

Μάθημα 6

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Η προσέγγιση της τιμής της παραγώγου μιας συνάρτησης χρησιμοποιείται στις παρακάτω κυρίως περιπτώσεις:

- i) όταν λόγω της πολύπλοκης μορφής του τύπου μιας συνάρτησης είναι αδύνατος ο θεωρητικός υπολογισμός της,
- ii) όταν δεν είναι γνωστός ο τύπος της συνάρτησης, αλλά μόνον οι τιμές της σε ορισμένα σημεία, και
- iii) στην προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων. Η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί στα μαθήματα που ακολουθούν.

6.1 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

6.1.1 Υπολογισμός με πολυώνυμο παρεμβολής

Έστω $f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε, αν x_0, x_1, \dots, x_n είναι $n + 1$ διαφορετικά σημεία του $[a, b]$, όπως είναι ήδη γνωστό ισχύει ο παρακάτω τύπος παρεμβολής του Newton

$$f(x) \approx P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots \quad (6.1.1 - 1) \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Διακρίνονται τώρα οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις για τον αριθμό των σημείων παρεμβολής.

Σημεία παρεμβολής : x_0, x_1

Έστω $a = x_0$ και $b = x_1$: τότε από τον τύπο (6.1.1 - 1) προκύπτει

$$f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

οπότε

$$f'(\xi) \approx P_1(\xi) = f[x_0, x_1] \quad (6.1.1 - 2)$$

για έκφραση που είναι ανεξάρτητη από το σημείο ξ . Αν:

i) $\xi = x_0$ και $h = x_1 - x_0$, από τον τύπο (6.1.1 - 2) προκύπτει

$$f'(\xi) \approx f[\xi, \xi + h] = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \quad (6.1.1 - 3)$$

που είναι γνωστός ως ο προς τα **εμπρός τύπος** (forward-difference formula) προσέγγισης της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης.

ii) $\xi = x_1$, τότε

$$f'(\xi) \approx f[\xi - h, \xi] = \frac{f(\xi) - f(\xi - h)}{h} \quad (6.1.1 - 4)$$

γνωστός ως ο **ανάδρομος τύπος** (backward-difference formula) προσέγγισης της 1ης παραγώγου.

iii) $\xi = (x_0 + x_1)/2$, οπότε τα σημεία x_0 και x_1 βρίσκονται συμμετρικά εκατέρωθεν του σημείου ξ , με $x_0 = \xi - h$, $x_1 = \xi + h$ και $h = (x_1 - x_0)/2$. Τότε

$$\begin{aligned} f'(\xi) &\approx f[\xi - h, \xi + h] \\ &= \frac{f(\xi + h) - f(\xi - h)}{2h} \end{aligned} \quad (6.1.1 - 5)$$

γνωστός ως ο με **κεντρικές διαφορές τύπος** (central-difference formula) προσέγγισης της πρώτης παραγώγου.

Από τους τύπους (6.1.1-3) - (6.1.1-5) προκύπτει ότι, όταν τα σημεία x_0 και x_1 είναι αρκετά κοντά, τότε η $f[x_0, x_1]$ δίνει μία πολύ καλύτερη προσέγγιση της παραγώγου $f'(\xi)$ στο μέσον $\xi = (x_0 + x_1)/2$ παρά στα άκρα σημεία x_0 και x_1 , ένα συμπέρασμα που άλλωστε συμφωνεί και με το Θεώρημα της Μέσης Τιμής.

Σημεία παρεμβολής : x_0, x_1, x_2

Έστω $a = x_0$ και $b = x_2$. Τότε

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1), \quad (6.1.1 - 6)$$

οπότε

$$f'(\xi) \approx P_2'(\xi) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2\xi - x_0 - x_1). \quad (6.1.1 - 7)$$

¹ Διακρίνονται τώρα οι παρακάτω περιπτώσεις για το ξ . Αν

i) $\xi = x_0, x_1 = \xi + h$ και $x_2 = \xi + 2h$, τότε από την (6.1.1-7) προκύπτει

$$f'(\xi) \approx \frac{-3f(\xi) + 4f(\xi + h) - f(\xi + 2h)}{2h}. \quad (6.1.1 - 8)$$

ii) $\xi = x_1, x_0 = \xi - h$ και $x_2 = \xi + h$, τότε

$$f'(\xi) \approx \frac{-f(\xi - h) + f(\xi + h)}{2h}. \quad (6.1.1 - 9)$$

Τελικά, αν

iii) $\xi = x_2, x_0 = \xi - 2h$ και $x_1 = \xi - h$, τότε

$$f'(\xi) \approx \frac{f(\xi - 2h) - 4f(\xi - h) + 3f(\xi)}{2h} \quad (6.1.1 - 10)$$

όπου προφανώς ότι ο τύπος (6.1.1-10) προκύπτει από τον (6.1.1-8) θέτοντας όπου h το $-h$. Επομένως τελικά οι διαφορετικοί τύποι υπολογισμού της 1ης παραγώγου στην περίπτωση αυτή είναι οι (6.1.1-8) και (6.1.1-9), που είναι γνωστοί και σαν οι **τύποι των 3 σημείων**.

¹Οι τύποι (6.1.1-8) - (6.1.1-10) να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Παραγωγίζοντας τώρα την (6.1.1 - 6), έχουμε

$$f''(\xi) \approx P_2''(\xi) = 2f[x_0, x_1, x_2]. \quad (6.1.1 - 11)$$

Αν $\xi = x_1$, $x_0 = \xi - h$ και $x_2 = \xi + h$, τότε από την (6.1.1 - 11) προκύπτει

$$f''(\xi) \approx \frac{f(\xi - h) - 2f(\xi) + f(\xi + h)}{h^2} \quad (6.1.1 - 12)$$

που είναι γνωστός ως ο με **κεντρικές διαφορές τύπος** (central-difference formula) προσέγγισης της 2ης παραγώγου μιας συνάρτησης.

Προσεγγίσεις παραγώγων ανώτερης τάξης προκύπτουν ανάλογα θεωρώντας μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμα παρεμβολής.

6.1.2 Υπολογισμός με τον τύπο του Taylor

Είναι ήδη γνωστό ότι, αν $f \in C^\nu(a, b)$ είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη μέχρι και ν -τάξη στο (a, b) , τότε, αν $\xi \in (a, b)$, ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**²

$$\begin{aligned} f(x) \approx & f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \xi)^2 \\ & + \dots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu!}(x - \xi)^\nu, \end{aligned} \quad (6.1.2 - 1)$$

όταν οι αριθμοί $f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου στο ξ .

Έστω τώρα ότι στον τύπο (6.1.2 - 1) τα x και ξ αντικαθίστανται από τα $x + h$ και x αντίστοιχα με $h > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x + h) \approx & f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) \\ & + \dots + \frac{h^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x). \end{aligned} \quad (6.1.2 - 2)$$

²Όταν $\xi = 0$, ο τύπος (6.1.2 - 1) γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu$$

που είναι γνωστός σαν **τύπος του Maclaurin**, ενώ οι αριθμοί $f(0), f'(0), \dots, f^{(\nu)}(0)$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές του πολυωνύμου.

Ο τύπος (6.1.2 - 2), όταν το h αντικατασταθεί με το $-h$, γράφεται

$$f(x-h) \approx f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots + (-1)^\nu \frac{h^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x). \quad (6.1.2 - 3)$$

Προσεγγίσεις 1ης παραγώγου

Έστω ο τύπος (6.1.2 - 2) στη μορφή

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.1.2 - 4)$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 1

Στην (6.1.2 - 4) ο όρος $\mathcal{O}(h^2)$ θα συμβολίζει στο εξής κάθε παράσταση με όρους h βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του h^2 . Επειδή τότε ο συμβολισμός συμπεριλαμβάνει και την περίπτωση του αθροίσματος των άπειρων όρων δηλαδή της σειράς, η (6.1.2-4) και κάθε ανάλογη αυτής έκφραση θα γράφεται με ίσον, διαφορετικά θα χρησιμοποιείται το σύμβολο του κατά προσέγγιση ίσον (\approx).

Λύνοντας την (6.1.2 - 4) ως προς $f'(x)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (6.1.2 - 5)$$

που συμπίπτει με την (6.1.1 - 3), όταν $x = \xi$. Στην (6.1.2 - 5) ο όρος $\mathcal{O}(h)$ δηλώνει ότι η προσέγγιση είναι 1ου βαθμού, δηλαδή ισούται με το βαθμό του όρου h .

Όμοια από τον τύπο (6.1.2 - 3) προκύπτει ότι

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

οπότε λύνοντας ως προς $f'(x)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (6.1.2 - 6)$$

δηλαδή η (6.1.1 - 4) με $x = \xi$ και προσέγγιση επίσης 1ου βαθμού.

Αν η (6.1.2 - 2) γραφεί ως εξής:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (6.1.2 - 7)$$

και (6.1.2 - 3) ως:

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4), \quad (6.1.2 - 8)$$

τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις (6.1.2 - 7) και (6.1.2 - 8) προκύπτει ότι

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \mathcal{O}(h^3),$$

οπότε

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.1.2 - 9)$$

δηλαδή η (6.1.1 - 5) με $x = \xi$ και προσέγγιση 2ου βαθμού.

Προσέγγιση 2ης παραγώγου

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (6.1.2 - 7) και (6.1.2 - 8) προκύπτει

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη με h^2 τελικά έχουμε

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.1.2 - 10)$$

δηλαδή η (6.1.1 - 12) με $x = \xi$ και προσέγγιση 2ου βαθμού.

Συνδυάζοντας κατάλληλα τις (6.1.2-2) και (6.1.2-3) προκύπτουν προσεγγίσεις για κάθε παράγωγο της f .

Παράδειγμα 6.1.2 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{και} \quad \xi = 1.$$

Τότε οι τύποι (6.1.1 - 3) και (6.1.1 - 12), όταν

$$h = 0.1, \quad 0.01 \quad \text{και} \quad 0.001,$$

δίνουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.1.2 - 1. Οι θεωρητικές τιμές είναι $f'(1) \approx -0.7357589$ και $f''(1) \approx 0.7357589$.

Πίνακας 6.1.2 - 1: Παράδειγμα 6.1.2 - 1: προσέγγιση 1ης και 2ης παραγώγου

h	$f'(1)$	απόλυτο σφάλμα	$f''(1)$	απόλυτο σφάλμα
0.100	-0.6968216	0.03893726	0.7296463	0.6112551E-02
0.010	-0.7320559	0.370301E-02	0.7356976	0.6131136E-04
0.001	-0.7353908	0.368124E-04	0.7357583	0.6131437E-06

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων η 1ης και η 2ης τάξης παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

i) $\ln(e^{2x} - 2)$

iii) $x - (\ln x)^x$

ii) $x \ln x$

iv) $e^{x/3} + x^2$.

στο σημείο $\xi = 1.5$, όταν $h = 0.1, 0.01$ και 0.0025 .

2. Όμοια των συναρτήσεων

i) $x \cos x - x^2 \sin x$

ii) $\tan x$

στο σημείο $\xi = \pi/4$.

3. Με τον τύπο του Taylor να υπολογιστούν προσεγγίσεις των παραγώγων $f^{(3)}(\xi)$ και $f^{(4)}(\xi)$.

6.2 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

6.2.1 Υπολογισμός με τον τύπο του Taylor

Έστω $u = u(x, t)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών όπου το x συμβολίζει συνήθως τη μεταβλητή του διαστήματος και το t του χρόνου. Τότε ο τύπος (6.1.2 - 1) γράφεται

$$u(x+h, t) \approx u(x, t) + \frac{h}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots + \frac{h^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}, \quad (6.2.1 - 1)$$

όταν $h > 0$ η αύξηση της μεταβλητής x , αντίστοιχα

$$u(x, t + \ell) \approx u(x, t) + \frac{\ell}{1!} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\ell^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots + \frac{\ell^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}, \quad (6.2.1 - 2)$$

όταν $\ell > 0$ η αύξηση της t . Θέτοντας όπου h το $-h$, αντίστοιχα όπου ℓ το $-\ell$, προκύπτουν ανάλογοι τύποι της (6.1.2 - 3).

Όμοια τότε με την Παράγραφο 6.1.2 αποδεικνύεται ότι ισχύουν για την 1η μερική παράγωγο ως προς x οι προσεγγίσεις

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (6.2.1 - 3)$$

$$= \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (6.2.1 - 4)$$

$$= \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (6.2.1 - 5)$$

με ανάλογες εκφράσεις για την $\partial u / \partial t$, ενώ για τη 2η μερική παράγωγο ως προς x η προσέγγιση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.2.1 - 6)$$

αντίστοιχα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(x, t + \ell) - 2u(x, t) + u(x, t - \ell)}{\ell^2} + \mathcal{O}(\ell^2). \quad (6.2.1 - 7)$$

Συνδυάζοντας κατάλληλα την (6.2.1 - 1), αντίστοιχα (6.2.1 - 2) είναι δυνατόν να προκύψουν και άλλες προσεγγίσεις³ για τις μερικές παραγώγους της u .

Δίνεται στη συνέχεια μια σημαντική εφαρμογή του τύπου (6.2.1 - 5) στην προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων.

³Εκτός από τις μιχτές παραγώγους που υπολογίζονται στην Παράγραφο 6.2.2.



Σχήμα 6.2.1 - 1: διαμέριση του $[a, b]$. Τα x_0 και x_N είναι τα **συνοριακά**, ενώ τα x_1, \dots, x_{N-1} τα **εσωτερικά σημεία**



Σχήμα 6.2.1 - 2: διαμέριση του $[a, b]$. Τα σημεία x_{-1} και x_{N+1} είναι **εκτός** του διαστήματος $[a, b]$

Συνοριακές συνθήκες

Στον προσεγγιστικό υπολογισμό της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης η παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x ανάλογα με την τάξη της αντικαθίσταται με τις προσεγγίσεις (6.2.1-3) - (6.2.1-6) κ.λπ. Αυτό σημαίνει τότε ότι το διάστημα $[a, b]$ πρέπει να υποδιαφεθεί σε επί μέρους ισοαπέχοντα υποδιαστήματα από τα σημεία (Σχ. 6.2.1 - 1)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (6.2.1 - 8)$$

και στη συνέχεια σε κάθε ένα από αυτά να εφαρμοστεί ο ανάλογος προσεγγιστικός τύπος.

Το πρόβλημα τότε με τις τιμές της συνάρτησης δημιουργείται, όταν η αντικατάσταση των παραγώγων γίνεται στα άκρα σημεία x_0 και x_N ή σε γειτονικά των. Για παράδειγμα, έστω ότι απαιτείται η προσέγγιση της u_{xx} στο σημείο x_0 . Τότε σύμφωνα με τον τύπο (6.2.1 - 6) έχουμε

$$u_{xx}|_{x=x_0} = \frac{u(x_0 - h, t) - 2u(x_0, t) + u(x_0 + h, t)}{h^2}$$

όπου όμως το σημείο $x_0 - h$ είναι εκτός του πεδίου ορισμού $[a, b]$ (Σχ. 6.2.1 - 2). Ανάλογο πρόβλημα υπάρχει και στο σημείο x_N .

Για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων πρέπει να είναι γνωστή η συμπεριφορά της συνάρτησης u στα συνοριακά σημεία x_0 και x_N . Αυτό γίνεται με τις λεγόμενες **συνοριακές συνθήκες** (boundary conditions) του προβλήματος που αναφέρεται η διαφορική εξίσωση.

Οι κυριότερες από αυτές είναι:

- **Neumann** συνοριακές συνθήκες

$$u_x|_{x=x_0} = 0 \quad \text{και} \quad u_x|_{x=x_N} = 0.$$

Τότε από την (6.2.1 - 5) προκύπτουν τα εξής (Σχ. 6.2.1 - 2):

$$u_x|_{x=x_0} = \frac{u(x_0 + h, t) - u(x_0 - h, t)}{2h} = 0, \quad \text{οπότε}$$

$$u(x_0 - h, t) = u(x_0 + h, t), \quad \text{και}$$

(6.2.1 - 9)

$$u_x|_{x=x_N} = \frac{u(x_N + h, t) - u(x_N - h, t)}{2h} = 0, \quad \text{οπότε}$$

$$u(x_N + h, t) = u(x_N - h, t).$$

- **Dirichlet** συνοριακές συνθήκες

$$u(x_0) = v_0 \quad \text{και} \quad u(x_N) = v_1,$$

όταν v_0 και v_1 γνωστές τιμές. Στην περίπτωση αυτή, εφόσον δεν είναι γνωστές άλλες συνθήκες, η προσέγγιση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται **μόνο στα εσωτερικά σημεία** (Σχ. 6.2.1 - 1).

Παράδειγμα 6.2.1 - 1

Η εξίσωση **διάδοσης θερμότητας** σε μία διάσταση γράφεται

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{όπου} \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (6.2.1 - 10)$$

όταν a θετική σταθερά και $u(x, t)$ μια επαρκώς διαφορίσιμη συνάρτηση όπου η t συμβολίζει τη μεταβλητή του χρόνου και η x του διαστήματος. Στη φυσική η συνάρτηση u ορίζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας, ενώ η σταθερά a το συντελεστή θερμικής διάχυσης.

Η εξίσωση θερμότητας είναι θεμελιώδους σημασίας σε διάφορους τομείς των θετικών επιστημών όπως: στα μαθηματικά ως το πρότυπο της λύσης

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & U_1^n & U_2^n & & & & U_{N-1}^n & 0 \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet
 \end{array}$$

Σχήμα 6.2.1 - 3: Παράδειγμα 6.2.1 - 1: οι προσεγγιστικές τιμές U_m^n ; $m = 0, \dots, N$ της συνάρτησης $u(x, t)$ στα σημεία (6.2.1 - 12), όταν ληφθούν υπ' όψιν οι συνοριακές συνθήκες (6.2.1 - 11), δηλαδή $U_0^n = 0$ και $U_N^n = 0$

παραβολικών PDE's, στη θεωρία πιθανοτήτων, στα οικονομικά μαθηματικά κ.λπ.

Για την προσεγγιστική λύση της (6.2.1 - 10) θεωρούνται οι παρακάτω **συνοριακές συνθήκες Dirichlet** (boundary conditions)

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad \text{όταν } t > 0, \quad (6.2.1 - 11)$$

Για την προσεγγιστική λύση της (6.2.1-10) το διάστημα $[a, b]$ της μεταβλητής x υποδιαιρείται σε N ίσα υποδιαστήματα πλάτους h με $h = (b - a)/N$ (Σχ. 6.2.1 - 1) από τα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b. \quad (6.2.1 - 12)$$

Έστω για ευκολία ότι η τιμή η προσεγγιστική τιμή της $u(x, t)$ στα σημεία x_m ; $m = 0, 1, \dots, x_N$, δηλαδή η $u(x_m, t)$ συμβολίζεται στο εξής με

$$U_m^n \quad \text{για κάθε } m = 0, 1, \dots, N.$$

Επειδή σύμφωνα με την (6.2.1 - 11) δίνονται οι συνοριακές τιμές στα σημεία $x_0 = a$ και $x_N = b$, η (6.2.1 - 10) εφαρμόζεται σε κάθε χρονική στιγμή της μορφής $t = n\ell$ όπου ℓ το βήμα του χρόνου και $n = 1, 2, \dots$ σε όλα τα **εσωτερικά σημεία** (Σχ. 6.2.1 - 3) της διαμέρισης (6.2.1 - 12).

Τότε σύμφωνα με την (6.2.1-6) έχουμε το παρακάτω σύστημα N διαφορικών

εξισώσεων 1ης τάξης:

$$\begin{aligned}
 x = x_1 & : \frac{dU_1^n}{dt} = \frac{\overbrace{U_0^n}^0 - 2U_1^n + U_2^n}{h^2} \\
 x = x_2 & : \frac{dU_2^n}{dt} = \frac{U_1^n - 2U_2^n + U_3^n}{h^2} \\
 & \vdots \\
 x = x_{N-1} & : \frac{dU_{N-1}^n}{dt} = \frac{U_{N-2}^n - 2U_{N-1}^n + U_N^n}{h^2} \\
 x = x_N & : \frac{dU_N^n}{dt} = \frac{U_{N-1}^n - 2U_N^n + \overbrace{U_{N+1}^n}^0}{h^2}
 \end{aligned} \tag{6.2.1 - 13}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται σε **διανυσματική μορφή** ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\mathbf{U}(t), \tag{6.2.1 - 14}$$

όταν

$$\mathbf{U}(t) = [U_1(t), \dots, U_N(t)]^T$$

είναι το διάνυσμα των προσεγγιστικών λύσεων της εξίσωσης (6.2.1 – 10) σε επίπεδο χρόνου t και A ένας τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A = h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Από τη λύση του συστήματος (6.2.1 – 14) προκύπτουν τότε οι προσεγγιστικές τιμές της u στα σημεία (6.2.1 – 12). Η λύση της (6.2.1 – 10) για τις διάφορες τιμές του t θα δοθεί σε μάθημα, που ακολουθεί.

6.2.2 Υπολογισμός με τον τύπο του Taylor για δύο μεταβλητές

Ο τύπος του Taylor για την περίπτωση μιας συνάρτησης, έστω $u = u(x, t)$, όταν το ανάπτυγμα γίνεται και για τις δύο μεταβλητές x και t γράφεται

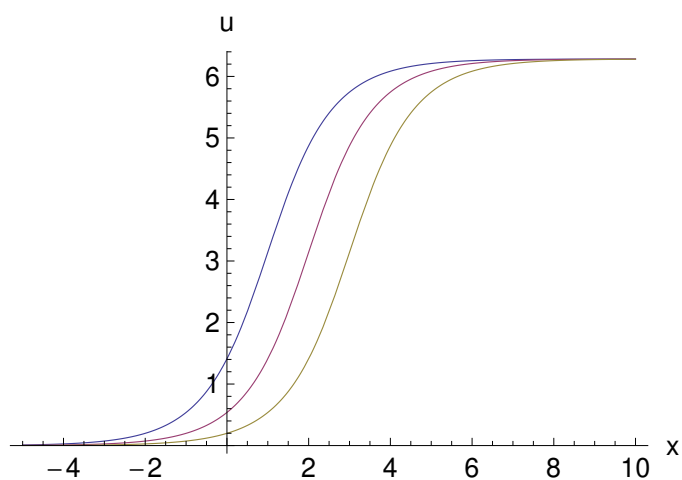
$$\begin{aligned}
 u(x+h, t+\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + \ell \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \ell^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{3!} \left(h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3h^2\ell \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 3h\ell^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \ell^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{6.2.2 - 1}$$

Από την (6.2.2-1) εύκολα αποδεικνύεται τότε με κατάλληλους συνδυασμούς των προσήμων των h και ℓ ότι⁴

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{4h\ell} [u(x+h, t+\ell) - u(x+h, t-\ell) \\
 &\quad - u(x-h, t+\ell) + u(x-h, t-\ell)]
 \end{aligned}$$

⁴Στην (6.2.2 - 1) θέτοντας κατάλληλα όπου h το $-h$ και όπου ℓ το $-\ell$, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
 u(x-h, t+\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} (-h u_x + \ell u_t) \\
 &+ \frac{1}{2!} (h^2 u_{xx} - 2h\ell u_{xt} + \ell^2 u_{tt}) + \dots, \\
 u(x+h, t-\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} (h u_x - \ell u_t) \\
 &+ \frac{1}{2!} (h^2 u_{xx} - 2h\ell u_{xt} + \ell^2 u_{tt}) + \dots, \\
 u(x-h, t-\ell) &= u(x, t) + \frac{1}{1!} (-h u_x - \ell u_t) \\
 &+ \frac{1}{2!} (h^2 u_{xx} + 2h\ell u_{xt} + \ell^2 u_{tt}) + \dots
 \end{aligned}$$



Σχήμα 6.2.2 - 1: Παράδειγμα 6.2.2 - 1: η μορφή του κύματος $u(x, t) = 4 \tan^{-1} [\exp(x - t)]$, όταν $t = 1, 2, 3$ και $x \in [-5, 10]$

$$+ \mathcal{O} \left(\frac{(h + \ell)^4}{h\ell} \right). \quad (6.2.2 - 2)$$

Συνδυάζοντας κατάλληλα την (6.2.2 - 1) είναι δυνατόν να προκύψουν και άλλες ανώτερης τάξης προσεγγίσεις των μερικών μικτών παραγώγων της u .

Παράδειγμα 6.2.2 - 1

Η συνάρτηση

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} [\exp(x - t)] \quad (6.2.2 - 3)$$

περιγράφει ένα κύμα, που διαδίδεται (Σχ. 6.2.2 - 1) χωρίς να αλλάζει μορφή (soliton).

Τότε

$$u_{xt} = 4 \frac{e^{t+x} (-e^{2t} + e^{2x})}{(e^{2t} + e^{2x})^2}, \quad \text{οπότε} \quad u_{xt}|_{x=0, t=1} = -0.9871087.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (6.2.2 - 2) για $h = \ell = 0.01$, όταν $x = 0, t = 1$ έχουμε

$$u_{xt}|_{x=0, t=1} = \frac{1}{4h\ell} [u(0 + 0.01, 1 + 0.01) - u(0 + 0.01, 1 - 0.01)]$$

$$\begin{aligned} & -u(0 - 0.01, 1 + 0.01) + u(0 - 0.01, 1 - 0.01)] \\ & = -0.9870587. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει σφάλμα στην προσέγγιση: $|e| = 5 \times 10^{-5}$.

Ασκήσεις

1. Όμοια με τη συνάρτηση $u(x, t)$ του Παραδείγματος 6.2.2 - 1 η συνάρτηση

$$v(x, t) = 4 \tan^{-1} \{ \exp[-(x - t)] \}$$

περιγράφει ένα κύμα soliton. Εφαρμόζοντας τον τύπο (6.2.2 - 2) για $h = \ell = 0.01$, όταν $x = 0$, $t = 1$ να υπολογιστεί η $u_{xt}|_{x=0, t=1}$ και να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη θεωρητική.

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $u(x, t) + v(x, t)$, όταν $x \in [-5, 10]$ και $t = 1, 2, 5$. Τι παρατηρείτε;

2. Έστω η συνάρτηση

$$u(x, y) = 4 \left[\tan^{-1}(\exp x) + \tan^{-1}(\exp y) \right]. \quad (6.2.2 - 4)$$

Όμοια με τον τύπο (6.2.2 - 2) για $h = k = 0.01$, όταν $x = y = 1$ να υπολογιστεί η $u_{xy}|_{x=1, y=1}$ και να γίνει σύγκριση με την αντίστοιχη θεωρητική.

3. Όμοια της

$$u(x, y) = 4 \tan^{-1} \exp \left(3 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (6.2.2 - 5)$$

Σημείωση 6.2.2 - 1

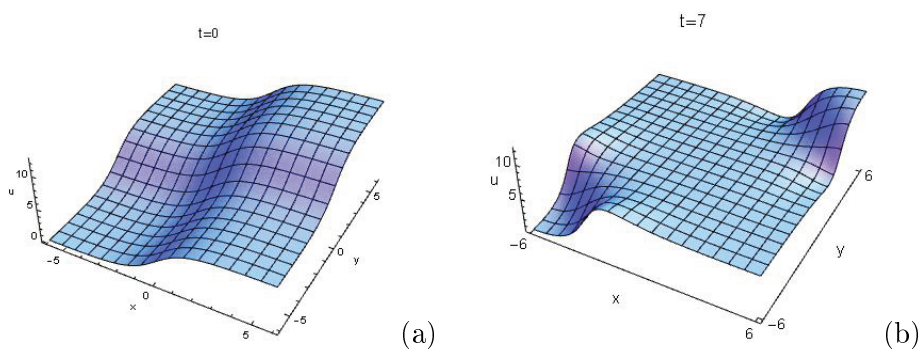
Η (6.2.2 - 4), αντίστοιχα η (6.2.2 - 5), όταν είναι η λύση τη χρονική στιγμή $t = 0$ της διδιάστατης ημιτονοειδούς διαφορικής εξίσωσης του Gordon (sine-Gordon equation)⁵

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \phi(x, y) \sin u$$

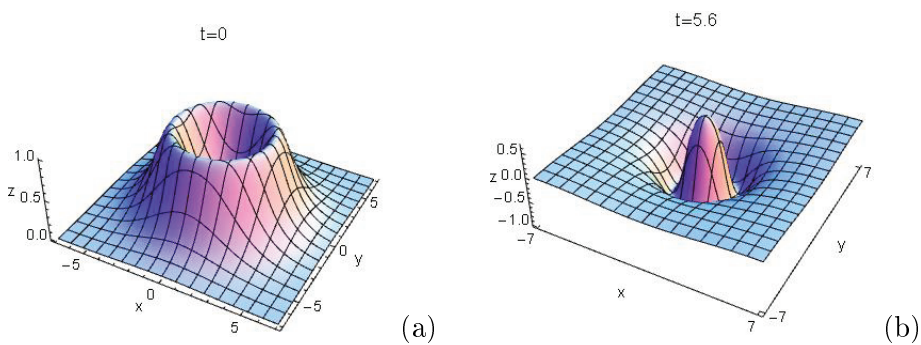
στην περίπτωση όπου $\rho = 0$ και $\phi(x, y) = 1$ δημιουργούν με την πάροδο του χρόνου

⁵Βλέπε δημοσίευση Α. G. Bratsos [5].

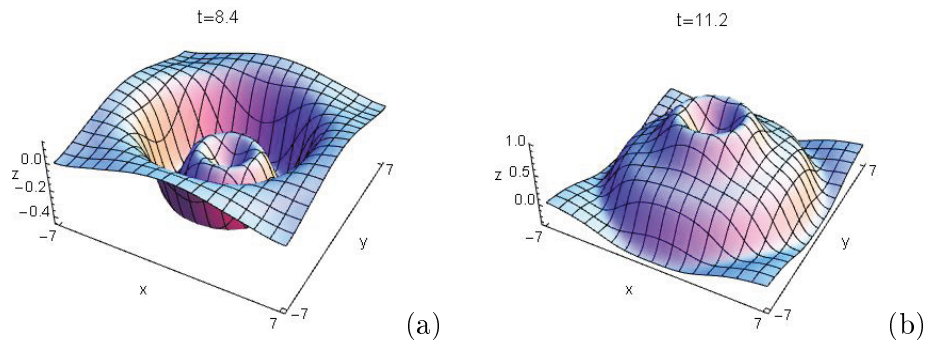
- δύο ευθύγραμμα κύματα που απομακρύνονται μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση $y = x$ (Σχ. 6.2.2 - 2), αντίστοιχα
- ένα κυκλικό κύμα που αλλάζει μορφή (Σχ. 6.2.2 - 3 και 6.2.2 - 4).



Σχήμα 6.2.2 - 2: Εξίσωση κύματος (6.2.2 - 4), όταν $x, y \in [-6, 6]$ την (a) χρονική στιγμή $t = 0$ και (b) $t = 7$



Σχήμα 6.2.2 - 3: Εξίσωση κύματος (6.2.2 - 5): Γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = \sin \frac{1}{2} u(x, y)$, όταν $x, y \in [-7, 7]$ την (a) χρονική στιγμή $t = 0$ και (b) $t = 5.6$



Σχήμα 6.2.2 - 4: Εξίσωση κύματος (6.2.2 – 5): Γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = \sin \frac{1}{2} u(x, y)$, όταν $x, y \in [-7, 7]$ την (a) χρονική στιγμή $t = 8.4$ και (b) $t = 11.2$

⁶Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: <http://users.teiath.gr/bratsos/>

Βιβλιογραφία

- [1] Ακριβής, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978-960-524-022-6.
- [2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978-960-351-874-7.
- [3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978-960-387-856-8.
- [5] Bratsos, A. G., The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines, J. Comput. Appl. Math., vol. 206 No. 1 (2006), pp. 251-277.
- [6] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978-0-534-38216-2.
- [7] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978-0-07-012447-9.
- [8] Don, E., Schaum's Outlines - Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978-960-461-000-6.
- [9] Kendall A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0-471-50023-2.

- [10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978-0-201-73499-7.
- [11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978-0-19-850279-1.
- [12] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978-0-387-95452-3.
- [13] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-00794-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>