαιρεμένη διαφορά **k-τάξης** στα σημεία x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k} συμβολίζεται με $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$ και ισούται με*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$$
$$= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \qquad (3.3 - 5)$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.3 - 1 (θεώρημα υπολογισμού διαιρεμένων διαφορών). *Έστω ότι x_i; $i = 0, 1, \ldots, n$ είναι $n+1$ διαφορετικά σημεία ενός διαστήματος $[a, b]$. Τότε ισχύει:*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \qquad (3.3 - 6)$$

Σημείωση 3.3 - 1

Οι παραπάνω ορισθείσες διαφορές στη βιβλιογραφία είναι γνωστές σαν οι προς τα εμπρός διαιρεμένες διαφορές. Στο μάθημα αυτό θα διατηρηθεί για ευκολία απλά ο όρος διαιρεμένη διαφορά (βλέπε επίσης Άσκηση 3).

Παράδειγμα 3.3 - 1

Να υπολογιστούν οι διαιρεμένες διαφορές στα σημεία

$$(0.3, 1.5) \quad \text{και} \quad (0.8, 2.5).$$

Λύση. Έστω

$$x_0 = 0.3, \quad f(x_0) = 1,5 \quad \text{και} \quad x_1 = 0.8, \quad f(x_1) = 2,5.$$

Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(0.3) = 1.5 \quad \text{και} \quad f[x_1] = f(0.8) = 2.5 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2.5 - 1.5}{0.8 - 0.3} = 2. \end{aligned}$$

Πίνακας 3.3 - 1: Παράδειγμα 3.3 - 1: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 1-τάξης

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$
$x_0 = 0.3$	$f[x_0] = 1.5$	
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{2.5 - 1.5}{0.8 - 0.3} = 2$
$x_1 = 0.8$	$f[x_1] = 2.5$	

Τα παραπάνω αποτελέσματα υπολογίζονται επίσης με τη διαδικασία του Πίνακα 3.3 - 1.

Παράδειγμα 3.3 - 2

Να υπολογιστούν οι διαιρεμένες διαφορές στα σημεία

$$(1.0, 2.0), \quad (1.5, 2.8) \quad \text{και} \quad (1.7, 3.5).$$

Λύση. Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με εκείνη του Παραδείγματος 3.3 - 1 έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.3 - 2.

Στον Πίνακα 3.3 - 3, αντίστοιχα 3.3 - 4 δίνονται σχηματικά οι υπολογισμοί των διαιρεμένων διαφορών 3ης, αντίστοιχα 4ης-τάξης, ενώ στον Αλγόριθμο 3.3 - 1 ο τρόπος υπολογισμού των γενικά.

Πίνακας 3.3 - 2: Παράδειγμα 3.3 - 2: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 2-τάξης

x_i	$f\left[x_i\right]$	$f[,]$	$f[,,]$
$x_0 = 1.0$	$f\left[x_0\right] = 2.0$		
		$f\left[x_0, x_1\right] = \dfrac{2.8 - 2.0}{1.5 - 1.0} = 1.6$	
$x_1 = 1.5$	$f\left[x_1\right] = 2.8$		$f\left[x_0, x_1, x_2\right] = \dfrac{f\left[x_1, x_2\right] - f\left[x_0, x_1\right]}{x_2 - x_1} = \dfrac{3.5 - 1.6}{1.7 - 1.0} = 2.714\,286$
		$f\left[x_1, x_2\right] = \dfrac{3.5 - 2.8}{1.7 - 1.5} = 3.5$	
$x_2 = 1.7$	$f\left[x_2\right] = 3.5$		

Πίνακας 3.3 - 3: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 3ης-τάξης

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

Πίνακας 3.3 - 4: υπολογισμός διαιρεμένης διαφοράς 4ης-τάξης

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,x_2$ $,x_3,x_4]$
		$[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Αλγόριθμος 3.3 - 1 (υπολογισμού του πίνακα των διαιρεμένων διαφορών)

Διάβασε x_i; $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$

Υπολόγισε $f(x_i) = f[x_i]$; $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$

Για $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

  Για $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-k$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

  τέλος i

τέλος k

Τύπος παρεμβολής του Newton

Αποδεικνύεται ότι με τη βοήθεια των διαιρεμένων διαφορών, το πολυώνυμο $(3.3-1)$ γράφεται

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.3 - 7}$$

Ο τύπος $(3.3-7)$ είναι γνωστός και σαν **τύπος παρεμβολής του Newton** (Newton interpolation formula).

Τότε από τον τύπο $(3.3-7)$ προκύπτουν

για $x = x_0$

$$P_n(x_0) = f[x_0] + 0 = f(x_0),$$

για $x = x_1$

$$\begin{aligned} P_n(x_1) &= f[x_0] + f[x_1, x_0]\ (x - x_0) + 0 \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = f(x_1) \quad \text{κ.λπ.}, \end{aligned}$$

δηλαδή επαληθεύεται ότι το $P_n(x)$ στη μορφή αυτή διέρχεται από τα σημεία x_i; $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Με διαδοχική εφαρμογή του τύπου $(3.3-7)$ έχουμε:

για $n = 1$

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) \tag{3.3 - 8}$$

που ισούται με τον τύπο $(3.2-4)$ της γραμμικής παρεμβολής του Παραδείγματος 3.2 - 1,

για $n = 2$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1), \end{aligned} \tag{3.3 - 9}$$

για $n = 3$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) \tag{3.3 - 10}$$

Πίνακας 3.3 - 5: Παράδειγμα 3.3 - 3

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$
$x_0 = 1.0$	1.0		
		$f[x_0, x_1]$ $= \frac{0.778\,801 - 1.0}{0.5 - 0}$ $= -0.442\,398$	
$x_1 = 1.5$	$0.778\,801$		$f[x_0, x_1, x_2]$ $= \frac{-0.821\,843 - (-0.442\,398)}{1.0 - 0}$ $= -0.379\,444$
		$f[x_1, x_2]$ $= \frac{0.367\,879 - 0.778\,801}{1.0 - 0.5}$ $= -0.821\,843$	
$x_2 = 1.8$	$0.367\,879$		

$$+f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1),$$
$$+f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Όμοια όταν $n > 3$.

Παράδειγμα 3.3 - 3

Ζητείται να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ του Παραδείγματος 3.2 - 3, όταν τα σημεία είναι $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, και $x_2 = 1.0$.

Λύση. Επειδή τα σημεία είναι 3 το ζητούμενο πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού και δίνεται από τον τύπο $(3.3 - 9)$. Για τον υπολογισμό του απαιτείται η δημιουργία του Πίνακα 3.3 - 5.

Άρα

$$P_(x) = 1.0 - 0.442\,398\,x - 0.379\,444\,x(x - 0.5)$$

$$= \; 1 - 0.252\,676\,x - 0.379\,444\,x^2,$$

δηλαδή το αποτέλεσμα $(3.2 - 6)$.

Παράδειγμα 3.3 - 4

Ζητείται να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 3ου βαθμού της συνάρτησης $f(x)$, όταν τα σημεία x_i και οι τιμές $f\left(x_i\right)$ δίνονται στον Πίνακα 3.3 - 6.

Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(3.3 - 13)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0.585 - 0.270(x-1.0) + 3.650(x-1.0)(x-1.5) \\ &\quad -7.985(x-1.0)(x-1.5)(x-1.8) \\ &= 23.391 - 47.309\,x + 30.829\,x^2 - 6.319\,x^3. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του πολυωνύμου $P_3(x)$ με το MATHEMATICA γίνεται στο Πρόγραμμα 3.3 - 1.

Πρόγραμμα 3.3 - 1 (υπολογισμού του πολυωνύμου παρεμβολής)

```
data = {{1.0, 0.585}, {1.5, 0.450}, {1.8, 1.245},
       {2.5, -0.980}};
InterpolatingPolynomial[data,x]
```

3.3.1 Σχέση παρεμβολής και παραγώγου

Αν $i = 0$, από τον τύπο $(3.3 - 3)$ προκύπτει

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}. \qquad (3.3 - 11)$$

Τότε, εφόσον η υπάρχει η παράγωγος f', από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έχουμε

$$f\left[x_0, x_1\right] = f'(\xi), \qquad (3.3 - 12)$$

όταν $\xi \in (x_0, x_1)$.

Το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό σαν το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για διαιρεμένες διαφορές, γενικεύει το αποτέλεσμα αυτό.

Πίνακας 3.3 - 6: Παράδειγμα 3.3 - 4

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
$x_0 = 1.0$	0.585			
		$f[x_0, x_1]$ $= \frac{0.540-0.585}{1.5-1.0}$ $= -0.270$		
$x_1 = 1.5$	0.450		$f[x_0, x_1, x_2]$ $= \frac{2.650-(-0.270)}{1.8-1.0}$ $= 3.650$	
		$f[x_1, x_2]$ $= \frac{1.245-0.450}{1.8-1.5}$ $= 2.650$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ $= \frac{-8.327-3.650}{2.5-1.0}$ $= -7.985$
$x_2 = 1.8$	1.245		$f[x_1, x_2, x_3]$ $= \frac{-3.179-2.650}{2.5-1.8}$ $= -8.327$	
		$f[x_1, x_2]$ $= \frac{-0.980-1.245}{2.5-1.8}$ $= -3.179$		
$x_3 = 2.5$	-0.980			

Θεώρημα 3.3 - 2. *Έστω $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[a, b]$ και της οποίας υπάρχει η n-τάξης παράγωγος για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε, αν x_0, x_1, …, x_n, είναι $n+1$ διαφορετικά σημεία του $[a, b]$, υπάρχει σημείο ξ με $\xi \in (a, b)$, έτσι ώστε*

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n\,!}\,. \tag{3.3 - 13}$$

Ασκήσεις

1. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο που προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ του Παραδείγματος 3.2 - 3, όταν τα σημεία είναι $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$, και $x_3 = 1.0$. Να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με το αντίστοιχο του τύπου $(3.2-7)$.

2. Έστω ότι τα σημεία x_0, x_1, x_2 και x_3 ισαπέχουν, δηλαδή $h = x_{i+1} - x_i$ για κάθε $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Δείξτε ότι[2]

$$2\,!\,f\left[x_0, x_1, x_2\right] = \frac{f\left(x_0\right) - 2f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)}{h^2}\,, \tag{3.3 - 14}$$

$$\begin{aligned} 3\,!\,f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right] &= \frac{1}{h^3}\left[-f\left(x_0\right) + 3f\left(x_1\right)\right. \\ &\quad \left. -3f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.3 - 15}$$

3 (προαιρετική). Έστω ότι τα σημεία x_0, x_1, …, x_n ισαπέχουν, δηλαδή $h = x_{i+1} - x_i$ για κάθε $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Τότε, αν $x = x_0 + sh$, η διαφορά $x - x_i$ γράφεται $x - x_i = (s-1)h$, οπότε από τον τύπο $(3.3-7)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n\left(x_0 + sh\right) = f\left[x_0\right] + shf\left[x_1, x_0\right] + s(s-1)h^2 f\left[x_0, x_1, x_2\right] \\ &\quad + \ldots + s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\cdots(s-n+1)\,h^k\,f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]. \end{aligned}$$

Αν

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k\,!}\,,$$

[2]Οι τύποι αυτοί είναι μια προσέγγιση της αντίστοιχης παραγώγου στο Θεώρημα 3.3 - 2. Αναλυτική μελέτη θα γίνει στο Μάθημα Αριθμητική Παραγώγιση.

δείξτε ότι το πολυώνυμο $P_n(x)$ τελικά γράφεται

$$P_n(x) = P_n\left(x_0 + sh\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} k\,!\,h^k f\left[x_0, x_1, \dots, x_k\right]. \qquad (3.3 - 16)$$

Εισάγοντας το συμβολισμό Δ για τις προς τα εμπρός διαιρεμένες διαφορές ως εξής:[3]

$$\begin{aligned} f\left[x_0, x_1\right] &= \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f\left(x_0\right) \\ f\left[x_0, x_1, x_2\right] &= \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f\left(x_1\right) - \Delta f\left(x_0\right)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f\left(x_0\right) \\ &\vdots \\ f\left[x_0, x_1, \dots, x_k\right] &= \frac{1}{k\,!\,h^k}\Delta^k f\left(x_0\right) \end{aligned}$$

δείξτε επίσης ότι ο τύπος $(3.3 - 16)$ γράφεται

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f\left(x_0\right). \qquad (3.3 - 17)$$

4

[3] Βλέπε Σημείωση 3.3 - 1.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[9] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[10] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[11] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/