ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
UNIVERSITY OF WEST ATTICA

Τμήμα Γραφιστικής και Οπτικής Επικοινωνίας

Πληροφορική

#03 – Αριθμητικά Συστήματα

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

1234.765

χιλιάδες εκατοντάδες δεκάδες μονάδες δέκατα εκατοστά χιλιοστά

1x1000 + 2x100 + 3x10 + 4x1 + 7x(1/10) + 6x(1/100) + 5x(1/1000) =

$1 \times 10^{3} + 2 \times 10^{2} + 3 \times 10^{1} + 4 \times 10^{0} + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$

Συμπεράσματα:

- Βάση: 10
- Ψηφία: {0-9} , 9=10-1 → βάση – 1, {0 – (βάση-1)}
- Ξεκινώντας με την υποδιαστολή:
  - έχουμε το **ακέραιο μέρος**, όπου οι δυνάμεις **αρχίζουν από το 0** και σε κάθε θέση **αυξάνονται**
  - έχουμε το **δεκαδικό μέρος**, όπου οι δυνάμεις **αρχίζουν από το -1** σε κάθε θέση **μειώνονται**

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Χαρακτηριστικά:

- Βάση: 2
- Ψηφία: {0 – (βάση-1)} → {0-1}
- Ξεκινώντας με την υποδιαστολή:
  - έχουμε το ακέραιο μέρος, όπου οι δυνάμεις αρχίζουν από το 0 και σε κάθε θέση αυξάνονται
  - έχουμε το δεκαδικό μέρος, όπου οι δυνάμεις αρχίζουν από το -1 σε κάθε θέση μειώνονται

$(1101.1)_2 =$

$= 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} =$

$= 8 + 4 + 0 + 1 + 0.5 = (13.5)_{10}$

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης – Παράδειγμα

1101.011

οκτάδες τετράδες δυάδες μονάδες μισά τέταρτα όγδοα

$1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} + 1x2^{-3} = (13.375)_{10}$

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης - Αριθμοί

000	→	0
001	→	1
010	→	2
011	→	3
100	→	4
101	→	5
110	→	6
111	→	7

Το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης

Χαρακτηριστικά:

- Βάση: 16
- Ψηφία: {0 – (βάση-1)} → {0-15}
- Ψηφία: 0,1,2,3,…,8,9,A,B,C,D,E,F
- Ξεκινώντας με την υποδιαστολή:
  - έχουμε το ακέραιο μέρος, όπου οι δυνάμεις αρχίζουν από το 0 και σε κάθε θέση αυξάνονται
  - έχουμε το δεκαδικό μέρος, όπου οι δυνάμεις αρχίζουν από το -1 σε κάθε θέση μειώνονται

$$(E7A9.8)_{16} = 14x16^{3} + 7x16^{2} + 10x16^{1} + 9x16^{0} + 8x16^{-1} =$$

$$= 57344 + 1792 + 160 + 9 + 0.5 = (59305.5)_{10}$$

Ανακεφαλαίωση – Παραδείγματα

- $(1673,42)_{10}$ =

  $1x10^3 + 6x10^2 + 7x10^1 + 3x10^0 + 4x10^{-1} + 2x10^{-2}$

- $(100110)_2$ =

  $1x2^5 + 0x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = (38)_{10}$

- $(A34F,4)_{16}$ =

  $Ax16^3+3x16^2+4x16^1+Fx16^0+4x16^{-1} = (41807,25)_{10}$

- $(372)_8$ =

  $3x8^2 + 7x8^1 + 2x8^0 = (250)_{10}$

Αριθμητικά Συστήματα

Ένας δεκαδικός αριθμός x αποτελείται από μία ακολουθία δεκαδικών ψηφίων και ίσως από μία υποδιαστολή. Οποιοσδήποτε αριθμός (ποσότητα) εκφράζεται ως:

$$(x)_b = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i b^i$$

b είναι η βάση του συστήματος (b≥2)
a_i τα ψηφία του αριθμού αυτού με τιμές 0 έως b-1

Ο αριθμός:

$$\boldsymbol{\alpha_{n-1}b^{n-1} + \alpha_{n-2}b^{n-2} + \dots + \alpha_1 b^1 + \alpha_0 b^0 + \alpha_{-1}b^{-1} + \dots + \alpha_{-m}b^{-m}}$$

συμβολίζεται ως: $\alpha_{n-1}\ \alpha_{n-2} \dots \alpha_1\ \alpha_0\ \alpha_{-1} \dots \alpha_{-m}$

Αριθμητικά Συστήματα - Συμβολισμοί

- Όταν χρησιμοποιούμε διαφορετικά συστήματα αρίθμησης, συνήθως χρησιμοποιούμε συμβολισμούς, ώστε να γνωρίζουμε σε ποιο σύστημα είναι γραμμένος ο αριθμός.
- Ένας τρόπος συμβολισμού είναι με δείκτες κάτω δεξιά από τον αριθμό:
    - $(324)_{10}$ – δεκαδικό σύστημα
    - $(101001)_2$ – δυαδικό σύστημα
    - $(3F2D)_{16}$ – δεκαεξαδικό σύστημα
    - $(651)_8$ – οκταδικό σύστημα
    - $(521)_9$ – ενναδικό σύστημα
- Ένας εναλλακτικός τρόπος συμβολισμού των χρησιμοποιούμενων συστημάτων αρίθμησης στην πληροφορική (δανεισμένος από τη γλώσσα προγραμματισμού C) είναι:
    - 324 – δεκαδικό σύστημα
    - 0b101001 – δυαδικό σύστημα
    - 0o651 – οκταδικό σύστημα
    - 0x3F2D – δεκαεξαδικό σύστημα

    BONUS: #3F2D – δεκαεξαδικό σύστημα

Μετατροπές
Από το δεκαδικό σύστημα σε οποιοδήποτε άλλο (1)

- Έστω αριθμός με **ακέραιο και δεκαδικό** μέρος **(yyyy,xxx).**
- Χωρίζω το ακέραιο από το κλασματικό μέρος yyyy και 0,xxx
- Το **ακέραιο μέρος** του αριθμού **<u>διαιρείται</u>** (ακέραια διαίρεση) συνεχώς με τη βάση του συστήματος στο οποίο θέλουμε να το μετατρέψουμε.
- Η διαίρεση σταματάει όταν το πηλίκο γίνει 0.
- Ο ζητούμενος αριθμός προκύπτει παίρνοντας ανάποδα όλα τα υπόλοιπα των διαιρέσεων.

Μετατροπές
Από το δεκαδικό σύστημα σε οποιοδήποτε άλλο (2)

- Το **δεκαδικό μέρος <u>πολλαπλασιάζεται</u>** συνεχώς με τη βάση του συστήματος στο οποίο θέλουμε να το μετατρέψουμε.
- Οποιοδήποτε ακέραιο μέρος παραχθεί κατά τον πολλαπλασιασμό, διαχωρίζεται πάλι από το κλασματικό μέρος (με βάση την παραπάνω λογική) και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.
- Ο πολλαπλασιασμός σταματάει όταν φτάσουμε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που θέλουμε ή όταν βρούμε κλασματικό μέρος 0.
- Ο κλασματικός αριθμός στο νέο σύστημα σχηματίζεται παίρνοντας όλα τα ακέραια μέρη όλων των πολλαπλασιασμών που κάναμε με φορά από τον πρώτο προς τον τελευταίο.

Μετατροπές (ακέραιο μέρος)

Από δεκαδικό σε δυαδικό του 765 **(Διαδοχικές διαιρέσεις με το 2):**

765	1
382	0
191	1
95	1
47	1
23	1
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 = 765

Μετατροπές (δεκαδικό μέρος) (1)

Από δεκαδικό σε δυαδικό του 0.25

(Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με το 2):

0.25	2	0.5	0
0.5	2	1.0	1

$$= 0.01$$

Μετατροπές (δεκαδικό μέρος) (2)

Από δεκαδικό σε δυαδικό του 0.41

(Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με το 2):

0.41	2	0.82	0
0.82	2	1.64	1
0.64	2	1.28	1
0.28	2	0.56	0
0.56	2	1.12	1

$$= 0.01101$$

Μετατροπές (δεκαδικό μέρος) (3)

Από δεκαδικό σε δεκαεξαδικό του 0.23

(Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με το 16):

0.23	16	3.68	3
0.68	16	10.88	A
0.88	16	14.08	E
0.08	16	1.28	1
0.28	16	4.48	4

= 0. 3 A E 1 4

Μετατροπές – Παράγωγα συστήματα (1)

Συστήματα που η βάση του ενός είναι η ύψωση σε δύναμη της βάσης ενός άλλου ονομάζονται **παράγωγα συστήματα αρίθμησης**.

Παράδειγμα 1: το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης είναι παράγωγο του δυαδικού γιατί $2^4=16$.

Παράδειγμα 2: το οκταδικό σύστημα αρίθμησης είναι παράγωγο του δυαδικού γιατί $2^3=8$

Παράδειγμα 3: το εννεαδικό σύστημα αρίθμησης είναι παράγωγο του τριαδικού γιατί $3^2=9$.

Κάθε ψηφίο του **δεκαεξαδικού αριθμού** μετατρέπεται αυτόνομα στο **δυαδικό σύστημα** (χρησιμοποιώντας 4 δυαδικά ψηφία) και έτσι προκύπτει ο δυαδικός αριθμός και αντίστροφα.

Αντίστοιχα, κάθε ψηφίο του **οκταδικού αριθμού** μετατρέπεται αυτόνομα στο **δυαδικό σύστημα** (χρησιμοποιώντας 3 δυαδικά) και έτσι προκύπτει ο δυαδικός αριθμός και αντίστροφα.

Μετατροπές – Δυαδικό ⇔ Οκταδικό

Δυαδικό	**Οκταδικό**	**Δυαδικό**	**Οκταδικό**
0 0 0 ⟷	0	1 0 0 ⟷	4
0 0 1 ⟷	1	1 0 1 ⟷	5
0 1 0 ⟷	2	1 1 0 ⟷	6
0 1 1 ⟷	3	1 1 1 ⟷	7

$$(633)_8 = (\underbrace{1\,1\,0}_{\boxed{\mathbf{6}}}\;\underbrace{0\,1\,1}_{\boxed{\mathbf{3}}}\;\underbrace{0\,1\,1}_{\boxed{\mathbf{3}}})_2$$

Μετατροπές – Δυαδικό ⬄ Δεκαεξαδικό (1)

Δυαδικό	Δεκαεξαδικό	Δυαδικό	Δεκαεξαδικό
0 0 0 0 ⟷	0	1 0 0 0 ⟷	8
0 0 0 1 ⟷	1	1 0 0 1 ⟷	9
0 0 1 0 ⟷	2	1 0 1 0 ⟷	A
0 0 1 1 ⟷	3	1 0 1 1 ⟷	B
0 1 0 0 ⟷	4	1 1 0 0 ⟷	C
0 1 0 1 ⟷	5	1 1 0 1 ⟷	D
0 1 1 0 ⟷	6	1 1 1 0 ⟷	E
0 1 1 1 ⟷	7	1 1 1 1 ⟷	F

$$(1AF)_{16} = (\underbrace{0\ 0\ 0\ 1}_{\boxed{1}}\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 0}_{\boxed{10=A}}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1}_{\boxed{15=F}})_2$$

Μετατροπές – Δυαδικό ⬄ Δεκαεξαδικό (2)

Από δυαδικό σε δεκαεξαδικό

$$(1\,0\,1\,1\,1\,1\,1.0\,1\,1\,0\,1)_2$$

Χωρίζουμε σε τετράδες από υποδιαστολή προς τα αριστερά (ακέραιο μέρος) και από υποδιαστολή προς τα δεξιά (δεκαδικό μέρος)

(κατά περίπτωση προσθέτουμε μηδενικά)

$$(1\,0\,1\,1\,1\,1\,1.0\,1\,1\,0\,1)_2 = (5F.68)_{16}$$

5	15=F	6	8

Ανακεφαλαίωση

- Αριθμητικά συστήματα: Βάσεις, ψηφία
- Το δεκαδικό, το δυαδικό και το δεκαεξαδικό σύστημα
- Μετατροπή από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό
- Μετατροπή από το δεκαδικό στο δυαδικό (ακέραιο και δεκαδικό μέρος)
- Μετατροπή από το δεκαδικό στο δεκαεξαδικό (ακέραιο και δεκαδικό μέρος)
- Μετατροπές σε παράγωγα συστήματα

slido

Το 0o517 (οκταδικό σύστημα) είναι στο δεκαεξαδικό σύστημα:

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Πράξεις

Πρόσθεση

Η πρόσθεση ανεξάρτητα από το αριθμητικό σύστημα γίνεται θεωρώντας το κάθε ζεύγος (μονοψήφιων) αριθμών που προστίθεται ως δεκαδικό

αλλά

το αποτέλεσμα της πράξης γράφεται πάντα στο σύστημα στο οποίο γίνεται η πράξη (με τη λογική του αποτελέσματος και του κρατουμένου που ισχύει και στο δεκαδικό σύστημα).

Πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα (1)

Πρόσθεση δυαδικών ψηφίων:

Α	**+**	**Β**	**Κρατούμενο**	**Αποτέλεσμα**
0		0	0	0
0		1	0	1
1		0	0	1
1		1	1	0

Πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα (2)

Κρατούμενο Εισόδου	A	B	Κρατούμενο εξόδου	Αποτέλεσμα
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Παράδειγμα:

1ος Προσθετέος:	0	0	1	1	1	$(7)_{10}$
2ος Προσθετέος:	0	1	0	1	0	$(10)_{10}$
Άθροισμα:	1	0	0	0	1	$(17)_{10}$
Κρατούμενο:	0	1	1	1	0	

Αφαίρεση

- Στην αφαίρεση ξεκινάμε επίσης από δεξιά αφαιρώντας τα αντίστοιχα ψηφία των αριθμών.
- Σε κάθε βαθμίδα δημιουργείται ένα δανεικό (borrow) ψηφίο, το οποίο προστίθεται στο ψηφίο του αφαιρέτη της επόμενης βαθμίδας.

Αφαίρεση στο δυαδικό σύστημα

Δανεικό Εισόδου	A	B	Δανεικό εξόδου	Αποτέλεσμα
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Παράδειγμα:

Αφαιρετέος:		1	1	0	0	$(12)_{10}$
Αφαιρέτης:	-	1	0	1	0	$(10)_{10}$
Άθροισμα:		0	0	1	0	$(2)_{10}$
Δανεικό Εισόδου:		0	1	0	0	
Δανεικό Εξόδου:		0	0	1	0	

Πολλαπλασιασμός

- Ο πολλαπλασιασμός γίνεται με διαδοχικές προσθέσεις.
- Κάθε ψηφίο του πολλαπλασιαστή πολλαπλασιάζεται με όλα τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου και σχηματίζει ένα μερικό γινόμενο.
- Κάθε μερικό γινόμενο γράφεται κάτω από το προηγούμενο ολισθημένο κατά μία θέση προς τα αριστερά.
- Στη συνέχεια, προσθέτουμε ανά δύο τα μερικά γινόμενα.

Πολλαπλασιασμός στο δυαδικό σύστημα

1 1 1 0
x 1 1 **0**
0 0 0 0 ← μερικό γινόμενο 1

1 1 1 0
x 1 **1** 0
0 0 0 0
1 1 1 0 ← μερικό γινόμενο 2

1 1 1 0
x **1** 1 0
0 0 0 0
1 1 1 0
1 1 1 0 ← μερικό γινόμενο 3

1 1 1 0
x *1* 1 0
0 0 0 0
\+ **1 1 1 0**
1 1 1 0 0 ← μερικό άθροισμα
1 1 1 0

1 1 1 0
x *1* 1 0
1 1 1 0 0
\+ **1 1 1 0**
1 0 1 0 1 0 0

Διαίρεση (Παράδειγμα στο δυαδικό σύστημα)

- Η διαίρεση στο πραγματοποιείται με διαδοχικές αφαιρέσεις του διαιρέτη από το διαιρετέο.

$$\begin{array}{ccccc|ccc} \dot{\mathbf{1}} & \dot{\mathbf{1}} & \dot{\mathbf{0}} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{6-8} 1 & 0 & 1 & & & 1 & & \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 1 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} \dot{1} & \dot{1} & \dot{0} & \dot{\mathbf{1}} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{6-8} 1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} \dot{1} & \dot{1} & \dot{0} & \dot{1} & \dot{\mathbf{1}} & 1 & 0 & 1 \\ \cline{6-8} 1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & & \\ \cline{3-5} & & 0 & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Ανακεφαλαίωση - Πράξεις

- Γνωρίσαμε τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.
- Οι πράξεις γίνονται με παρόμοιο τρόπο σε όλα τα συστήματα αρίθμησης.

Απορίες?