Μάθημα 10

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΜΕΡΟΣ II

Στο μάθημα αυτό δίνεται μια προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής 1ης τάξης

$$y' = f(t, y)\,; \quad t \in [a, b\,] \quad \text{με} \quad y_0 = y\,(a)$$

διαφορετικής εκείνης που δόθηκε στο Μάθημα 9.

Συγκεκριμένα σύμφωνα με το προηγούμενο μάθημα, αν υποτεθεί ότι το διάστημα $[a, b\,]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα πλάτους ℓ, τότε η μέθοδος:

i) του **Euler**

$$y_{i+1} = y_i + \ell f\,(t_i, y_i)$$

ii) και του **Taylor** τάξης n

$$y_{i+1} = y_i + \ell f_i + \frac{\ell^2}{2\,!}\,f_i' + \ldots + \frac{\ell^n}{n\,!}\,f_i^{(n-1)}; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, ,$$

υπολογίζει την προσεγγιστική λύση y_{i+1} από την y_i προσθέτοντας τον όρο

$\ell\, f\,(t_i, y_i)$ για την (i), αντίστοιχα τον

$$\ell \left(f_i + \frac{\ell}{2\,!}\, f_i' + \ldots + \frac{\ell^{n-1}}{n\,!}\, f_i^{(n-1)} \right)$$

για τη (ii) μέθοδο. Και οι δύο μέθοδοι ανήκουν στην κατηγορία των **μονοβηματικών** μεθόδων ή των μεθόδων του **απλού βήματος**, δηλαδή των μεθόδων οι οποίες για τον υπολογισμό της προσέγγισης y_{i+1} χρησιμοποιούν μόνο την αμέσως προηγούμενη τιμή y_i. Κύριο χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι:

- η δυσκολία του υπολογισμού των παραγώγων στη (ii), και
- η μικρή ακρίβεια των αποτελεσμάτων.[1]

10.1 Μέθοδοι των Runge-Kutta

10.1.1 Εισαγωγή

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής 1ης τάξης

$$y' = f(t, y)\,; \quad t \in [a, b\,] \quad \text{με} \quad y_0 = y\,(a) \tag{10.1.1 - 1}$$

Σύμφωνα με το Μάθημα 9 και την παραπάνω εισαγωγή όλες οι μέθοδοι που εξετάστηκαν τελικά γράφονται στη μορφή

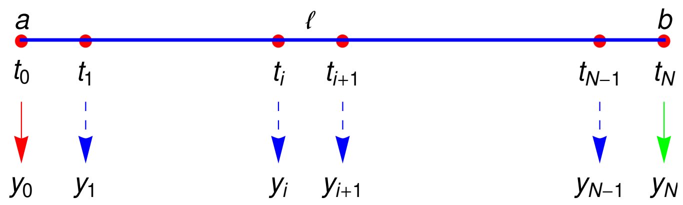
$$y_{i+1} = y_i + \ell F\left(t_i, y_i^{(n)}, \ell\right) \tag{10.1.1 - 2}$$

όπου F είναι μία γνωστή συνάρτηση και n η τάξη της παραγώγου, όταν $i = 0,\,1,\,\ldots,\,N-1$ (Σχ. 10.1.1 - 1).

Ο Runge και αργότερα ο Kutta απέδειξαν ότι είναι δυνατή η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(10.1.1-1)$ με αριθμητικές μεθόδους της μορφής $(10.1.1{-}2)$, χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων της συνάρτησης αλλά με την ίδια ακρίβεια της λύσης. Οι μέθοδοι αυτές, που είναι γνωστές σαν **μέθοδοι των Runge-Kutta**, γράφονται στη γενική τους μορφή ως

$$y_{i+1} = y_i + \ell\varphi\,(t_i, y_i, \ell) \quad \text{για κάθε} \quad i = 0,\,1,\,\ldots,\,N-1, \tag{10.1.1 - 3}$$

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 10.



Σχήμα 10.1.1 - 1: η **διαμέριση** δ του διαστήματος $[a, b]$ από τα σημεία $t_i = a + i\,\ell$, όταν $\ell = t_{i+1} - t_i$ και οι αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές y_i; $i = 0, 1, \ldots, N$

όταν για την n-τάξη της μεθόδου, η συνάρτηση φ δίνεται από τη σχέση

$$\varphi(t, y, \ell) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \ldots + c_n k_n \tag{10.1.1 - 4}$$

όπου

$$\begin{aligned} k_1 \quad &= \quad f(t, y) \quad \text{και} \\ \text{για}\quad &\text{κάθε} \quad j = 2, 3, \ldots, n \\ k_j \quad &= \quad f\left(t + \ell a_j,\; y + \ell \sum_{m=1}^{j-1} b_{jm}\, k_m\right), \\ a_j \quad &= \quad \sum_{m=1}^{j-1} b_{jm}. \end{aligned} \tag{10.1.1 - 5}$$

Είναι προφανές ότι όλες οι μέθοδοι $(10.1.1-3)$ εκφράζονται με αναλυτική (explicit) μορφή, όπου για να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (10.1.1−1) με εφαρμογή μιας μεθόδου n τάξης, απαιτείται ο υπολογισμός n το πλήθος συναρτήσεων.

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω δύο χρήσιμοι ορισμοί.

Ορισμός 10.1.1 - 1. *Έστω $y(t)$ η θεωρητική λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(10.1.1-1)$. Τότε η μέθοδος των Runge-Kutta, που ορίζεται από τη σχέση $(10.1.1-3)$, λέγεται ότι είναι* **τάξης n**, *όταν n είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει*

$$y(t+\ell) - y(t) - \ell\varphi(t, y(t), \ell) = \mathcal{O}\left(\ell^{n+1}\right). \qquad (10.1.1 - 6)$$

Υπενθυμίζεται ότι με το $\mathcal{O}\left(\ell^{n+1}\right)$ συμβολίζεται το άθροισμα από του όρου ℓ^{n+1} και μετά, δηλαδή $a_1\ell^{n+1} + a_2\ell^{n+2} + \ldots$.

Ορισμός 10.1.1 - 2. *Η μέθοδος $(10.1.1-3)$ λέγεται ότι είναι* **συμβατή** *(consistent) με το πρόβλημα αρχικής τιμής $(10.1.1-1)$, όταν*

$$\varphi(t, y, 0) = f(t, y). \qquad (10.1.1 - 7)$$

Παρατήρηση 10.1.1 - 1

Οι συντελεστές $c_i,\ k_i;\ i = 1,\ \ldots,\ n$ στην $(10.1.1-5)$ υπολογίζονται αναπτύσσοντας όλους τους όρους κατά Taylor ως προς t και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τις συνθήκες των Ορισμών 10.1.1 - 1 και 10.1.1 - 2. Ειδικότερα σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1.1 - 1 όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων $\ell^i;\ i = 1,\ \ldots,\ n$ πρέπει στην περίπτωση αυτή να είναι 0.

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω δύο περισσότερο χρησιμοποιούμενες στις εφαρμογές μέθοδοι των Runge-Kutta (RK).

10.1.2 Μέθοδος 3ης τάξης

Έστω ότι η τάξη της μεθόδου είναι $n = 3$. Τότε σύμφωνα με τη σχέση $(10.1.1-5)$ είναι

$$y_{i+1} = y_i + \ell\left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3\right)$$

όπου τα $c_i,\ k_i;\ i = 1,\ 2,\ 3$ υπολογίζονται από από την $(10.1.1-6)$ ως εξής:

$$k_1 = f\,(t, y)$$

και για

$j = 2$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t + \ell a_2,\, y + \ell \sum_{m=1}^{1} b_{21}\, k_m\right) = f\,(t + \ell a_2, y + \ell b_{21} k_1)\,, \\ a_2 &= \sum_{m=1}^{1} b_{2m} = b_{21}, \quad \text{οπότε} \\ k_2 &= f\,(t + \ell a_2,\, y + \ell\, a_2\, k_1)\,. \end{aligned}$$

$j = 3$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t + \ell a_3,\, y + \ell \sum_{m=1}^{2} b_{21}\, k_m\right) \\ &= f\,[t + \ell a_3, y + \ell\,(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)]\,, \\ a_3 &= \sum_{m=1}^{1} b_{2m} = b_{31} + b_{32}, \quad \text{οπότε} \quad b_{31} = a_3 - b_{32}. \end{aligned}$$

Άρα

$$k_3 = f\,[t + \ell a_3,\, y + \ell\,(a_3 - b_{32})\, k_1 + \ell b_{32} k_2]\,.$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι παράμετροι c_1, c_2, c_3, a_2, a_3 και b_{23} πρέπει να εκλεγούν, έτσι ώστε σύμφωνα με την Παρατήρηση 10.1.1 - 1 η μέθοδος να είναι τάξης $n = 3$. Παραλείποντας στο σημείο αυτό τους ενδιάμεσους υπολογισμούς, παραπέμποντας τον αναγνώστη προς τούτο στη βιβλιογραφία, τελικά προκύπτει το παρακάτω σύστημα με 4 εξισώσεις και 6 αγνώστους

$$\begin{aligned} &c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad c_2 a_2 + c_3 a_3 = \frac{1}{2} \\ &c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 = \frac{1}{3} \qquad c_3 a_2 b_{32} = \frac{1}{6}\,. \end{aligned} \tag{10.1.2 - 1}$$

Άρα θα υπάρχει ένα **άπειρο** το πλήθος μεθόδους των Runge-Kutta 3ης τάξης.[2]

Από το σύνολο των μεθόδων αυτών εξετάζεται μόνο η μέθοδος

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) \qquad (10.1.2 - 2) \\ k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \ell, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2\right) \end{aligned}$$

που είναι γνωστή και σαν **κανόνας 3ης τάξης του Kutta** (RK3).

Παράδειγμα 10.1.2 - 1

Να λυθεί με τη μέθοδο RK3 το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t^2 + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,\, 0.5], \quad \ell = 0.1,$$

ενώ η θεωρητική λύση του είναι

$$y(t) = 2e^{-t} + t^2 - 2t + 3.$$

Λύση. Είναι

$$f(t, y) = -y + t^2 + 1.$$

Επειδή είναι γνωστή η θεωρητική λύση $y(t)$, η αρχική τιμή y_0, που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 0$, υπολογίζεται από την $y(t)$ ως εξής:

$$y_0 = y(0) = 2\,e^0 + 0 + 3 = 5.$$

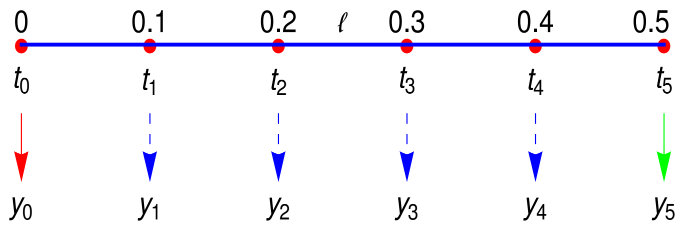
Τότε για $i = 0, 1, 2, 3,\ 4$ (Σχ. 10.1.2 - 1) έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 0, \quad y_0 = 5)$

$$k_1 = f\left(t_0, y_0\right) = -y_0 + t_0^2 + 1 = -5 + 0 + 1 = -4,$$

---

[2] Η παραπάνω εισαγωγή να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση



Σχήμα 10.1.2 - 1: η διαμέριση του Παραδείγματος 10.1.2 - 1, όταν $\ell = 0.1$ και οι αντίστοιχες τιμές y_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, 5$ με $t_i = i\,\ell$. Η αρχική τιμή είναι $y_0 = y\,(t_0) = y(0) = [2e^{-t} + t^2 - 2t + 3] = 5$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2}, y_0 + \frac{\ell}{2}k_1\right) \\
&= -\left(y_0 + \frac{\ell}{2} * k_1\right) + \left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right)^2 + 1 \\
&= -\left[5 + \frac{0.1}{2} * (-4)\right] + \left(0 + \frac{0.1}{2}\right)^2 + 1 \\
&= -3.7975,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\,(t_0 + \ell, y_0 - \ell k_1 + 2\ell k_2) \\
&= -\,(y_0 - \ell * k_1 + 2 * \ell * k_2) + (t_0 + \ell)^2 + 1 \\
&= -\,[5 - 0.1 * (-4) - 2 * 0.1 * 3.7975] + (0 + 0.1)^2 + 1 \\
&= -3.6305,
\end{aligned}$$

οπότε

$$y_1 = y_0 + \frac{\ell}{6}\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$= \quad 5+\frac{0.1}{6}\left[-4+4*(-3.7975)-3.6305\right]=4.61966.$$

2ο βήμα $(t_1 = 0.1, \quad y_1 = 4.61966)$

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_1, y_1\right) = -y_1 + t_1^2 + 1 \\ &= -4.61966 + 0.1^2 + 1 = -3.6097, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_1+\frac{\ell}{2}, y_1+\frac{\ell}{2}k_1\right) \\ &= -\left(y_1+\frac{\ell}{2}*k_1\right)+\left(t_1+\frac{\ell}{2}\right)^2+1 \\ &= -\left[y_1+\frac{0.1}{2}*(-3.6097)\right]+\left(0.1+\frac{0.1}{2}\right)^2+1 \\ &= -3.4167, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_1+\ell, y_1-\ell k_1+2\ell k_2\right) \\ &= -\left(y_1-\ell*k_1+2*\ell*k_2\right)+\left(t_1+\ell\right)^2+1 \\ &= -\left[4.61966-0.1*(-3.6097)+2*0.1*(-3.4167)\right] \\ &\quad +(0.1+0.1)^2+1=-3.2573, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_2 = y_1+\frac{\ell}{6}\left(k_1+4k_2+k_3\right)=4.27743.$$

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 10.1.2 - 1, ενώ στο Σχ. 10.1.2 - 2 τα αντίστοιχα σφάλματα $|e_i|$.

Άσκηση

Να λυθεί με τη μέθοδο RK3 το πρόβλημα αρχικής τιμής

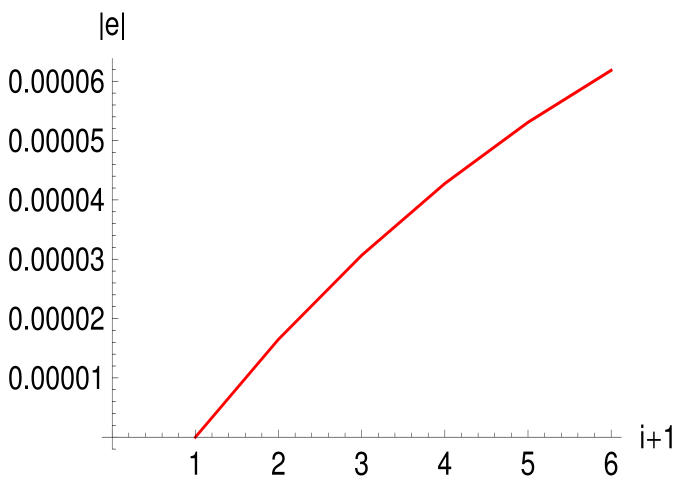
$$y' = -y + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,\, 0.5], \quad \ell = 0.1$$

και θεωρητική λύση

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

Πίνακας 10.1.2 - 1: Παράδειγμα 10.1.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου RK3

t_i	y_i	$y(t_i)$	$\|e_i\|$
0.0	5.00000	5.00000	0.0
0.1	4.619658	4.619675	0.165E-04
0.2	4.277431	4.277462	0.307E-04
0.3	3.971594	3.971636	0.428E-04
0.4	3.700587	3.700640	0.530E-04
0.5	*3.462999*	3.463061	0.618E-04



Σχήμα 10.1.2 - 2: Παράδειγμα 10.1.2 - 1. Η καμπύλη δείχνει τα σφάλματα $|e_i|$

10.1.3 Μέθοδος 4ης τάξης

Αν $n = 4$, τότε με σχέσεις ανάλογες αυτών της εισαγωγής της Παραγράφου 10.1.2 τελικά προκύπτει ένα σύστημα οκτώ εξισώσεων με δέκα αγνώστους, οπότε θα υπάρχει και στην περίπτωση αυτή ένα άπειρο πλήθος μεθόδων Runge-Kutta 4ης τάξης, των οποίων ο τύπος θα εκφράζεται με αναλυτική μορφή. Από αυτές εξετάζεται μόνο η παρακάτω περισσότερο χρησιμοποιούμενη μέθοδος, που είναι γνωστή και σαν **RK4**:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{\ell}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad (10.1.3 - 1) \\ k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f\left(t_i + \ell, y_i + \ell k_3\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10.1.3 - 1

Να λυθεί με τη μέθοδο RK4 το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0,\, 0.5], \quad \ell = 0.1,$$

ενώ η θεωρητική λύση είναι

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

Λύση. Είναι

$$f(t, y) = -y + t + 1.$$

Όμοια η αρχική τιμή y_0 όμοια υπολογίζεται από τη θεωρητική λύση ως εξής:

$$y_0 = y(0) = 0 + e^0 = 1.$$

Τότε για $i = 0, 1, 2, 3,\, 4$ έχουμε:

1ο βήμα $(t_0 = 0, \quad y_0 = 1)$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = -y_0 + t_0 + 1 = -1 + 0 + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2}, y_0 + \frac{\ell}{2} k_1\right) \\ &= -\left(y_0 + \frac{\ell}{2} * k_1\right) + \left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right) + 1 \\ &= -\left(1 + \frac{0.1}{2} * 0\right) + \left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 = 0.05, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_0 + \frac{\ell}{2}, y_0 + \frac{\ell}{2} k_2\right) \\ &= -\left(y_0 + \frac{\ell}{2} * k_2\right) + \left(t_0 + \frac{\ell}{2}\right) + 1 \\ &= -\left(1 + \frac{0.1}{2} * 0.05\right) + \left(0 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 = 0.0475, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(t_0 + \ell, y_0 + \ell k_3) \\ &= -(y_0 + \ell * k_3) + (t_0 + 0.1) + 1 \\ &= -(y_0 + 0.1 * 0.0475) + (0 + 0.1) + 1 = 0.09525, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_1 = y_0 + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.00484.$$

2ο βήμα $(t_1 = 0.1, \quad y_1 = 1.00484)$

$$k_1 = f(t_1, y_1) = -y_1 + t_1 + 1 = -1.00484 + 0.1 + 1 = 0.095162,$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_1 + \frac{\ell}{2}, y_1 + \frac{\ell}{2} k_1\right) \\ &= -\left(y_1 + \frac{0.1}{2} * 0.095162\right) + \left(t_1 + \frac{0.1}{2}\right) + 1 = 0.1404, \end{aligned}$$

Πίνακας 10.1.3 - 1: Παράδειγμα 10.1.3 - 1: αποτελέσματα μεθόδου RK4

t_i	y_i	$y\left(t_i\right)$	$\|e_i\|$
0.0	1.00000	1.00000	0.0
0.1	1.004838	1.004837	8.196E-08
0.2	1.018731	1.018731	1.483E-07
0.3	1.040818	1.040818	2.013E-07
0.4	1.07032	1.07032	2.428E-07
0.5	*1.106531*	1.106531	2.747E-07

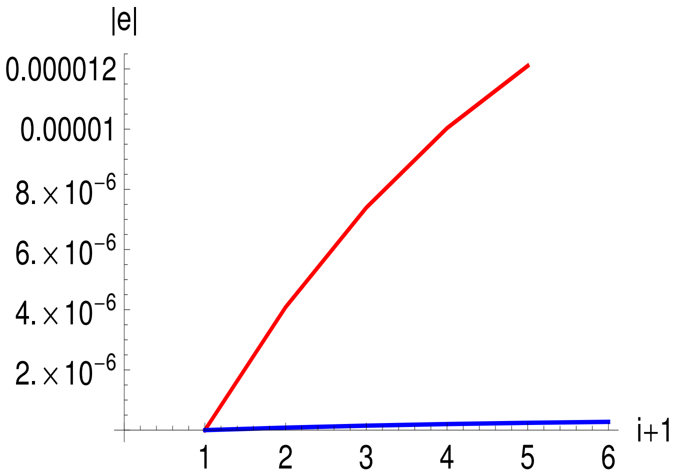
$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(t_1+\frac{\ell}{2}, y_1+\frac{\ell}{2}k_2\right) \\ &= -\left(y_1+\frac{0.1}{2}*0.1404\right)+\left(t_1+\frac{0.1}{2}\right)+1=0.13814, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f\left(t_1+\ell, y_1+\ell k_3\right) \\ &= -\left(y_1+0.1*0.13814\right)+\left(t_0+0.1\right)+1=0.18135, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_2 = y_1+\frac{\ell}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)=1.01873.$$

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο, τελικά έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 10.1.3 - 1. Από την εξέταση των σφαλμάτων του Πίνακα 10.1.3 - 1 προκύπτει ότι, αν και οι τιμές των είναι ελάχιστες, υπάρχει μια αύξησή των με την πάροδο του χρόνου. Τελικά στο Σχ. 10.1.3 - 1 γίνεται η σύγκριση των σφαλμάτων της λύσης του παραπάνω παραδείγματος με τις μεθόδους RK3 (άσκηση Παραγράφου 10.1.2) και της RK4, από το οποίο άμεσα προκύπτει η μεγαλύτερη ακρίβεια της RK4.



Σχήμα 10.1.3 - 1: Παράδειγμα 10.1.3 - 1. Η κόκκινη καμπύλη δείχνει τα σφάλματα $|e_i|$ με τη μέθοδο RK3 και η μπλε με την RK4

Άσκηση

Να λυθεί με τη μέθοδο του Taylor τάξης 2, αντίστοιχα 3, την RK3 και την RK4 το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [0.5,\, 0.7], \quad \ell = 0.05$$

όπου η θεωρητική λύση είναι

$$y(t) = t + e^{-t}$$

και να γίνει συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων.

[3]

[3] Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.
E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Henrici, P. (1966), Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, ISBN 978–0–471–37238–7.

[9] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[12] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[13] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/