

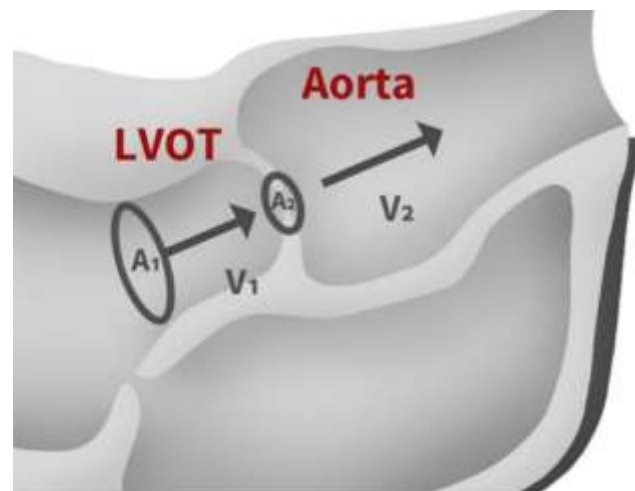
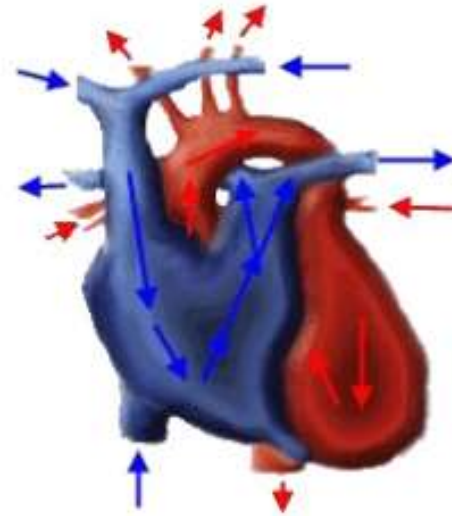
# ΡΕΥΣΤΑ II

Αρχή της συνέχειας  
Εξίσωση Μπερνούλι  
Εφαρμογές

# ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Βασίζεται στον πρώτο νόμο της  
θερμοδυναμικής

- Η μάζα δεν μπορεί να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί
- Η ποσότητα της μάζας που εισέρχεται στο σύστημα (όγκος ελέγχου) ισούται με την ποσότητα της μάζας που εξέρχεται από το σύστημα

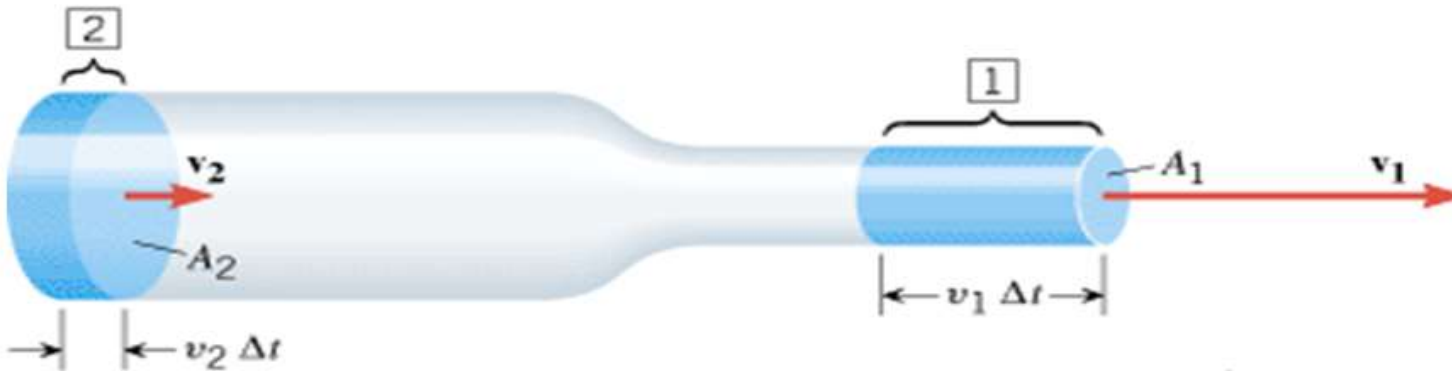


# ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



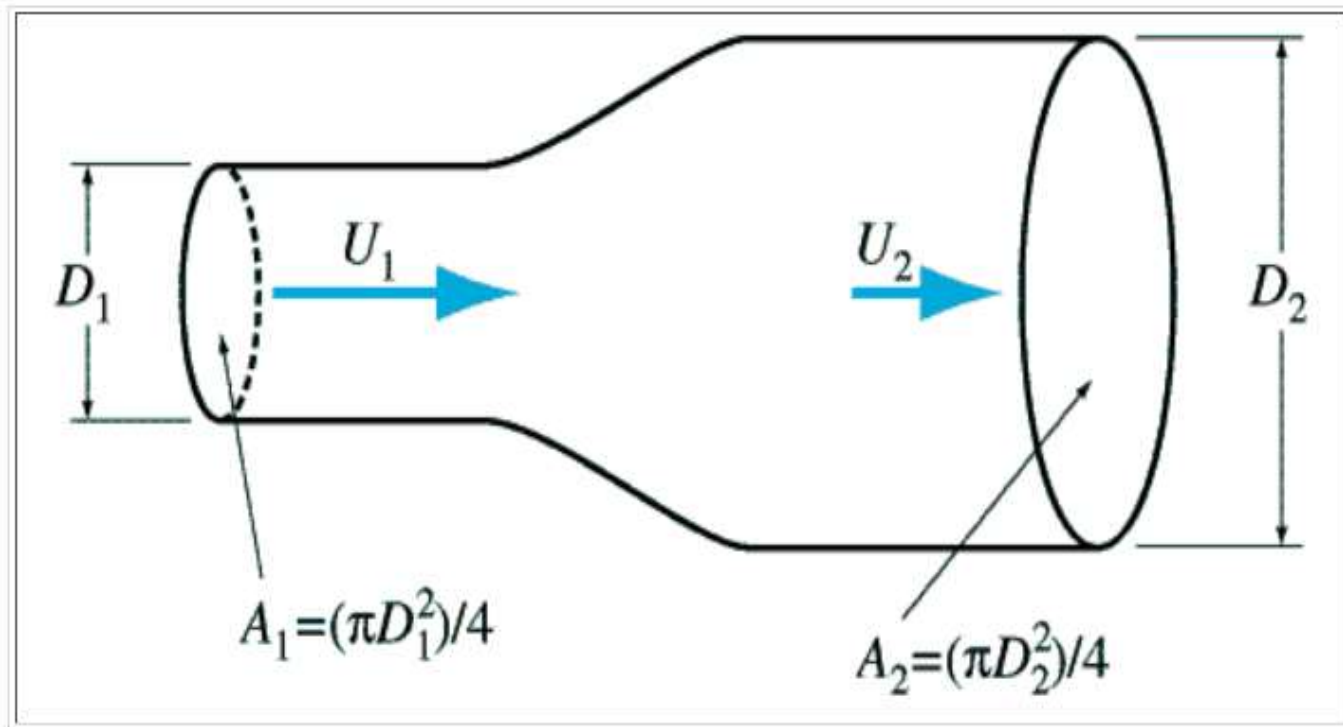
για παράδειγμα, για να ποτίσουμε,  
κλείνουμε με τον αντίχειρα λίγο την έξοδο  
του λάστιχου ποτίσματος  
η διατομή του μικραίνει και η ταχύτητα εξόδου  
αναγκαστικά μεγαλώνει  
αποτέλεσμα είναι η φλέβα να φτάνει μακρύτερα

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$



$$A = \pi r^2 = \pi D^2 / 4$$

# ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



**Παράδειγμα:** Το νερό τρέχει από κύριο αγωγό ύδρευσης επιφάνειας διατομής  $0.4 \text{ m}^2$  με ταχύτητα  $3 \text{ m/s}$ . Υπολογίστε την παροχή  $Q$  και την ταχύτητα του νερού όταν το νερό μπει σε αγωγό διατομής  $0.3 \text{ m}^2$

**DANIELIS BERNOULLI** Joh. Fil.  
MED. PROF. BASIL.  
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS  
SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.  
**HYDRODYNAMICA,**  
SIVE  
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM  
COMMENTARIUS.  
**OPUS ACADEMICUM**  
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET,  
CONGESTUM.



*ARGENTORATI,*  
**Scaphis JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,**  
Anno M D CCXXXVII  
Typis Joh. Hess. Unzeri, Typographi Balthardi.

# ΔΑΝΙΗΛ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ

8 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 1700 - 17 ΜΑΡΤΙΟΥ 1782



# ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ ΣΕ ΙΔΕΑΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

Στα ιδεατά ρευστά δεν υπάρχει τριβή και οι ταχύτητες στην διατομή είναι παντού ίδιες.



Στα πραγματικά ρευστά υπάρχει τριβή. Η ταχύτητα στην επαφή με τα τοιχώματα του σωλήνα είναι μηδενική και γίνεται μέγιστη στο κέντρο της διατομής.

# ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ



- Η εξίσωση Μπερνούλι, ή εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, εκφράζει ακριβώς το γεγονός ότι η υφιστάμενη ποσότητα ενέργειας μιας μονάδας μάζας δεν καταστρέφεται ούτε αυξάνεται. Κατά μήκος μιας **ροϊκής γραμμής** η ενέργεια ενός υγρού διατηρείται.
- Η εξίσωση αυτή αποδίδεται στον Δανιήλ Μπερνούλι, παρόλο που κατά πάσα πιθανότητα η οριστική της μορφή οφείλεται στον Λαγκράντζ.
- Η εξίσωση Μπερνούλι μαζί με την αρχή της συνέχειας (αρχή διατήρησης της μάζας) χρησιμεύει στην επίλυση πολλών σημαντικών και διαφορετικών προβλημάτων στην μηχανική των ρευστών.
- Η εξίσωση εφαρμόζεται υπό τις εξής προϋποθέσεις:
  1. Ιδεατό υγρό (χωρίς τριβές)
  2. Ασυμπίεστο και ομογενές ρευστό
  3. Μόνιμη ροή (=ροή με σταθερή παροχή)

## ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

Οι ροϊκές γραμμές ή γραμμές ροής είναι οι τροχιές των υγρών σωματιδίων

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι παντού εφαπτόμενο της ροϊκής γραμμής



Η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη όταν οι γραμμές ροής είναι κοντύτερα

# ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{σταθερό}$$

Φορτίο ταχύτητας:

$$\frac{u^2}{2g} \quad \text{dim} = \frac{\text{L}^2}{\text{T}^2} \frac{\text{T}^2}{\text{L}} = \text{L}$$

Φορτίο βαρύτητας ή υψομετρικό φορτίο:  $z$

$$\text{dim} = \text{L}$$

Φορτίο πίεσης:

$$\frac{p}{\rho g} \quad \text{dim} = \frac{\text{ML}}{\text{T}^2 \text{L}^2} \frac{\text{L}^3}{\text{M}} \frac{\text{T}^2}{\text{L}} = \text{L}$$



# ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{σταθερό}$$

Στην παραπάνω εξίσωση κάθε όρος έχει διαστάσεις μήκους [L].

1. το  $p/\rho g$  λέγεται **ύψος πίεσης**,
2. το  $z$  υψομετρικό ύψος ή **ύψος βαρύτητας** και
3. το  $V^2/2g$  λέγεται **ύψος κινητικής ενέργειας** ή **ύψος ταχύτητας**

το άθροισμα τους αποτελεί το **ολικό ύψος** ή **ολικό φορτίο**.

Η ενέργεια ή έργο, όπως είδαμε, είναι απόσταση (μήκος) επί δύναμη. Επομένως εάν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο στην παραπάνω έκφραση επί  $\rho g$  (ειδικό βάρος του υγρού, δηλαδή το βάρος -δύναμη δηλαδή- μιας μονάδας όγκου) παίρνουμε διαστάσεις πίεσης ( $N/m^2$ ) :

$$p + z\rho g + \rho V^2/2 = ct$$

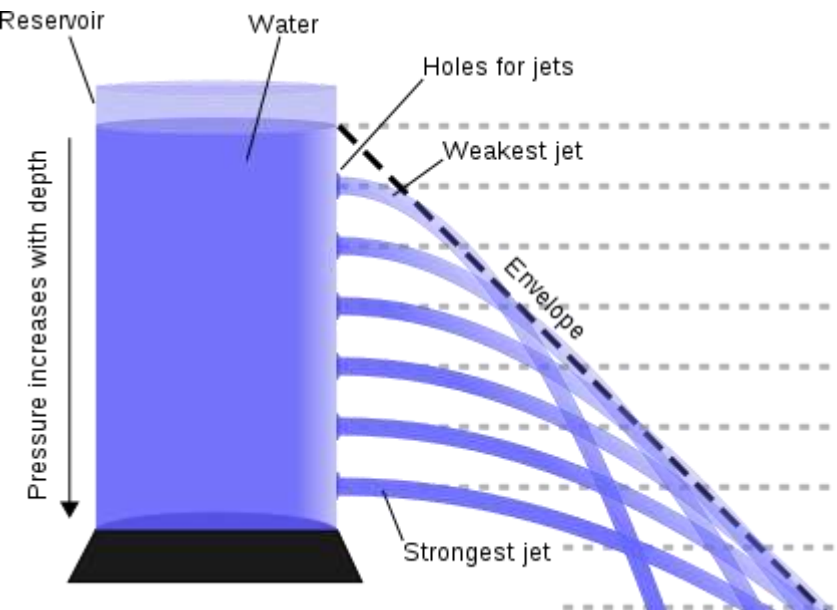
Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε με το  $m/m$  παίρνουμε  $N \cdot m/m^3$  ή  $J/m^3$  δηλαδή ενέργεια ανά μονάδα όγκου του υγρού.

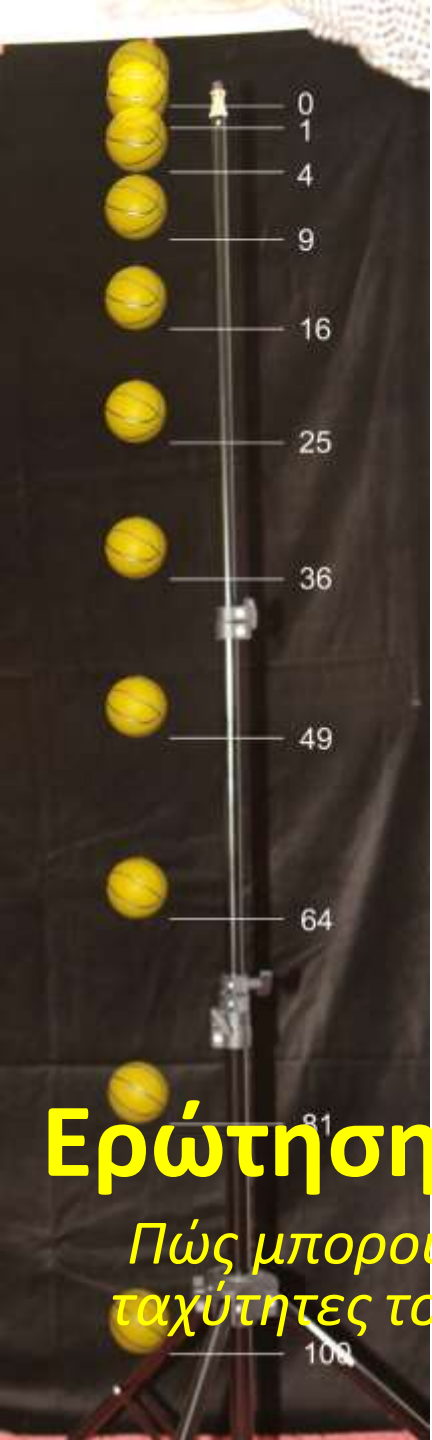
Γι' αυτό τον λόγο η εξίσωση του Μπερνούλι λέγεται και

# ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

# ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΤΟΡΙΚΕΛΙ

**Από τι εξαρτάται η ταχύτητα του νερού όπως εξέρχεται από μία διάτρητη δεξαμενή;**





# Ερώτηση κρίσης και σκέψης

*Πώς μπορούσε ο Τορικήλι να μετρήσει τις ταχύτητες του νερού κατά την έξοδό του από την οπή?*

# ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΤΟΡΙΚΕΛΙ

## Ερώτηση κρίσης και σκέψης

Πώς μπορούσε ο Τορικόελι να μετρήσει τις ταχύτητες του νερού κατά την έξοδό του από την οπή?

Τώρα, η υπόθεση ότι σε οριζόντια κίνηση οι διανυόμενες αποστάσεις είναι ανάλογες του χρόνου, και στην κατακόρυφη, ανάλογες του τετραγώνου του χρόνου, οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι η προκύπτουσα τροχιά είναι παραβολική. Πράγματι, χρησιμοποιώντας αλγεβρικούς συμβολισμούς και καρτεσιανές συντεταγμένες (σχήμα 24) - αγνώστων και των δύο στο Γαλιλαίο - και καλώντας  $v_0$  την αρχική ταχύτητα που προσδίδεται στο βλήμα στην οριζόντια κατεύθυνση,  $x$  το "εύρος" της βολής, μετρούμενο στη στάθμη του οριζοντα ΒΗ, και  $y$  το "ύψος" του όπλου, έχουμε

$$x = v_0 t;$$

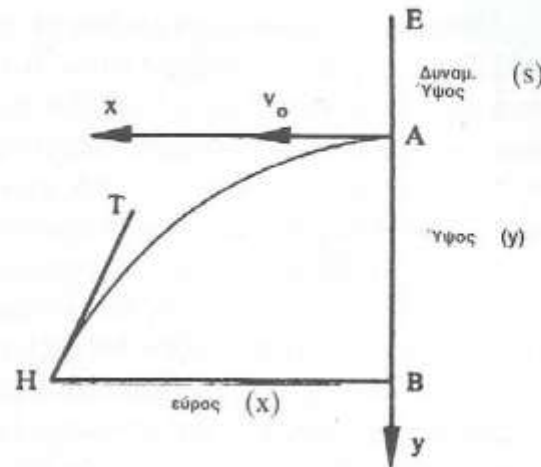
$$y = g t^2 / 2$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Με απαλοιφή του  $t$ , προκύπτει η εξίσωση

$$y = g x^2 / 2 v_0^2 \quad (1)$$

που παριστάνει ακριβώς μια παραβολή με κατακόρυφο άξονα και την κορυφή στο Α.



Σχήμα 24

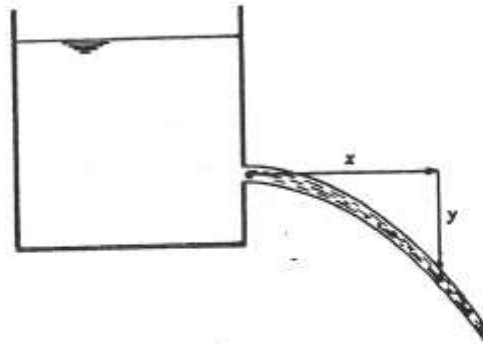
# ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΤΟΡΙΚΕΛΙ

## Ερώτηση κρίσης και σκέψης

Πώς μπορούσε ο Τορικόλι να μετρήσει τις ταχύτητες του νερού κατά την έξοδό του από την οπή?

Πρόβλημα 4.56.

4.57. Ένας κρουνός εξέρχεται οριζόντια από ένα στόμιο στο κατακόρυφο παράχωμα μιας μεγάλης δεξαμενής. Αμελώντας την αντίσταση του αέρα καθόρισε την ταχύτητα του κρουνοῦ για την ακόλουθη κοίλιζα τροχιῶν: (α)  $x = 4,0$  m,  $y = 1,0$  m, (β)  $x = 4,0$  m,  $y = 2,0$  m. (γ)  $x = 4,0$  m,  $y = 4,0$  m. (δ)  $x = 4,0$  m,  $y = 8,0$  m. Έκφρασε την απάντηση σε m/sec.

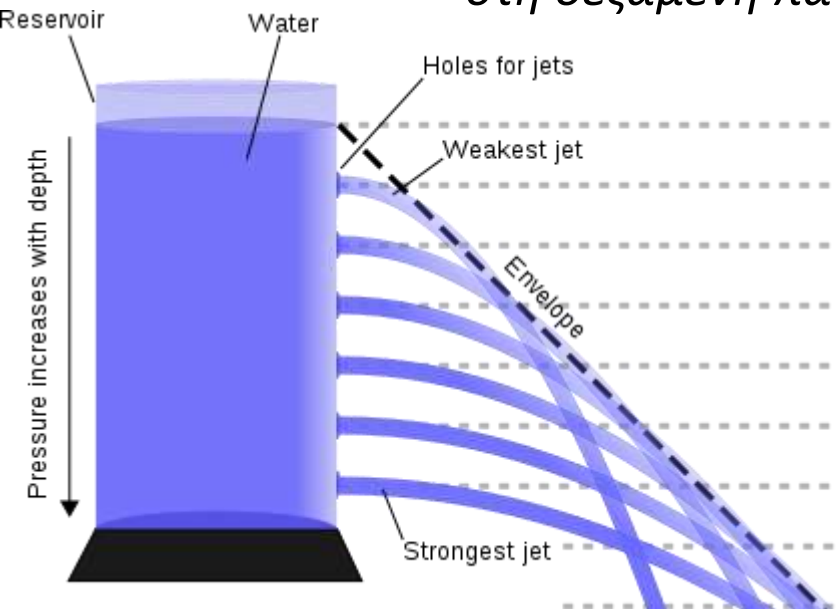


Πρόβλημα 4.57.

# ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΤΟΡΙΚΕΛΙ

**“Οι ταχύτητες του νερού που εξέρχονται από μία διάτρητη δεξαμενή είναι ανάλογες με τις τετραγωνικές ρίζες των αποστάσεων των τρυπών από την επιφάνεια του νερού**

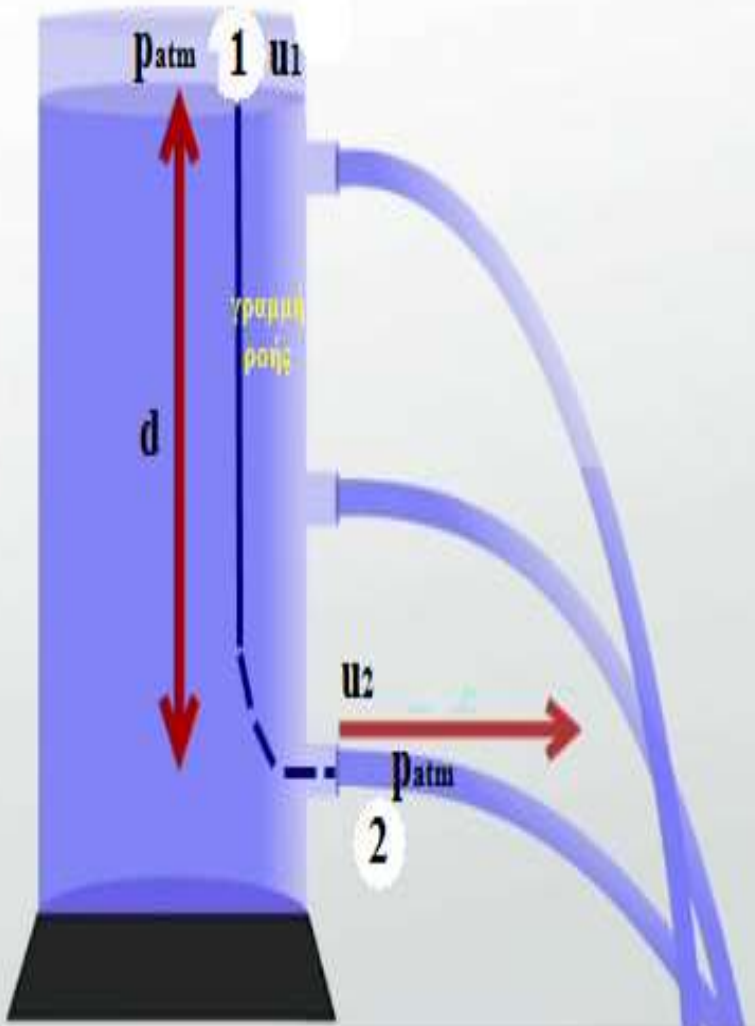
*Η εξερχόμενη φλέβα έχει την ίδια ενώθηση (= ενέργεια) με εκείνη ενός σώματος που πέφτει από ένα ύψος ίσο με το βάθος του νερού στη δεξαμενή πάνω από την οπή εξόδου.*



# ΑΠΟΔΕΙΞΗ

«Οι ταχύτητες του νερού που εξέρχονται από μιά διάτρητη δεξαμενή είναι ανάλογες με τις τετραγωνικές ρίζες των αποστάσεων των τρυπών από την επιφάνεια του νερού»

## SPOUTING CAN EXPERIMENT



Επειδή το ολικό φορτίο είναι σταθερό, το άθροισμα των φορτίων της ταχύτητας, του υψόμετρου και της πίεσης θα είναι ίδιο σε κάθε σημείο πάνω στην γραμμή ροής. Με την χρήση δεικτών για να δείξουμε τα σημεία 1 και 2, η εξίσωση Bernoulli μπορεί να γραφτεί :

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Εφόσον η  $u_1$  είναι πολύ μικρότερη από την  $u_2$  ( $u_1 \ll u_2$ ), μπορούμε να την θεωρήσουμε μηδενική. Η πίεση στην επιφάνεια θα είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση και επίσης ατμοσφαιρική θα είναι και η πίεση στην έξοδο του νερού από την οπή, στο σημείο 2. Η μικρή διαφορά στην τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης στα σημεία 1 και 2 μπορεί να αγνοηθεί. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε

$$z_1 + \frac{p_{atmos}}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_{atmos}}{\rho g} \quad \text{ή} \quad \frac{u_2^2}{2g} = z_1 - z_2$$

Αν θέσουμε  $d = z_1 - z_2$  τότε  $u_2 = (2gd)^{1/2}$

# ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

◉ <https://ophysics.com/fl2.html>

## Περιγραφή

Προσομοίωση ροής ασυμπίεστου ρευστού από αριστερά προς τα δεξιά διαμέσου ενός σωλήνα. Μπορείτε να μεταβάλλετε τα ύψη, τις πιέσεις, τις ταχύτητες και τις ακτίνες των σωλήνων. Επίσης μπορείτε να αλλάξετε το ύψος του σωλήνα στα δεξιά. Η ταχύτητα και η πίεση στον δεξί σωλήνα μπορεί να υπολογιστεί με την εξίσωση του Μπερνούλι. Μετά τον υπολογισμό μπορείτε να ελέγξετε τις απαντήσεις σας πατώντας στο κουτάκι:

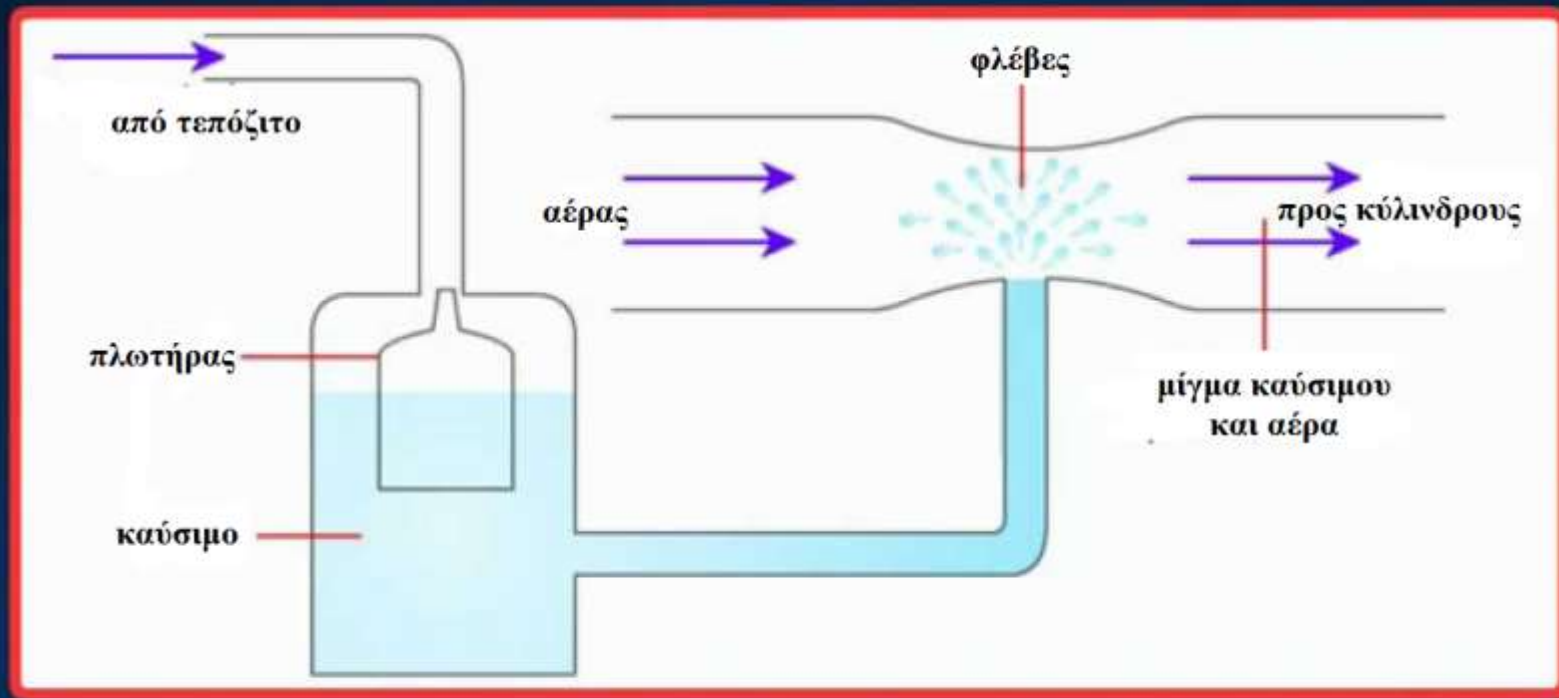
---

Show pressure and velocity values



# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΚΑΡΜΠΥΡΑΤΕΡ

## καρμπυρατέρ

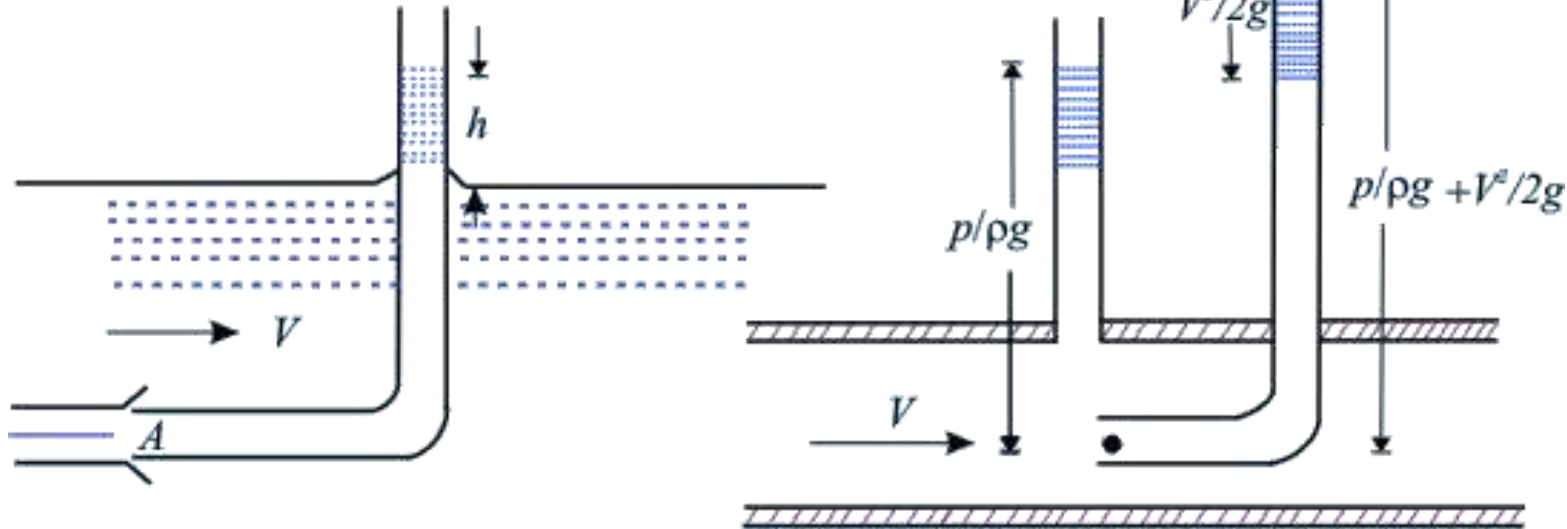
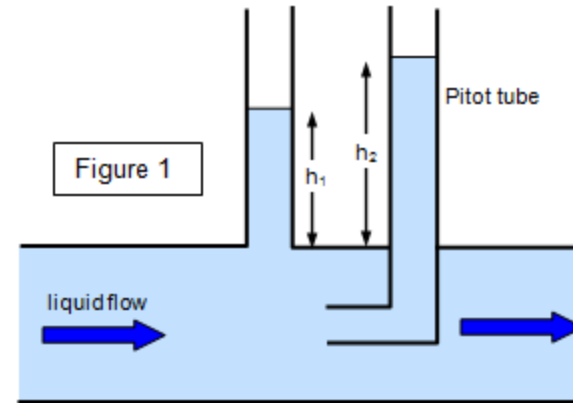


# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΣΩΛΗΝΑΣ ΠΙΤΟ

Ο Pitot (1732) κατασκεύασε την απλή αυτή συσκευή με σκοπό τη μέτρηση της ταχύτητας του νερού στα πλοία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και σε κλειστούς αγωγούς.

Στο διπλανό σχήμα το  $h_1$  είναι η στατική πίεση ( $p/\rho g$ ) ενώ το  $h_2$  είναι ο όρος  $p/\rho g + u^2/2g$

Η διαφορά τους επομένως,  $\Delta h$ , είναι ο όρος  $u^2/2g$  (δες κάτω δεξιά σχήμα).



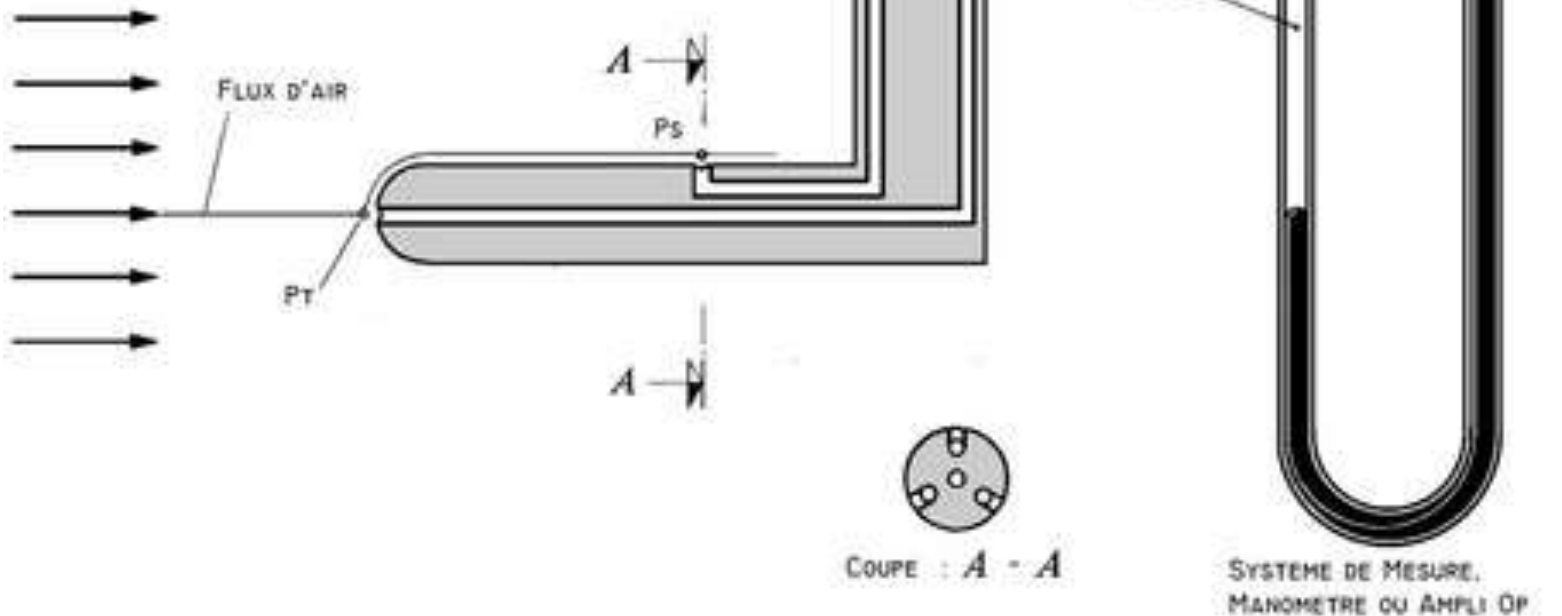
<https://www.youtube.com/watch?v=3zEdtkuNYLU>

<https://www.youtube.com/watch?v=AbBDMQ7fHS4>

# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΣΩΛΗΝΑΣ ΠΙΤΟ

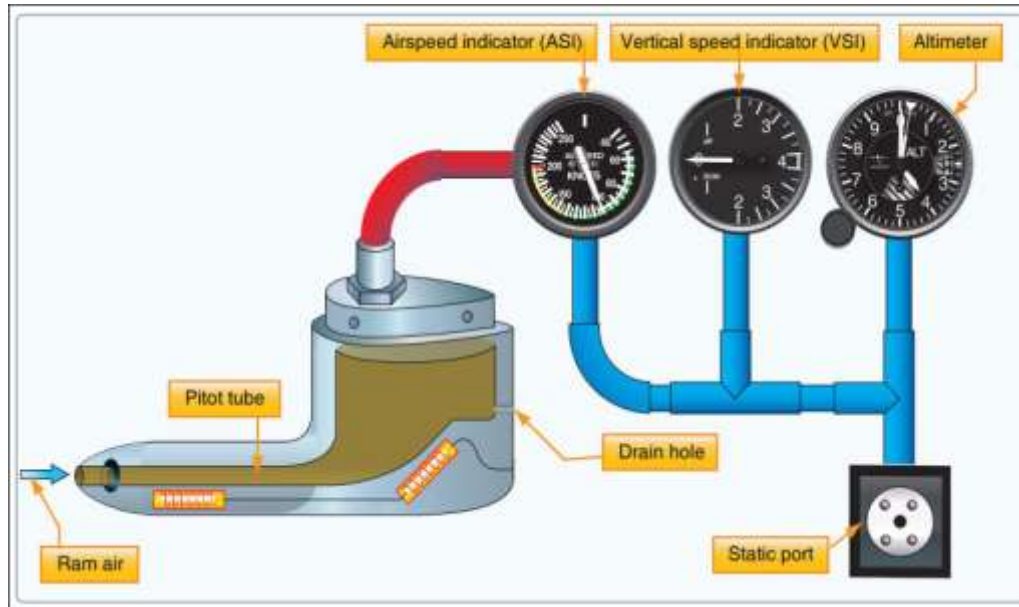
Σωλήνας Pitot όπως μετασκευάστηκε από τον Prandtl  
Στο πλάι υπάρχει τρυπούλα για την στατική πίεση.

## PRINCIPE DU TUBE PITOT

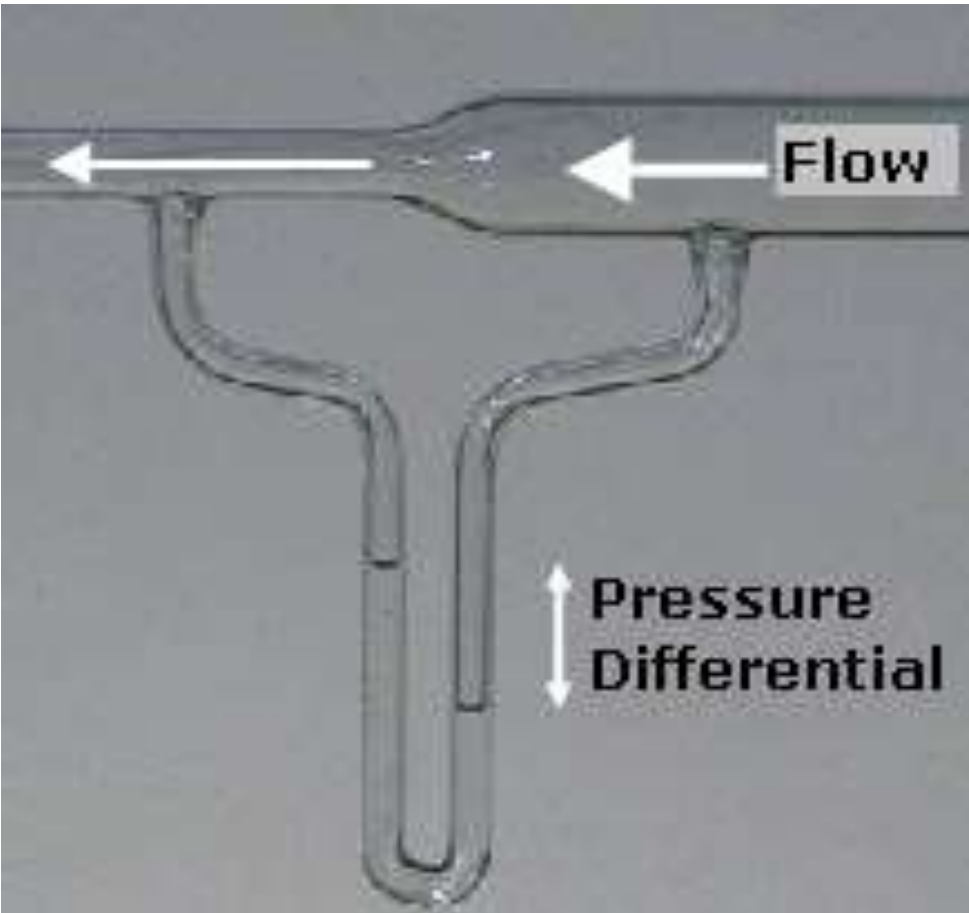


# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΣΩΛΗΝΑΣ ΠΙΤΟ

Στα αεροπλάνα σήμερα ο σωλήνας Πιτό χρησιμοποιείται για την μέτρηση της ταχύτητας αλλά και, μέσω της στατικής πίεσης (ατμοσφαιρικής), και σαν αλτίμετρο. Ο σωλήνας Πιτο χρησιμοποιείται κυρίως στα αέρια.



# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΜΕΤΡΗΤΗΣ VENTURI



Άλλη μια συσκευή για τη μέτρηση των ταχυτήτων των υγρών.

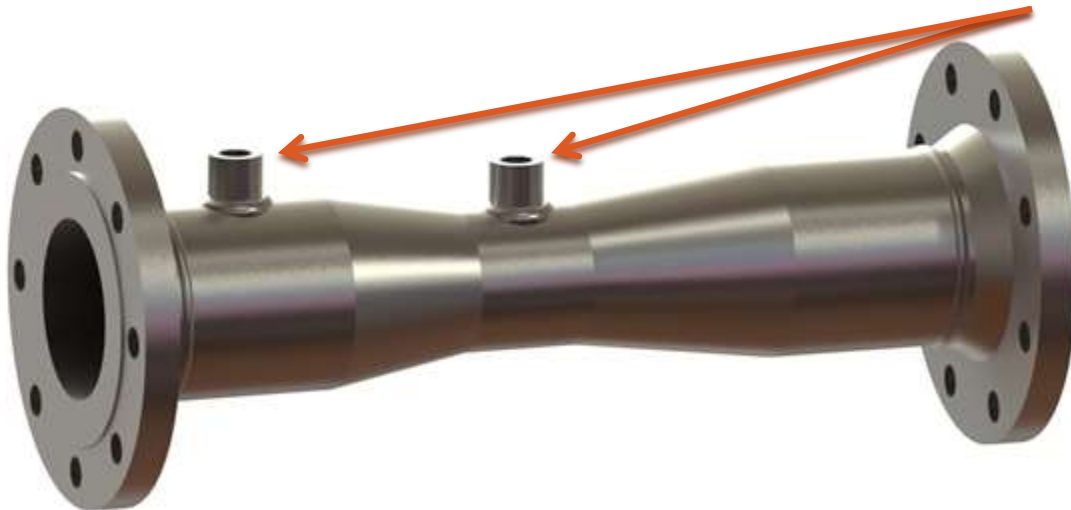
Καθώς το υγρό μπαίνει στον μικρότερο σωλήνα η ταχύτητα αυξάνεται ενώ μειώνεται η πίεση.

Η διαφορά της πίεσης που δίνεται από κατάλληλα τοποθετημένο μανόμετρο, και με γνωστές τις διαμέτρους των αγωγών, μπορεί να δώσει την ταχύτητα και την παροχή του σωλήνα μέσω της εξίσωσης Μπερνούλι.

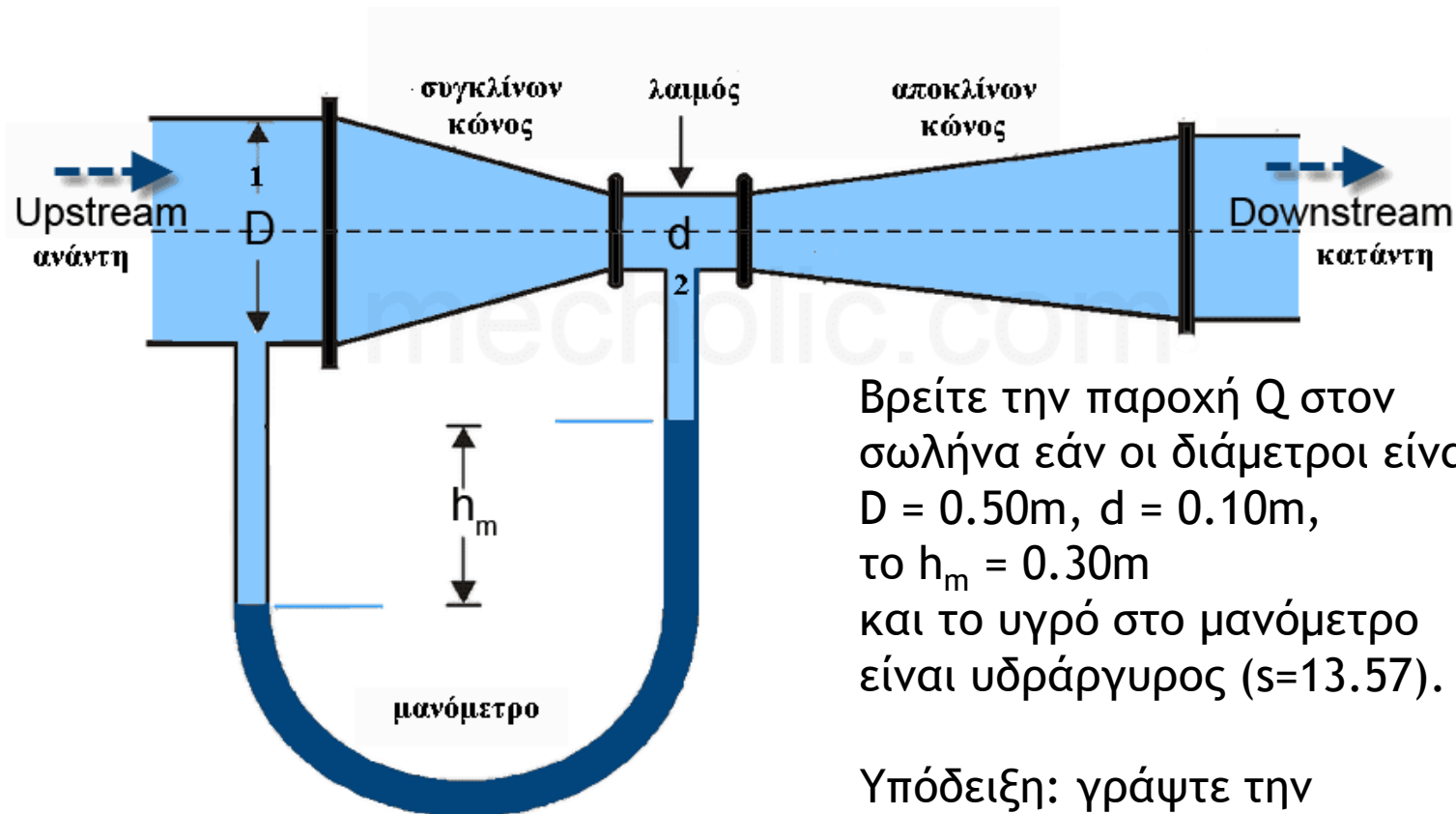
# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΜΕΤΡΗΤΗΣ VENTURI



Προσέξτε τις εξοχές,  
είναι αναμονές για την  
τοποθέτηση του μανόμετρου



# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΜΕΤΡΗΤΗΣ VENTURI



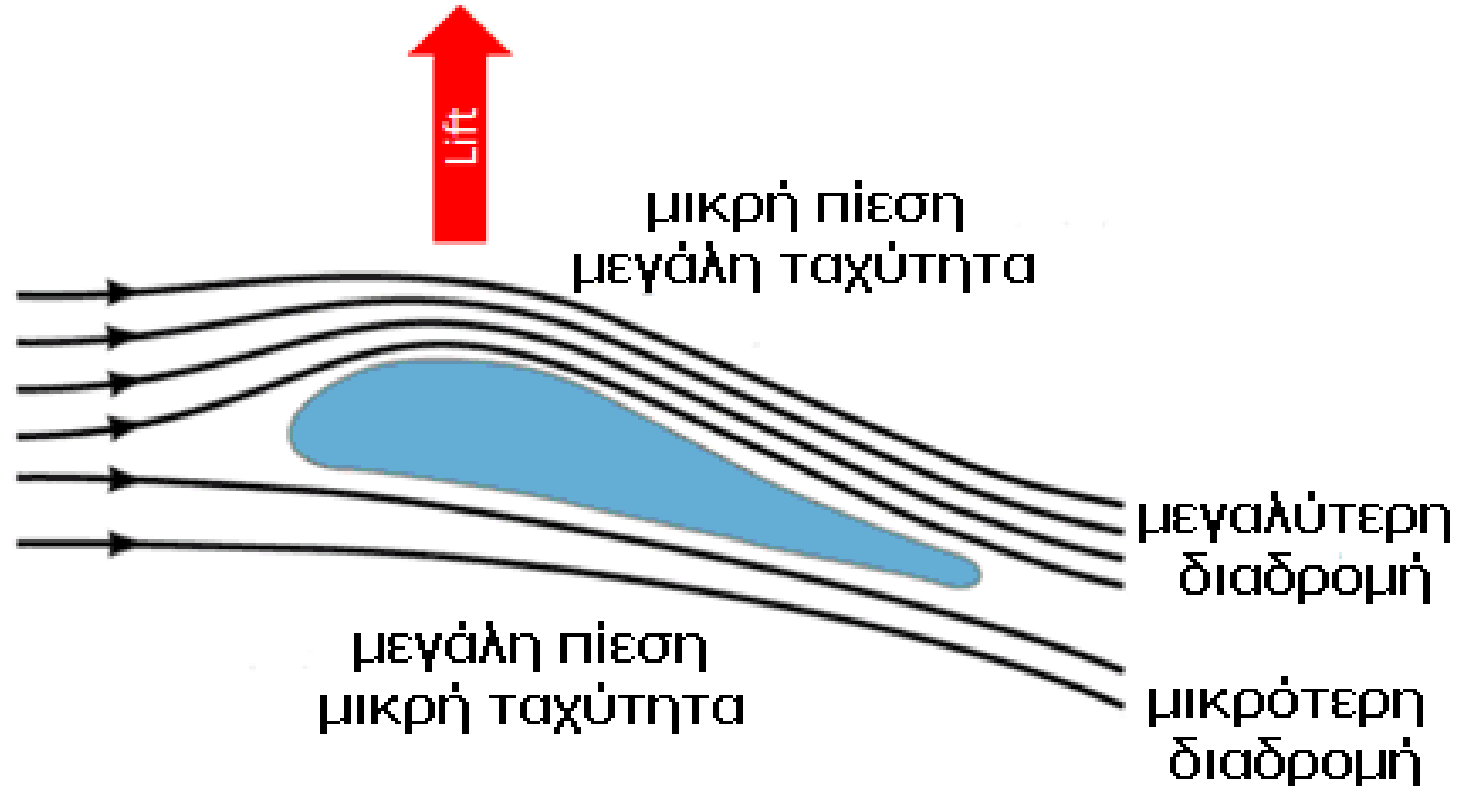
Βρείτε την παροχή  $Q$  στον σωλήνα εάν οι διαμέτροι είναι  $D = 0.50\text{m}$ ,  $d = 0.10\text{m}$ , το  $h_m = 0.30\text{m}$  και το υγρό στο μανόμετρο είναι υδράργυρος ( $s=13.57$ ).

Υπόδειξη: γράψτε την εξίσωση Μπερνούλι για τα σημεία 1 και 2. Προσέξτε ότι ο άξονας του σωλήνα είναι οριζόντιος άρα δεν υπάρχει  $\Delta z$ .

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΠΤΗΣΗ

## Αεροδυναμική ανύψωση



Also known as the "Longer Path" or "Equal Transit" Theory

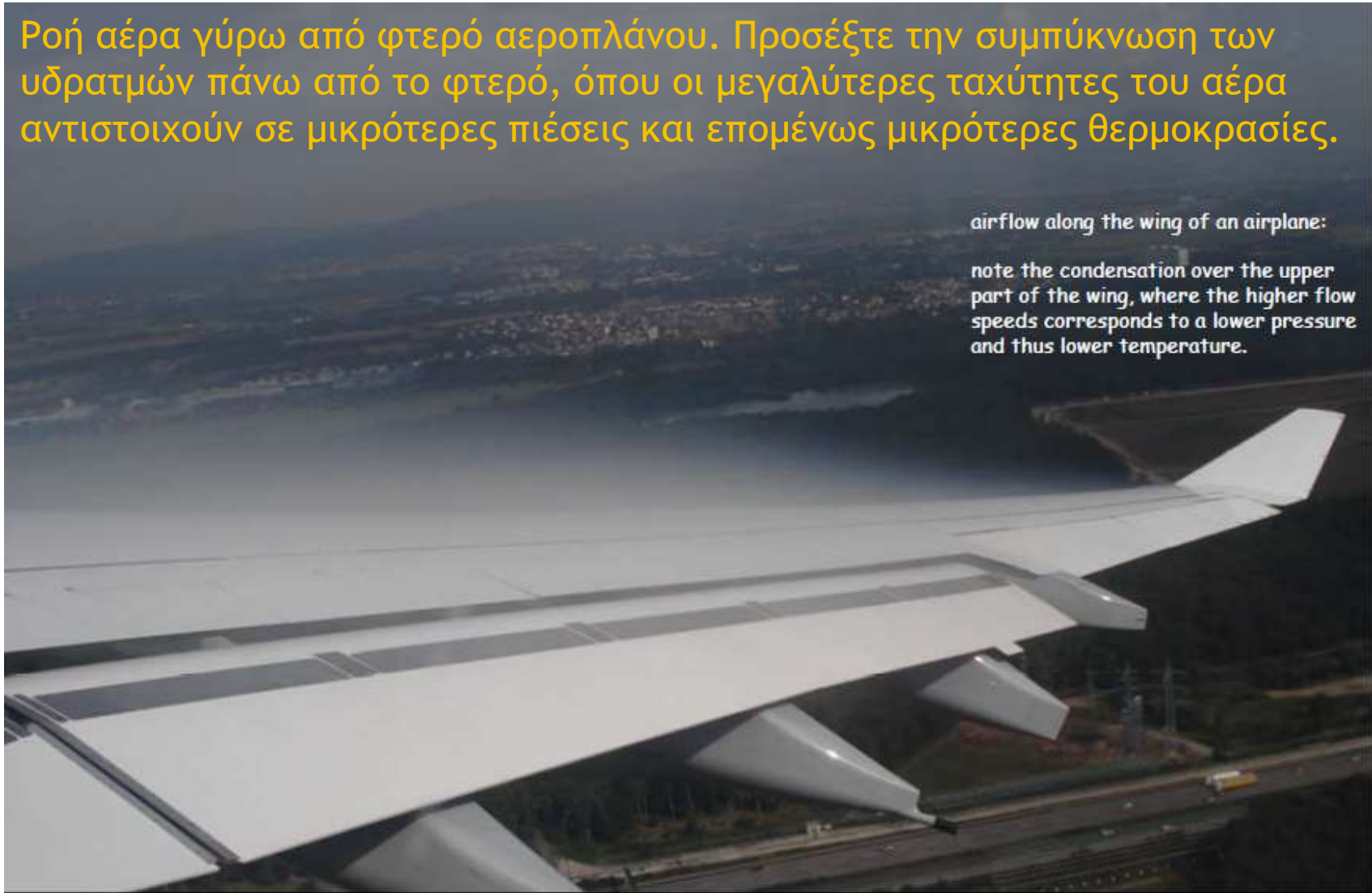


# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΠΤΗΣΗ

Ροή αέρα γύρω από φτερό αεροπλάνου. Προσέξτε την συμπύκνωση των υδρατμών πάνω από το φτερό, όπου οι μεγαλύτερες ταχύτητες του αέρα αντιστοιχούν σε μικρότερες πιέσεις και επομένως μικρότερες θερμοκρασίες.

airflow along the wing of an airplane:

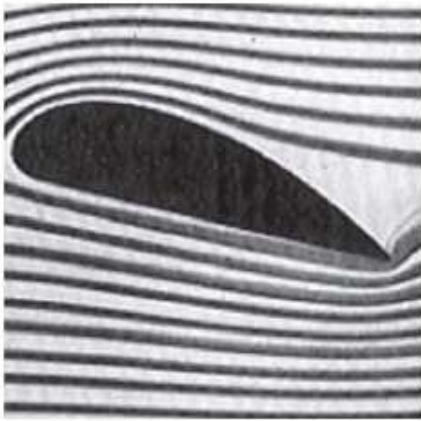
note the condensation over the upper part of the wing, where the higher flow speeds corresponds to a lower pressure and thus lower temperature.



# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΠΤΗΣΗ

FIGURE 5

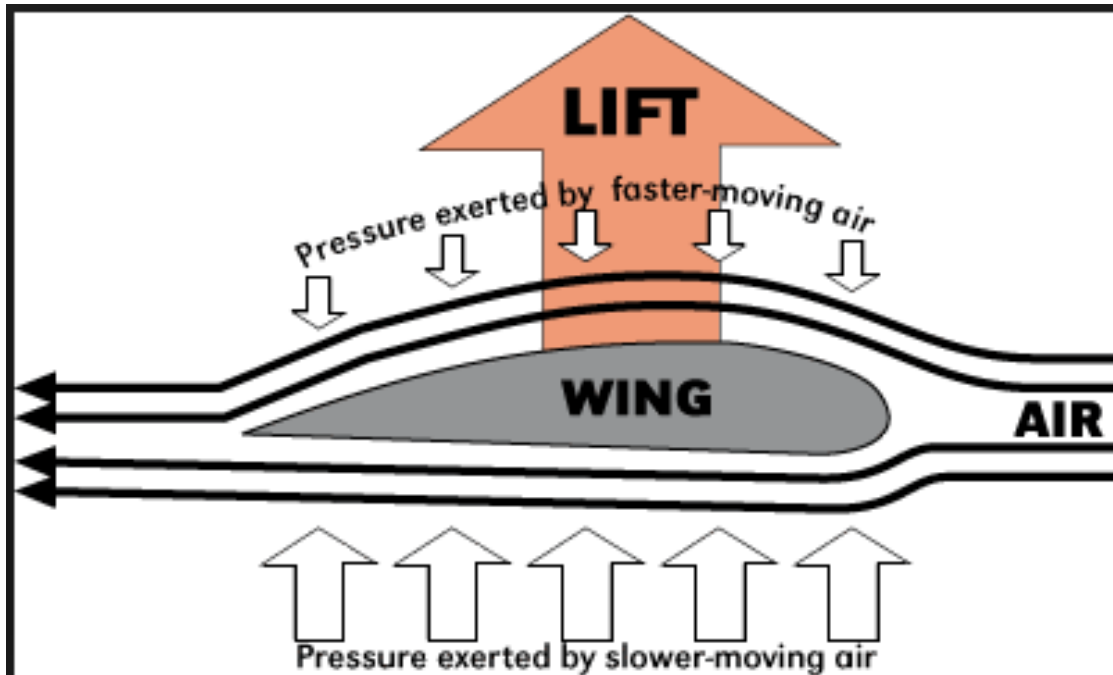
Very little downward deflection of streamlines is shown in this typical wind-tunnel photo.



Φωτογραφία από αεροσήραγγα (windtunnel)

Προσέξτε ότι οι ροϊκές γραμμές (streamlines) είναι πυκνότερες πάνω από το φτερό και αραιότερες από κάτω.

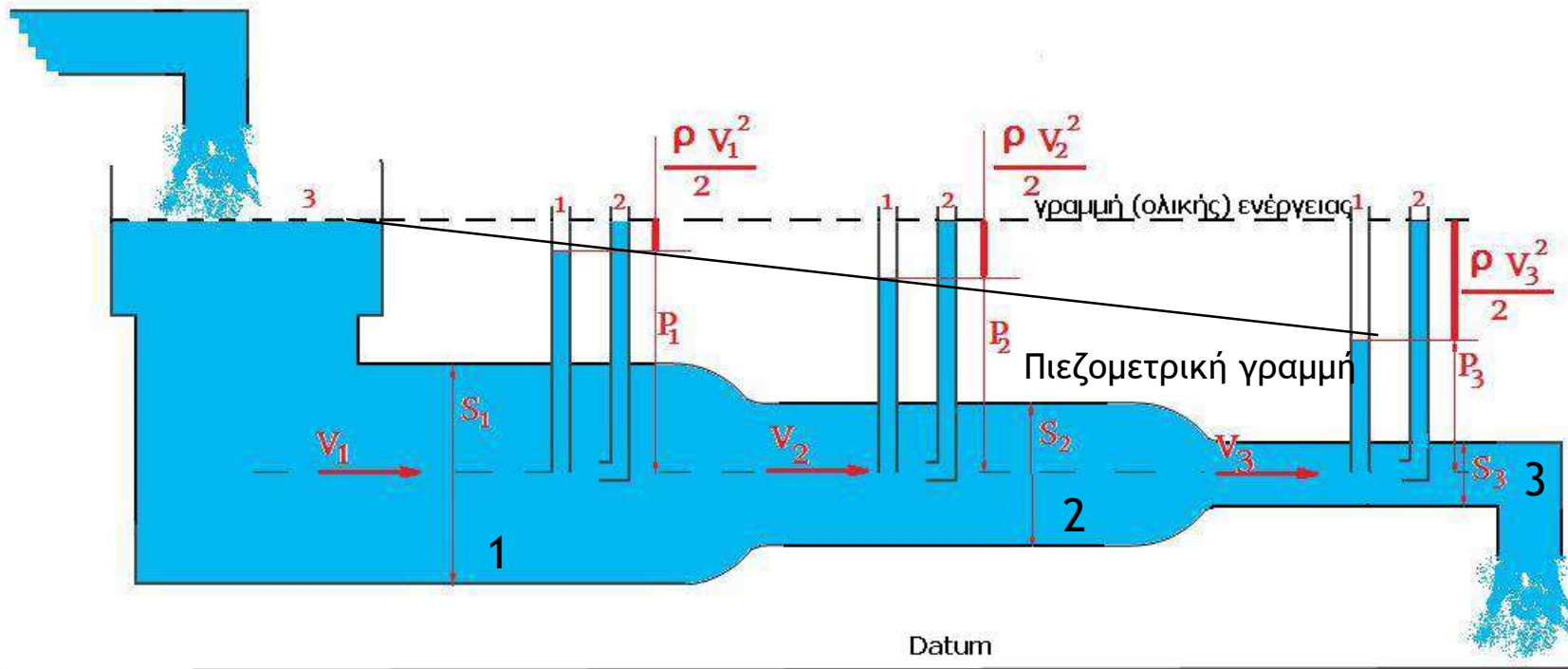
Αυτό σημαίνει μεγαλύτερη ταχύτητα του αέρα πάνω από το φτερό και μικρότερη από κάτω.



Επομένως η πίεση κάτω από το φτερό είναι μεγαλύτερη από την πίεση πάνω από το φτερό.

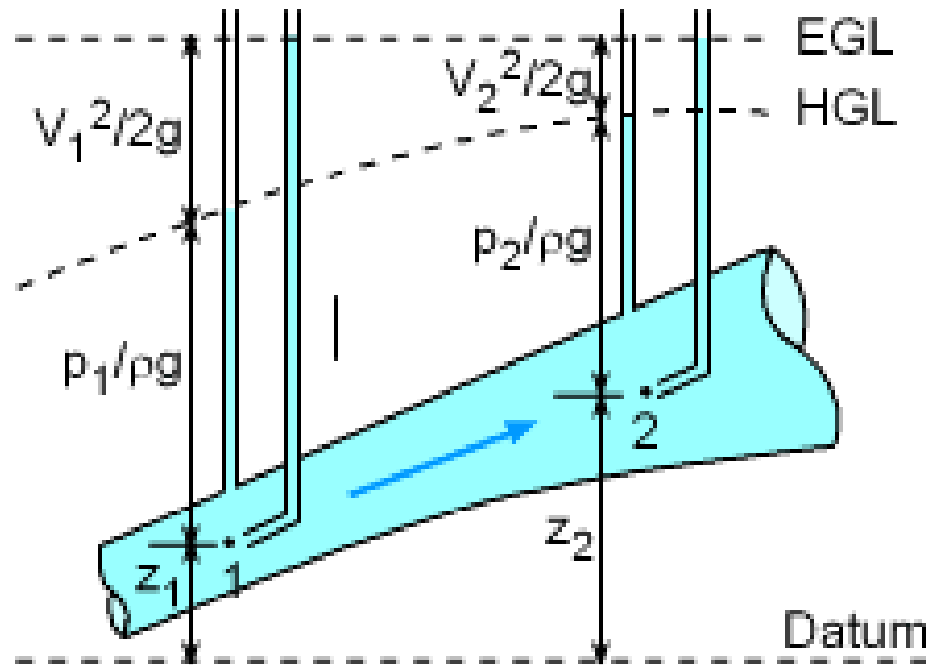
Θα υπάρχει συνεπώς μια διαφορά πίεσης που θα τείνει να σηκώσει το φτερό.

# ΓΡΑΜΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΙΕΖΟΜΕΤΡΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ



Αν οι διάμετροι είναι  $S_1=1\text{m}$ ,  $S_2=0.6\text{m}$ ,  $S_3=0.3\text{m}$  και  $Q=2\text{m}^3/\text{s}$   
Βρείτε τα ύψη της κινητικής ενέργειας ( $=u^2/2g$ ) στα 1,2,3.

# ΓΡΑΜΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΙΕΖΟΜΕΤΡΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ



Στο σχήμα έχουμε ροή σε ένα ιδεατό ρευστό. Οι σωλήνες στο πλάι του αγωγού (πιεζομετρικοί σωλήνες) μετρούν μόνο το ύψος πίεσης (το  $z$  θεωρείται σταθερό) και οι κορυφές τους “γράφουν” την πιεζομετρική γραμμή (Hydraulic Grade Line - HGL), ενώ οι σωλήνες στο κέντρο του αγωγού περιλαμβάνουν και τον όρο της κινητικής ενέργειας και οι κορυφές τους “γράφουν” την γραμμή ενέργειας (Energy Grade Line - EGL). Παρατηρούμε ότι η γραμμή ενέργειας μένει οριζόντια γιατί θεωρούμε ότι δεν έχουμε απώλειες, ενώ στην φαρδύτερη διατομή του σωλήνα όπου η ταχύτητα μειώνεται (και άρα και το ύψος της κινητικής ενέργειας) για να μείνει σταθερή η συνολική ενέργεια αυξάνεται το ύψος πίεσης.



## Βιβλιογραφία

- Στοιχεία φυσικής υδρολογίας, Κεφάλαιο 3  
**(Αρχές της μηχανικής των ρευστών)**

G. Hornberger et al. Μτφ: Σωτήρη Καραλή

- **Η επιστήμη του νερού**, Enzo Levi, Εκδόσεις ΤΕΕ, Μτφ: Γιάννη Λεονταρίτη

- **Υδραυλική**, 1ος τόμος, Daugherty – Franzini