ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
UNIVERSITY OF WEST ATTICA
Τμήμα Γραφιστικής και Οπτικής Επικοινωνίας

Πληροφορική

#04 – Εισαγωγή στη Λογική Σχεδίαση

Η Άλγεβρα Boole

Η Άλγεβρα Boole (αξιωματικός ορισμός) ορίστηκε από τον Huntington το 1904(!) ως εξής:

Αλγεβρική δομή, ορισμένη σε ένα σύνολο στοιχείων B , με δύο τελεστές, τους **+** και •, έχουσα τις εξής ιδιότητες (x, y, z στοιχεία του B):

1. (α) Η δομή είναι κλειστή ως προς τον τελεστή **+**

   (β) Η δομή είναι κλειστή ως προς τον τελεστή •
2. (α) Υπάρχει ένα B ουδέτερο στοιχείο ως προς τον **+**, το 0, ώστε x **+** 0 = 0 **+** x = x

   (β) Υπάρχει ένα B ουδέτερο στοιχείο ως προς τον •, το 1, ώστε x • 1 = 1 • x = x
3. (α) Ο τελεστής **+** είναι αντιμεταθετικός: x **+** y = y **+** x

   (β) Ο τελεστής • είναι αντιμεταθετικός: x • y = y • x
4. (α) Ο τελεστής • είναι επιμεριστικός ως προς τον **+**: x • (y **+** z) = (x • y) + (x • z)

   (β) Ο τελεστής **+** είναι επιμεριστικός ως προς τον •: x + (y • z) = (x **+** y) •(x **+** z)
5. Για κάθε x του B υπάρχει αντίστροφο στοιχείο, το x’, ώστε

   (α) x **+** x’= 1 και (β) x • x’= 0
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία του B, δηλαδή δύο στοιχεία, έστωσαν τα x και y, για τα οποία ισχύει: x ≠ y

Δίτιμη Άλγεβρα Boole (ή Δυαδική Λογική)

- Έστω ότι το σύνολο B έχει μόνο δύο τιμές, δηλαδή B = {0, 1}.
- Ορίζουμε τους τελεστές
  - • ως AND (Σύζευξη – ΚΑΙ)
  - **+** ως OR (Διάζευξη – Ή)
  - το συμπλήρωμα ως NOT (Άρνηση – ΌΧΙ) ως εξής:

AND

x	y	$x \bullet y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

x	x'
0	1
1	0

- Προκύπτει ότι η αλγεβρική δομή που κατασκευάσαμε είναι Άλγεβρα Boole.

Θεωρήματα και Ιδιότητες της Άλγεβρας Boole

Postulate 2	(a)	$x + 0 = x$	(b)	$x \cdot 1 = x$
Postulate 5	(a)	$x + x' = 1$	(b)	$x \cdot x' = 0$
Theorem 1	(a)	$x + x = x$	(b)	$x \cdot x = x$
Theorem 2	(a)	$x + 1 = 1$	(b)	$x \cdot 0 = 0$
Theorem 3, involution		$(x')' = x$		
Postulate 3, commutative	(a)	$x + y = y + x$	(b)	$xy = yx$
Theorem 4, associative	(a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	(b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulate 4, distributive	(a)	$x(y + z) = xy + xz$	(b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Theorem 5, DeMorgan	(a)	$(x + y)' = x'y'$	(b)	$(xy)' = x' + y'$
Theorem 6, absorption	(a)	$x + xy = x$	(b)	$x(x + y) = x$

Δυισμός

Λόγω της δυικής μορφής των αξιωμάτων του Huntington, στην Άλγεβρα Boole υπάρχει δυισμός, δηλαδή:

- *Για κάθε πρόταση που είναι αληθής, η δυική της πρόταση, δηλαδή η πρόταση που προκύπτει από την πρόταση αυτή με εναλλαγή των τελεστών* **+** *και* • *, καθώς και των ουδετέρων στοιχείων, είναι επίσης αληθής.*

Π.χ.: Αποδεικνύεται ότι x **+** x • y= x. Από τον δυισμό έχουμε άμεσα (*χωρίς απόδειξη*) ότι x • (x **+** y) = x.

Πίνακας Αλήθειας

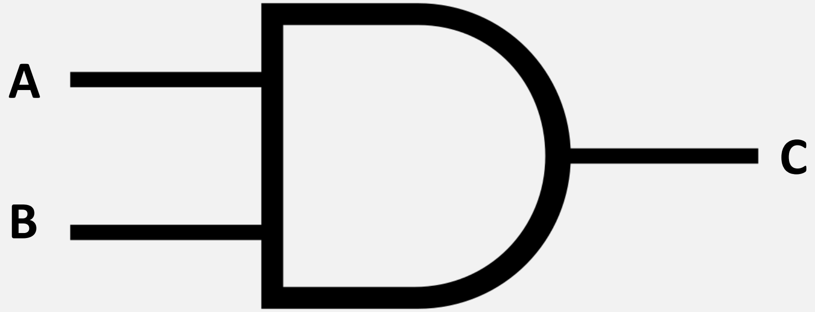
- Είναι ένας πίνακας που περιέχει στις στήλες του όλες τις «λογικές μεταβλητές» (εισόδους και εξόδους) και στις γραμμές του τις διαφορετικές τιμές της λογικής πύλης, λογικής συνάρτησης κ.τ.λ.
- Αν δύο λογικές συναρτήσεις έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας, τότε λέμε ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι «ισοδύναμες».
- Για να σχηματίσουμε τον πίνακα αλήθειας:
  - βρίσκουμε όλες τις λογικές μεταβλητές και τις βάζουμε σε στήλες
  - (προαιρετικά) βρίσκουμε κάποιες ενδιάμεσες τιμές που χρειάζονται
  - βρίσκουμε τις λογικές εξόδους
  - λαμβάνουμε όλους τους συνδυασμούς των λογικών μεταβλητών
  - υπολογίζουμε τις ζητούμενες τιμές (ενδιάμεσες και εξόδους) για κάθε συνδυασμό των εισόδων

Λογικές Πύλες

- Λογικές Πύλες (Logic Gates) ονομάζουμε τα (μαθηματικά) αφηρημένα σύμβολα που χρησιμοποιούμε, ώστε να συμβολίσουμε τις πράξεις της Άλγεβρας Boole που ορίσαμε.
- Συμβολίζουμε (συνήθως) την τιμή TRUE (Αληθής) με το “1” και την τιμή FALSE (Ψευδής) με το “0”.

Η Λογική Πύλη AND

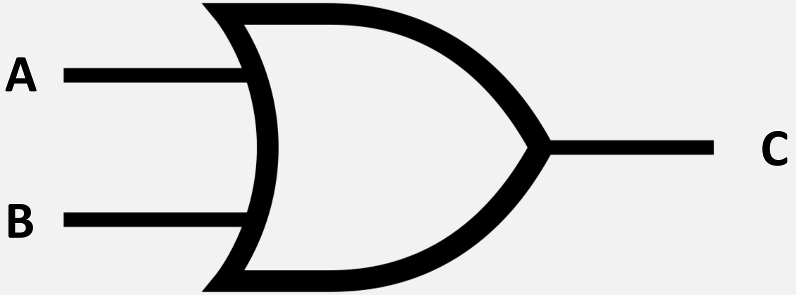
- Συμβολίζει τον τελεστή •
- Έχει αποτέλεσμα 1, μόνο όταν και οι δύο είσοδοι είναι 1



A	B	C
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Η Λογική Πύλη OR

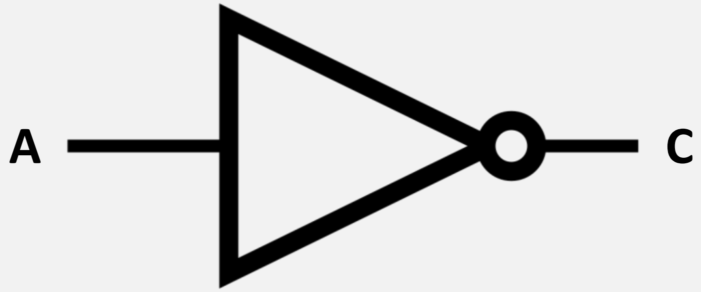
- Συμβολίζει τον τελεστή **+**
- Έχει αποτέλεσμα 1, όταν τουλάχιστον μία από τις εισόδους είναι 1 (ή και οι δύο)



A	B	C
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

Η Λογική Πύλη NOT

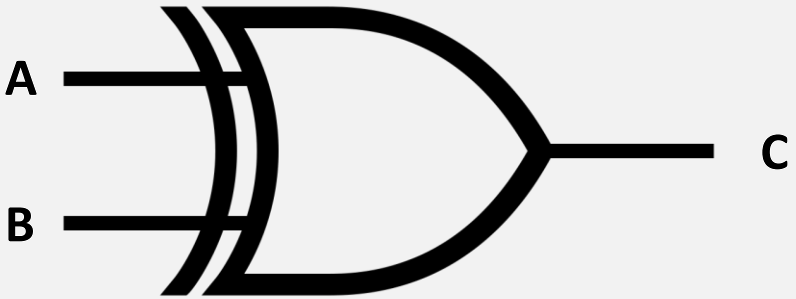
- Συμβολίζει το συμπλήρωμα
- Παράγει το δυϊκό (αντίθετο) αποτέλεσμα από αυτό που δέχεται ως είσοδο



A	C
0	**1**
1	**0**

Η Λογική Πύλη XOR

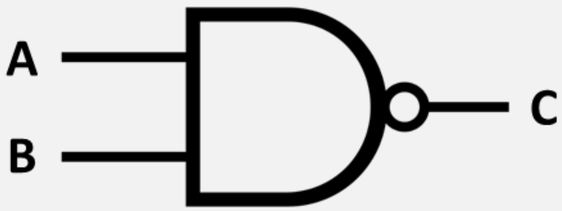
- Το όνομά της προέρχεται από το eXclusive-OR (Αποκλειστικό-Ή)
- Έχει αποτέλεσμα 1, αν μόνο μία από τις εισόδους της είναι 1.



A	B	C
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

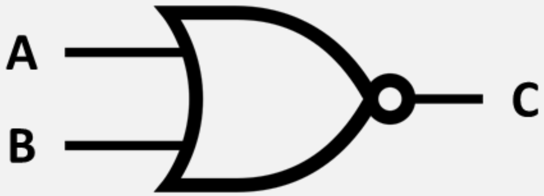
Άλλες Λογικές Πύλες

NAND



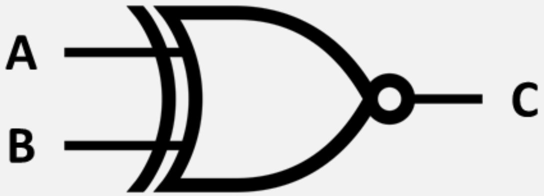
A	B	C
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

NOR



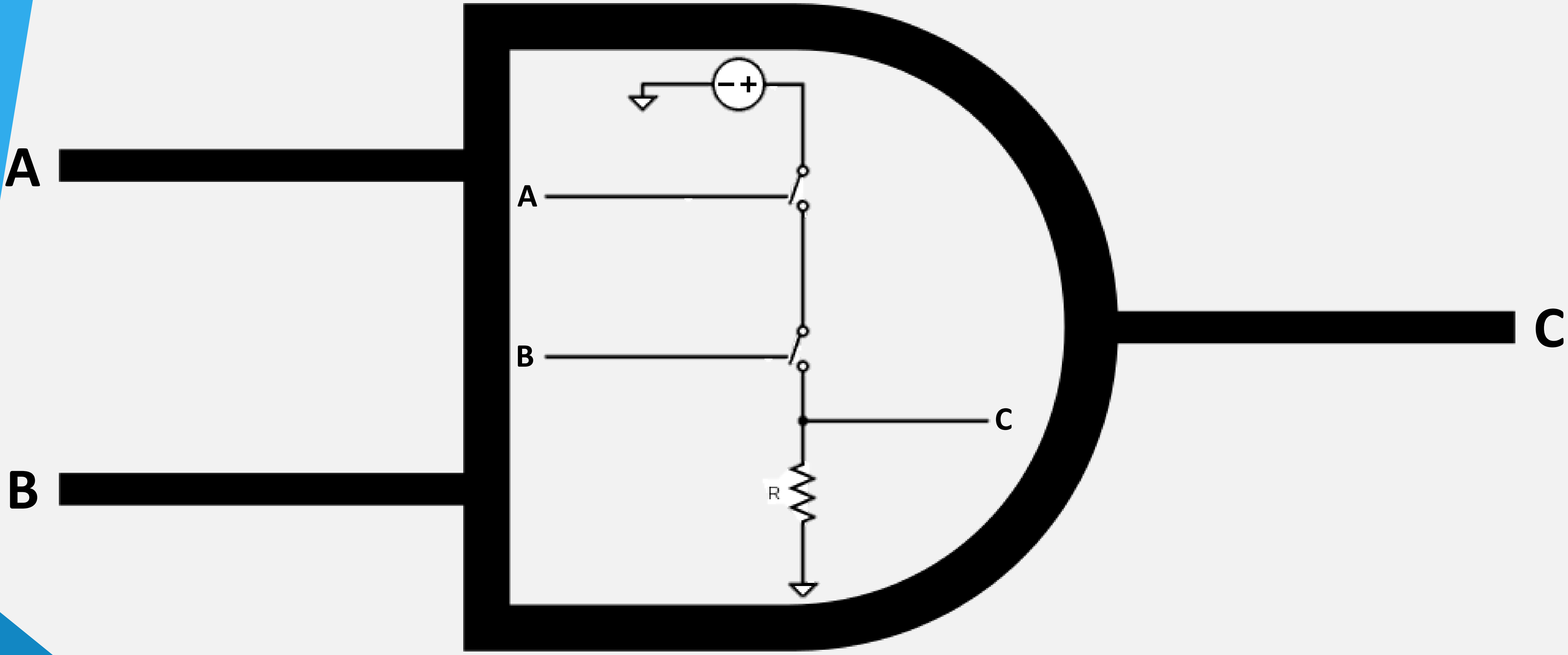
A	B	C
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

XNOR

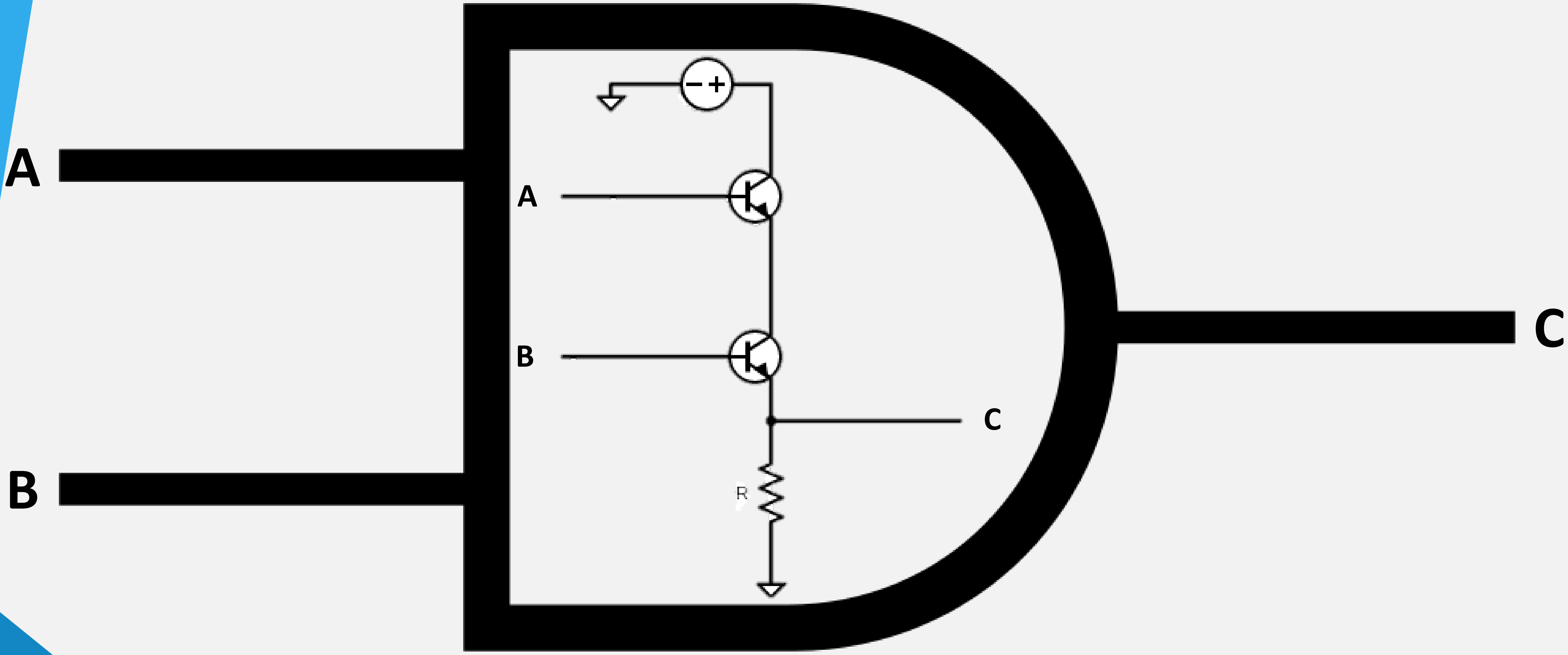


A	B	C
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

«Λογικό» Ισοδύναμο Ηλεκτρικό Κύκλωμα μίας AND



«Λογικό» Ισοδύναμο Κύκλωμα μίας AND (transistors)



Σύνοψη – Λογικές Πύλες

- AND: $F = A \cdot B$

Η έξοδος F είναι 1 όταν **όλες** οι είσοδοι (A, B) είναι 1

- OR: $F = A + B$

Η έξοδος F είναι 1 όταν **τουλάχιστον** μία είσοδος είναι 1

- NOT: $F = A'$

Η έξοδος είναι το αντίθετο της εισόδου

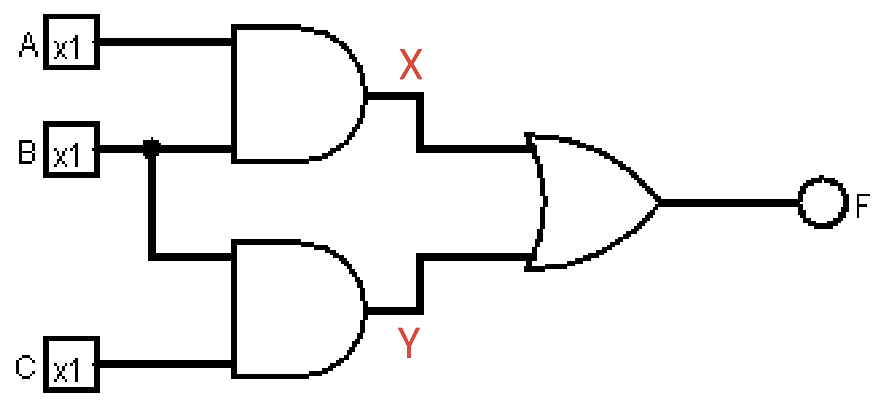
- XOR: $F = A' \cdot B + A \cdot B'$

Η έξοδος F είναι 1 όταν **μία και μόνο μία** είσοδος είναι 1

- NAND: $F = (A \cdot B)'$
- NOR: $F = (A + B)'$
- XNOR: $F = A \cdot B + A' \cdot B'$

Λογικές Συναρτήσεις

Συνδυάζοντας λογικές πύλες



- Η έξοδος ενός συνδυαστικού κυκλώματος εξαρτάται μόνο από τις εκάστοτε εισόδους.
- Η F είναι μία λογική συνάρτηση που έχει ως εισόδους τις μεταβλητές A, B, C.
- Ο πίνακας αλήθειας θα είναι:

A	B	C	X=A•B	Y=B•C	F=X+Y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Ποια ρεαλιστική εφαρμογή θα μπορούσε να περιγράφει αυτή η λογική συνάρτηση;

Λογικές Συναρτήσεις – 1η Άσκηση (1)

Έστω μία λογική συνάρτηση που περιγράφεται από τον τύπο:

$$F = A \cdot B' + A' \cdot B \cdot C$$

1) Γράψτε τη λογική συνάρτηση, χρησιμοποιώντας μόνο ονόματα πυλών

F = (A AND (NOT B)) OR ((NOT A) AND B AND C)

2) Σχεδιάστε το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα:

Πόσες πύλες θα έχει;

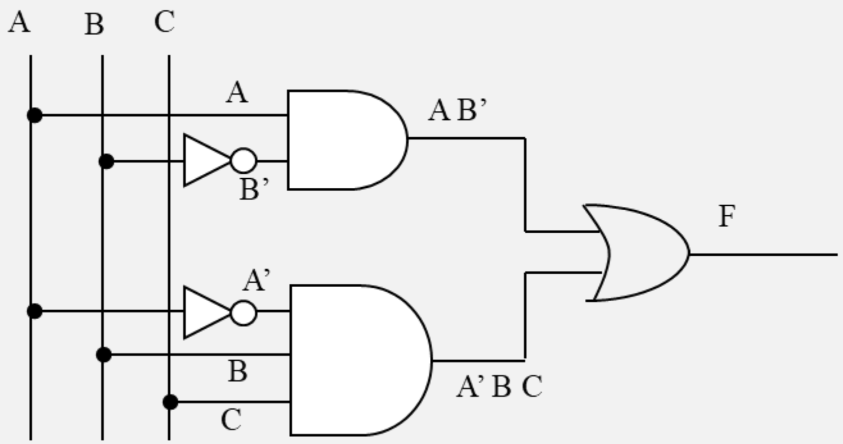
Πόσων εισόδων η κάθε μία;

3) Σχεδιάστε τον πίνακα αληθείας της F.

Πόσες γραμμές και πόσες στήλες θα έχει;

Λογικές Συναρτήσεις – 1η Άσκηση (2)

Λογικό Κύκλωμα



Πίνακας Αλήθειας

A	B	C	A′	B′	K = AB′	L = A′BC	F = K+L
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0

Λογικές Συναρτήσεις – $2^η$ Άσκηση

Έστω μία λογική συνάρτηση που περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα αληθείας. Ποια λογική συνάρτηση περιγράφει;

Πίνακας Αλήθειας

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Λογική Συνάρτηση

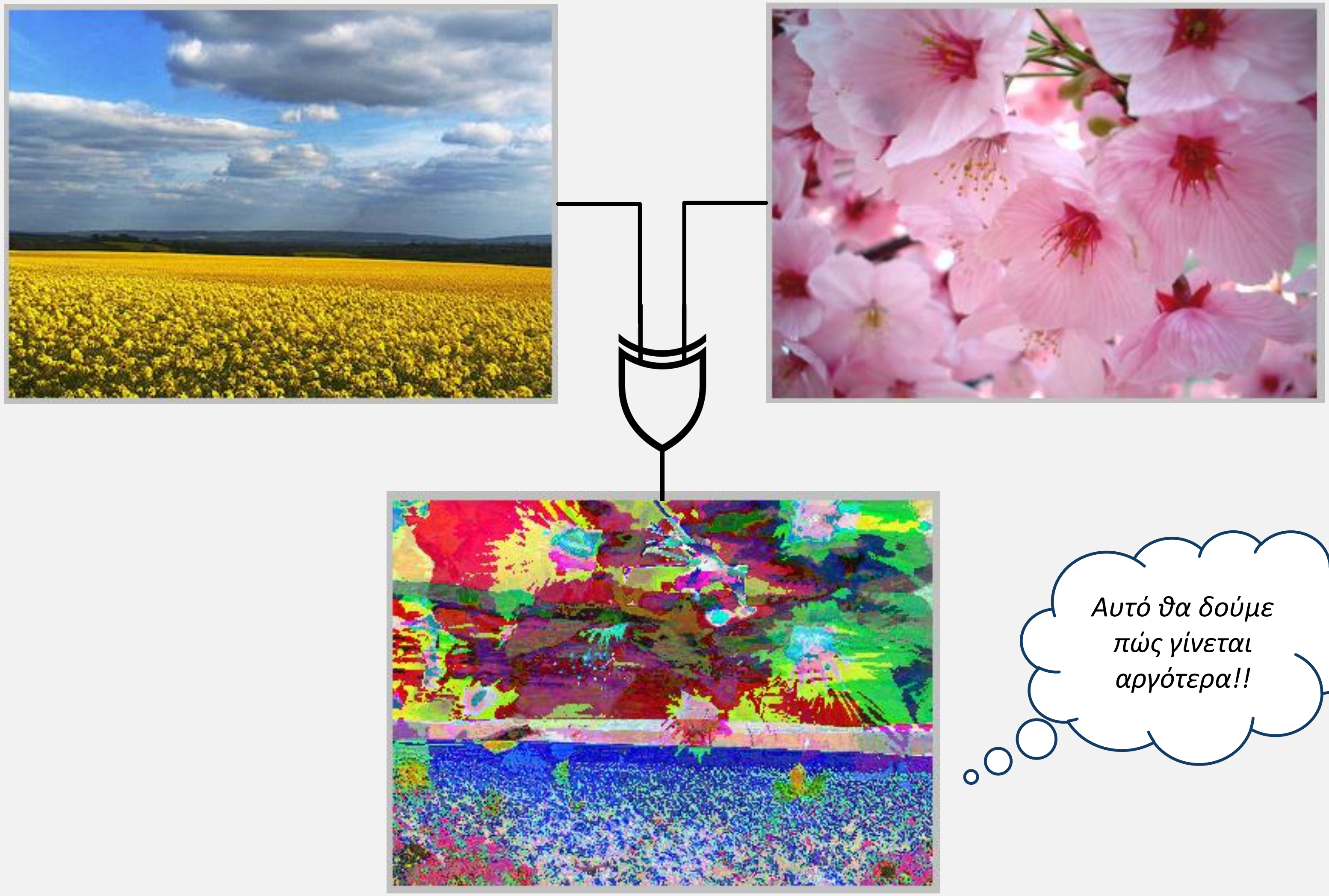
Για κάθε μία από τις περιπτώσεις στις οποίες η F έχει τιμή 1, λαμβάνουμε τον αντίστοιχο όρο (συνδυασμό των A, B, C):

$$F = A' \cdot B' \cdot C' + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

Προσοχή: Εφόσον πρόκειται για πύλες AND, των οποίων το αποτέλεσμα θα οδηγηθεί σε μία πύλη OR, όταν η τιμή της μεταβλητής είναι 1, λαμβάνουμε ως όρο του γινομένου την ίδια τη μεταβλητή, ενώ όταν η τιμή της είναι 0, πρέπει να πάρουμε το συμπλήρωμά της!

Η λογική στην τέχνη

Εφαρμογή



Αυτό θα δούμε πώς γίνεται αργότερα!!

Απορίες?