Βασική στατιστική Υδρολογία

Εισαγωγή στην κανονική κατανομή και την χρήση της στην Υδρολογία

Σ.Η.Καραλής

1. Ορολογία
2. Ιστογράμματα συχνοτήτων
3. Ιδιότητες κανονικής κατανομής
4. Πίνακες τυποποιημένης καν.κατ.
6. Σχεδιασμός αντιπλημμυρικών τεχνικών έργων

Οι υδρολογικές διεργασίες εξελίσσονται στον χώρο και τον χρόνο κατά τρόπο που είναι μόνο εν μέρει προβλέψιμος (*ντετερμινιστικός*).

Το υπόλοιπο μέρος δεν μπορεί να προβλεφθεί και θεωρείται *τυχαίο*.

Αυτές οι διεργασίες ονομάζονται *στοχαστικές*.

Σε κάποιες περιπτώσεις το τυχαίο (στοχαστικό) μέρος είναι τόσο πιο πολύ σημαντικό από το ντετερμινιστικό μέρος, ώστε όλο το φαινόμενο να μπορεί να θεωρηθεί ΤΥΧΑΙΟ. Τυχαίο σημαίνει ότι η πιθανότητα εμφάνισης μιας παρατήρησης δεν εξαρτάται από την εμφάνιση μιας οποιασδήποτε άλλης

Παράδειγμα: η ετήσια βροχόπτωση σε έναν τόπο. (πχ αν πέρισυ έβρεξε >1000 χιλ. το να συμβεί αυτό και φέτος έχει τις ίδιες πιθανότητες).

Αν το φαινόμενο είναι τυχαίο (για παράδειγμα, η μέση ετήσια βροχόπτωση) τότε η κάθε παρατήρηση (πχ η ΕΒ του 2019) δεν επηρεάζεται από (συσχετίζεται με) τις γειτονικές της παρατηρήσεις (πχ από την ΕΒ του 2018) και επίσης οι στατιστικές ιδιότητες των παρατηρήσεων είναι ίδιες (stationarity).

Όταν δεν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα σε γειτονικές παρατηρήσεις, το υδρολογικό σύστημα συμπεριφέρεται σαν **στοχαστικό,** ανεξάρτητο από χώρο και χρόνο.
Η Στατιστική είναι μια μαθηματική επιστήμη **περιγραφική** και όχι **αιτιοκρατική** (ντετερμινιστική)

ΒΑΣΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Τυχαία μεταβλήτή Χ (random variable) : μια μεταβλητή που περιγράφεται από μία κατανομή πιθανότητας. Η κατανομή αυτή προσδιορίζει την πιθανότητα μία παρατήρηση **x**, της μεταβλητής να πέσει μέσα σε ένα εύρος τιμών της Χ.
Για παράδειγμα αν Χ είναι η ΕΒ σε ένα σταθμό, τότε η κατανομή πιθανότητας της Χ ορίζει τις πιθανότητες η ΕΒ μιας χρονιάς να βρίσκεται ανάμεσα σε πχ 600 χιλιοστά και 800 χιλιοστά, ανάμεσα σε 800 χιλιοστά και 1000 χιλιοστά, κόκ.

Δείγμα (sample): είναι οποιαδήποτε συλλογή από τιμές της Χ, δηλαδή {x1,x2,…xn}.
Μπορεί να είναι πχ οι ΕΒ μιας τριακονταετίας σε έναν τόπο. Είναι φανερό οτι οι στατιστικές ιδιότητες των δειγμάτων θα διαφέρουν (πχ η 20ετία 1980-2000 είναι πολύ πιο βροχερή από την εικοσαετία 2000-2020).

Πληθυσμός (Population): είναι όλες οι παρατηρήσεις μαζί.
Για παράδειγμα τα εκλογικά γκάλοπ γίνονται σε ένα *δείγμα* του πληθυσμού.'Ο πληθυσμός είναι όλοι οι έχοντες δικαίωμα ψήφου σε μια χώρα.

Δειγματικός χώρος (Sample space): Η συλλογή όλων των πιθανών δειγμάτων που μπορούν να εξαχθούν από έναν πληθυσμό. Π.χ όλες οι ΕΒ σε ένα τόπο από τότε που άρχισε να βρέχει σε αυτόν το τόπο (έστω από όταν αναδύθηκε από την θάλασσα). Αλλά ο δειγματικός χώρος για δύο ριξίματα του ζαριού είναι όλοι οι συνδυασμοι 6 ανα 2 (δειγματοληψία με επανατόποθέτηση) = (6 2) = 15 (30 αν μας ενδιαφέρει και η σειρά τους).
Γεγονός (event): ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

ΒΑΣΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΙΙ

Πιθανότητα ενός γεγονότος Α, Ρ(Α), είναι η ποσοτικοποίηση του ενδεχομένου αυτό να συμβεί όταν κάνουμε μια παρατήρηση (μέτρηση) της τυχαίας μεταβλητής. Αν πχ ένα δείγμα με **n** παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής έχει τιμές στο εύρος (ή **κλάση**) του γεγονότος **Α** (ΕΒ μεταξύ 800 και 1000 χιλιοστά) τότε η <u>σχετική συχνότητα </u>του γεγονότος Α είναι

$$P(A) = \lim (n_A/n)\ ,\ n \to \text{άπειρο}$$

<u>Ιδιότητες</u>

1.Συνολική πιθανότητα. *Αν ο δειγματικός χώρος* **Ω** *μοιραστεί μεταξύ m μη αλληλοκαλυπτόμενων γεγονότων Α1, Α2,…Am τότε*

$$P(A1) + P(A2) + \ldots + P(Am) = P(\Omega) = 1$$

2.Συμπληρωματικότητα. *Αν $\bar{A}$ είναι το συμπλήρωμα του Α, δηλαδή $\bar{A}$ =Ω-Α, τότε*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3. Πιθανότητα υπό συνθήκη. *Αν η εμφάνιση του γεγονότος Β δεν εξαρτάται από την εμφάνιση του γεγονότος Α (είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις) τότε*

$$P(B|A) = P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟ - ΣΥΝΕΧΕΣ

Μια βασική διάκριση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών είναι αν είναι **συνεχείς** ή **διακριτές**. Η ΕΒ είναι συνεχής μεταβλητή (μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή) ενώ το αποτέλεσμα από το ρίξιμο ενός ζαριού είναι διακριτή μεταβλητή (θα πάρει τιμή 1,2,3,4,5 ή 6).

Η αντίθεση μεταξύ **διακριτού** και **συνεχούς** είναι από τις πιο βασικές διαιρέσεις στα μαθηματικά, και η πρώτη διατύπωσή της ανήκει στους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, αστρονόμους και φιλοσόφους. Συνεχή είναι τα **μεγέθη** όπως το μήκος, η τιμή μιας γωνίας κά,ενώ διακριτοί είναι οι **αριθμοί**.

Διακριτές κατανομές

- **Bernoulli και Διωνυμική (Binomial) Κατανομή**
- **Poisson Κατανομή**

Συνεχείς κατανομές

- **Ομοιόμορφη - Uniform**
- **Κανονική - Normal**
- **Τριγωνική - Triangular**
- **Εκθετική - Exponential**

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ.

Ο σκοπός της στατιστικής είναι να εξαγάγει τα βασικά χαρακτηριστικά από έναν αριθμό μετρήσεων. Έτσι, δεν θα έχουμε να κάνουμε με πολλά νούμερα αλλά με λίγα.

Στατιστικές παράμετροι είναι τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού όπως μ και σ.

1. **Παράμετροι κεντρικής τάσης**
   - Μέσος (αριθμητικός), μ
   - Διάμεσος
   - Γεωμετρικός μέσος
2. **Παράμετροι διασποράς**
   - Διακύμανση, σ^2
   - Τυπική απόκλιση, σ
   - Συντελεστής μεταβλητότητας
3. **Παράμετροι ασυμμετρίας**
   - Συντελεστής ασυμμετρίας

TABLE 11.3.1
Population parameters and sample statistics

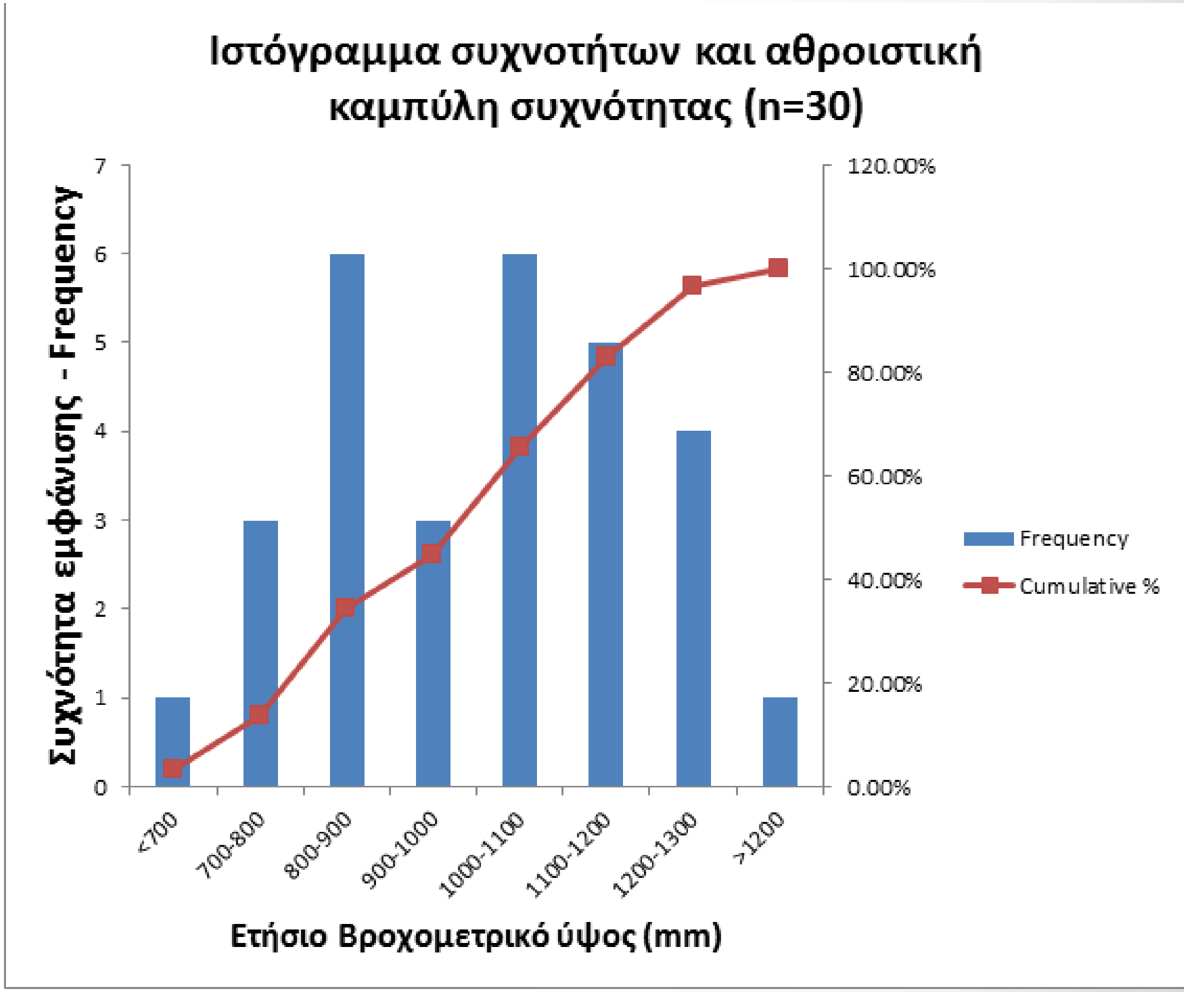
Population parameter	Sample statistic
1. *Midpoint*	
Arithmetic mean	
$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Median	
x such that $F(x) = 0.5$	50th-percentile value of data
Geometric mean	
antilog $[E(\log x)]$	$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$
2. *Variability*	
Variance	
$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
Standard deviation	
$\sigma = \{E[(x-\mu)^2]\}^{1/2}$	$s = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{1/2}$
Coefficient of variation	
$CV = \frac{\sigma}{\mu}$	$CV = \frac{s}{\bar{x}}$
3. *Symmetry*	
Coefficient of skewness	
$\gamma = \frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3}$	$C_s = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ετήσια Βροχόπτωση σε σταθμό.

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε είναι ένα **ιστόγραμμα συχνοτήτων**. Οι περιοχές που ορίζονται μεταξύ των τιμών λέγονται **κλάσεις**.
Μετράμε δηλαδή πόσες χρόνια είχαμε Βροχόπτωση από 700-800χιλ, από 800-900χιλ κλπ.

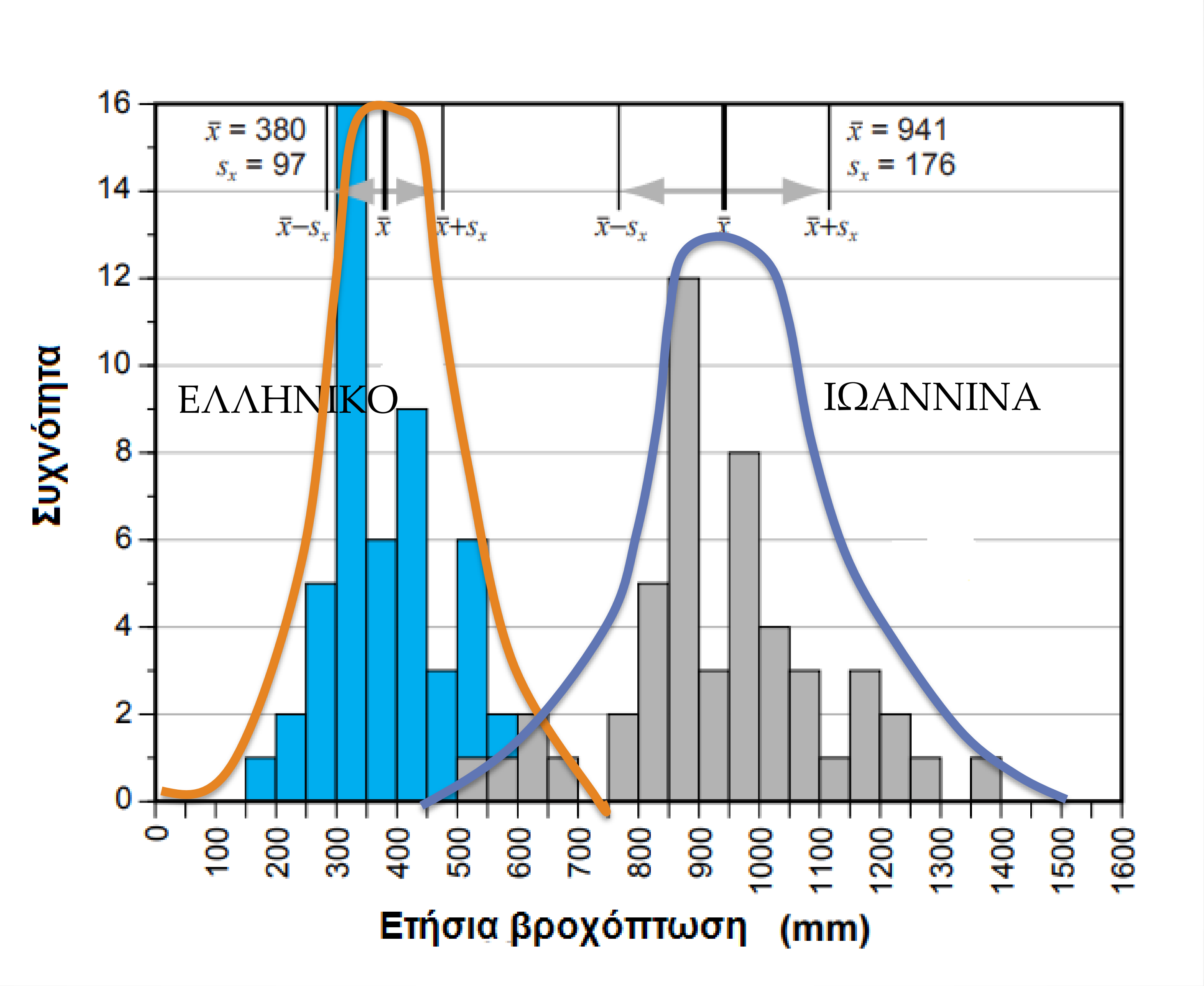
Βροχόπτωση	Έτος
1013	1955
787	1956
1074	1957
1069	1958
1044	1959
729	1960
427	1961
866	1962
1433	1963
1237	1964
1120	1965
1087	1966
1229	1967
869	1968
823	1969
1179	1970
988	1971
947	1972
1285	1973
1138	1974
864	1975

	Frequency	*Cumulative %*
700	1	3.45%
800	3	13.79%
900	6	34.48%
1000	3	44.83%
1100	6	65.52%
1200	5	82.76%
1300	4	96.55%
More	1	100.00%



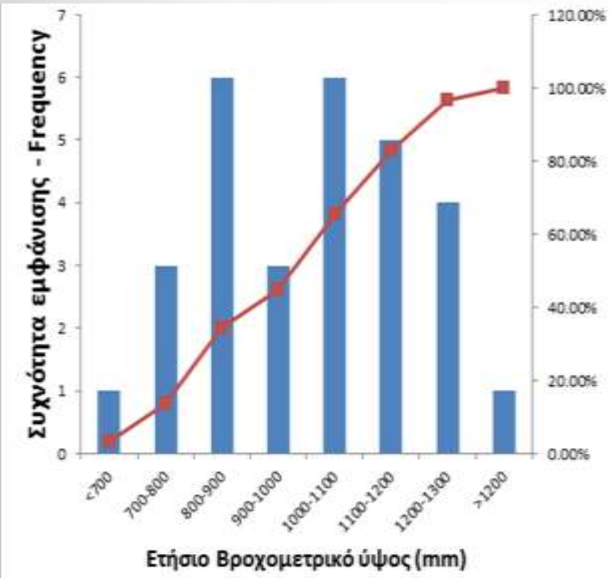
Αυτό μπορούμε να το πάρουμε γρήγορα και με το HISTOGRAM -εργαλείο του Excell- που βρίσκεται στα tools στο DATA (δεδομένα – εργαλεία).

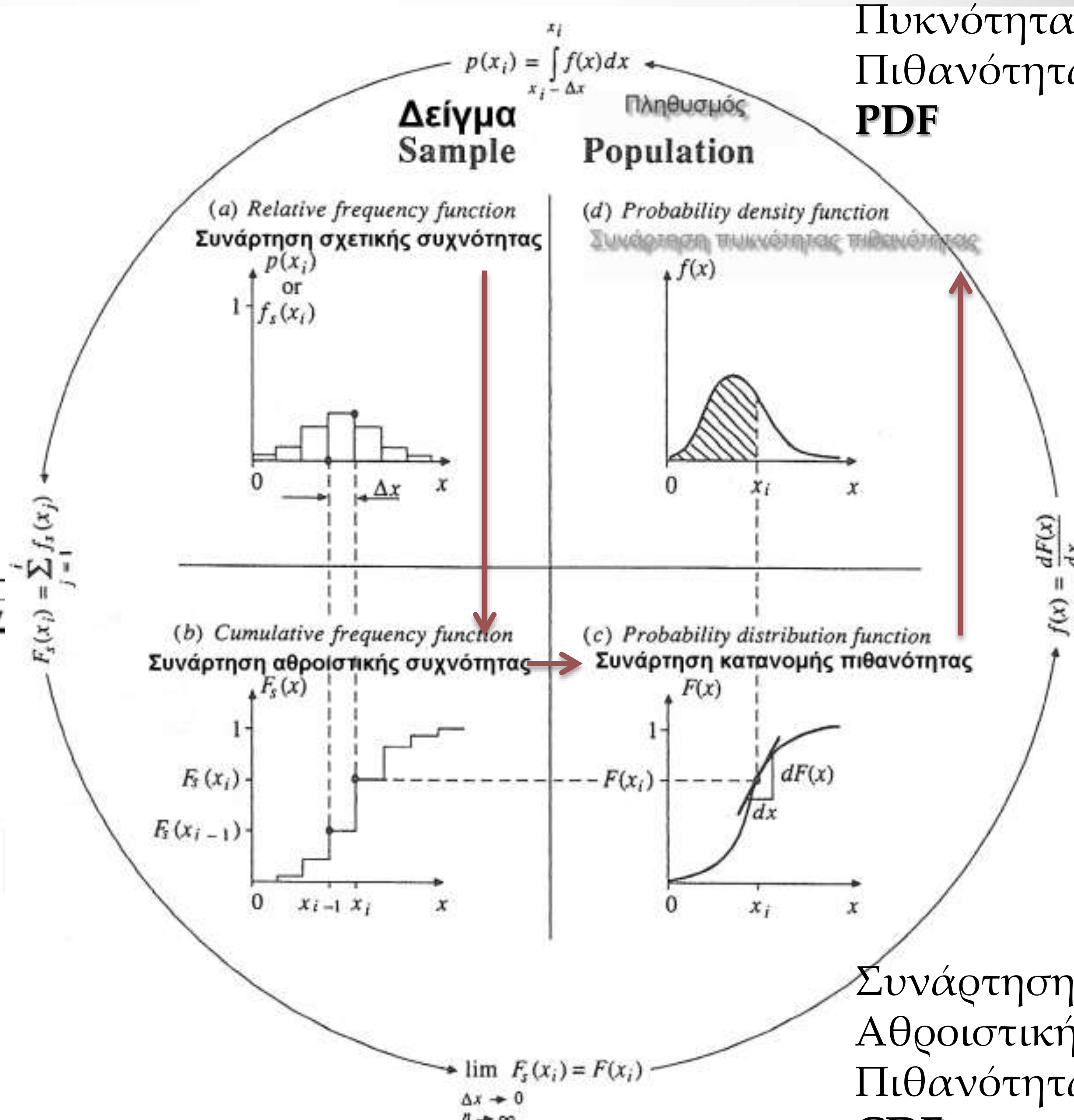
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ετήσια βροχόπτωση σε σταθμό.



ιστογράμματα συχνοτήτων. Οι περιοχές μεταξύ των τιμών λέγονται **κλάσεις**.

Από το δείγμα στον πληθυσμό.





Συνάρτηση
Πυκνότητας
Πιθανότητας
PDF

Συνάρτηση
Αθροιστικής
Πιθανότητας
CDF

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

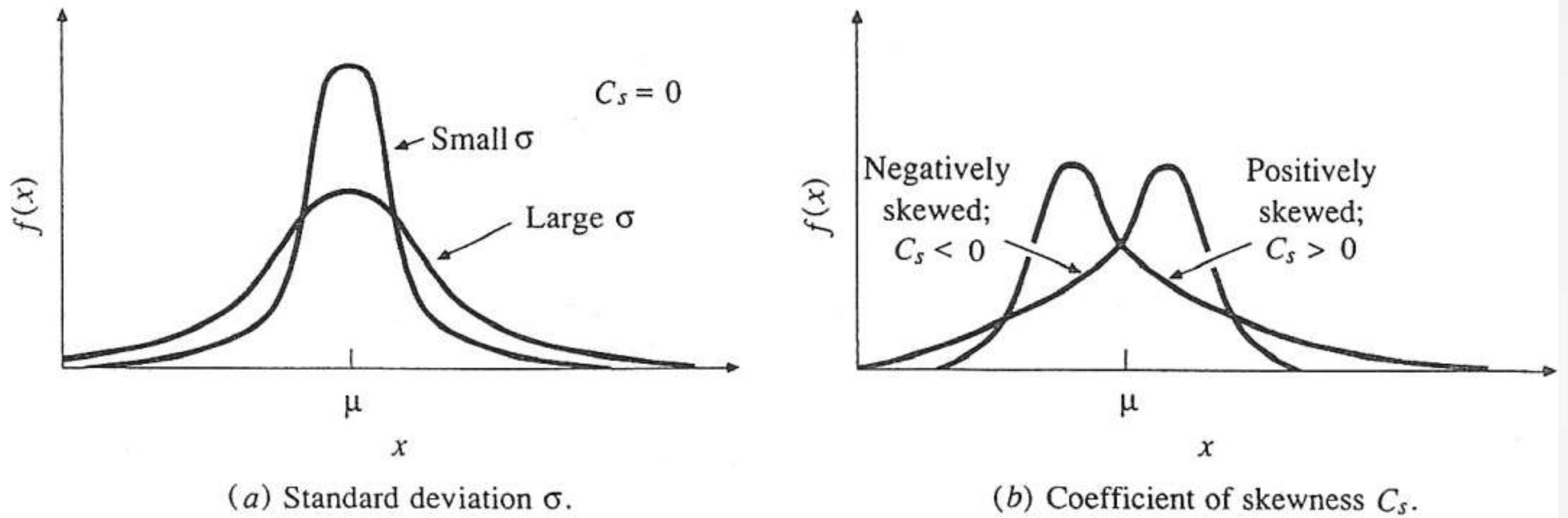
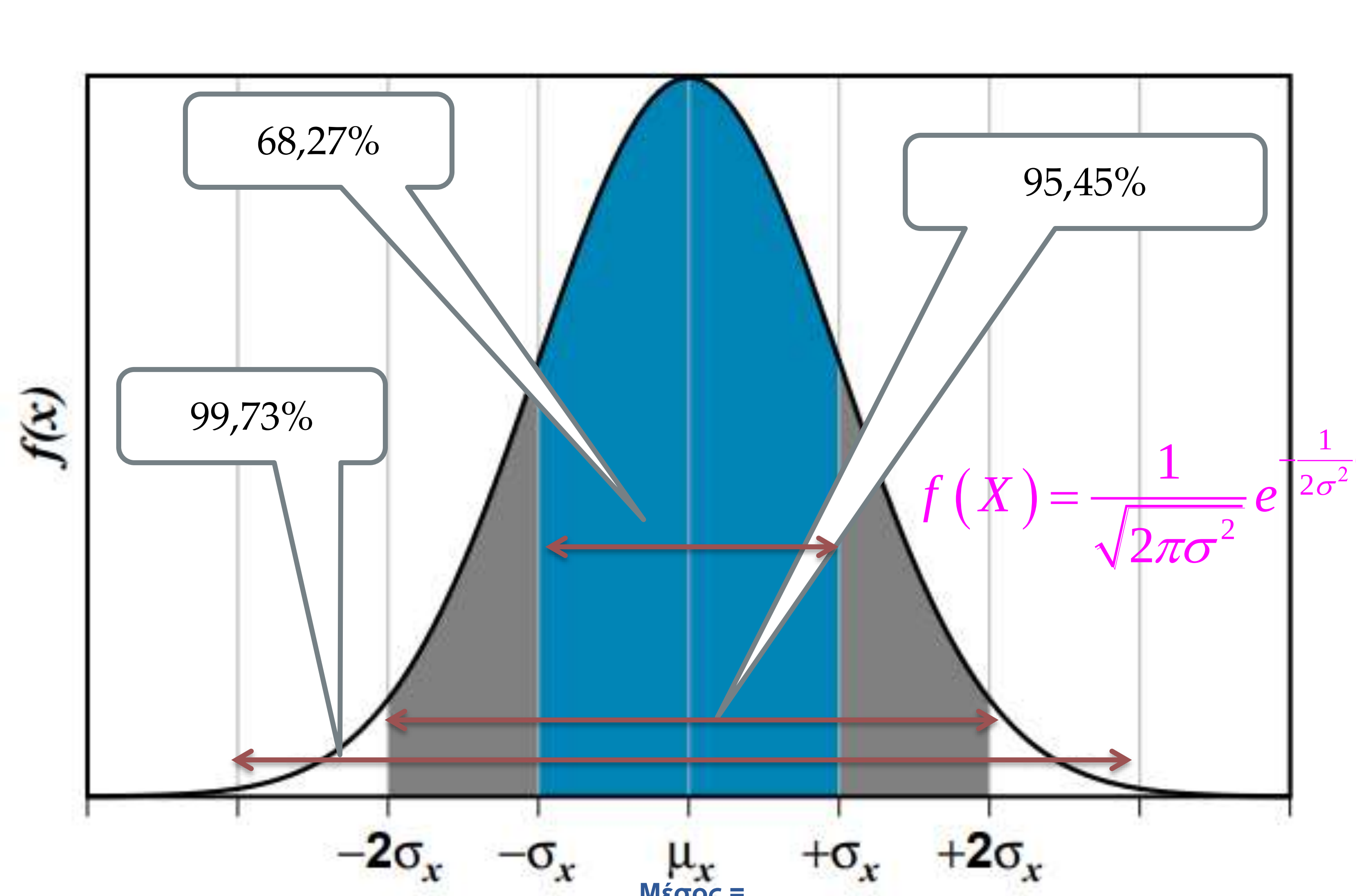


FIGURE 11.3.1
The effect on the probability density function of changes in the standard deviation and coefficient of skewness.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (GAUSS)

- Διπαραμετρική, με παραμέτρους τον μέσο **μ** και την τυπική απόκλιση **σ**.
- (όταν έχουμε **δείγμα** του πληθυσμού χρησιμοποιούμε τα λατινικά **m** , **s**)



$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$$

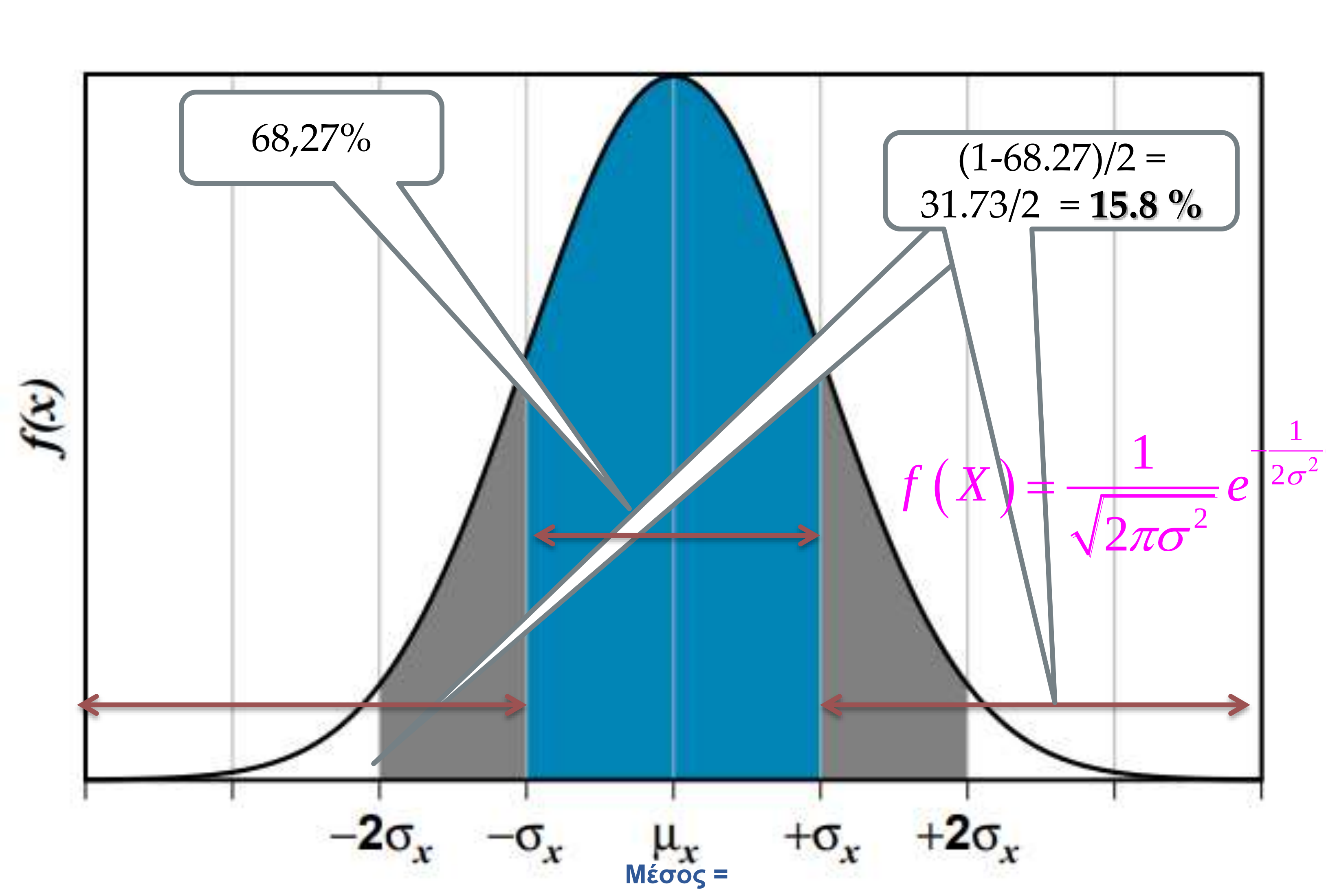
Μέσος =

Διάμεσος =

Τύπος

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ (GAUSS)

- Διπαραμετρική, με παραμέτρους τον μέσο **μ** και την τυπική απόκλιση **σ**.
- (όταν έχουμε **δείγμα** του πληθυσμού χρησιμοποιούμε τα λατινικά **m** , **s**)



$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}$$

Μέσος =

Διάμεσος =

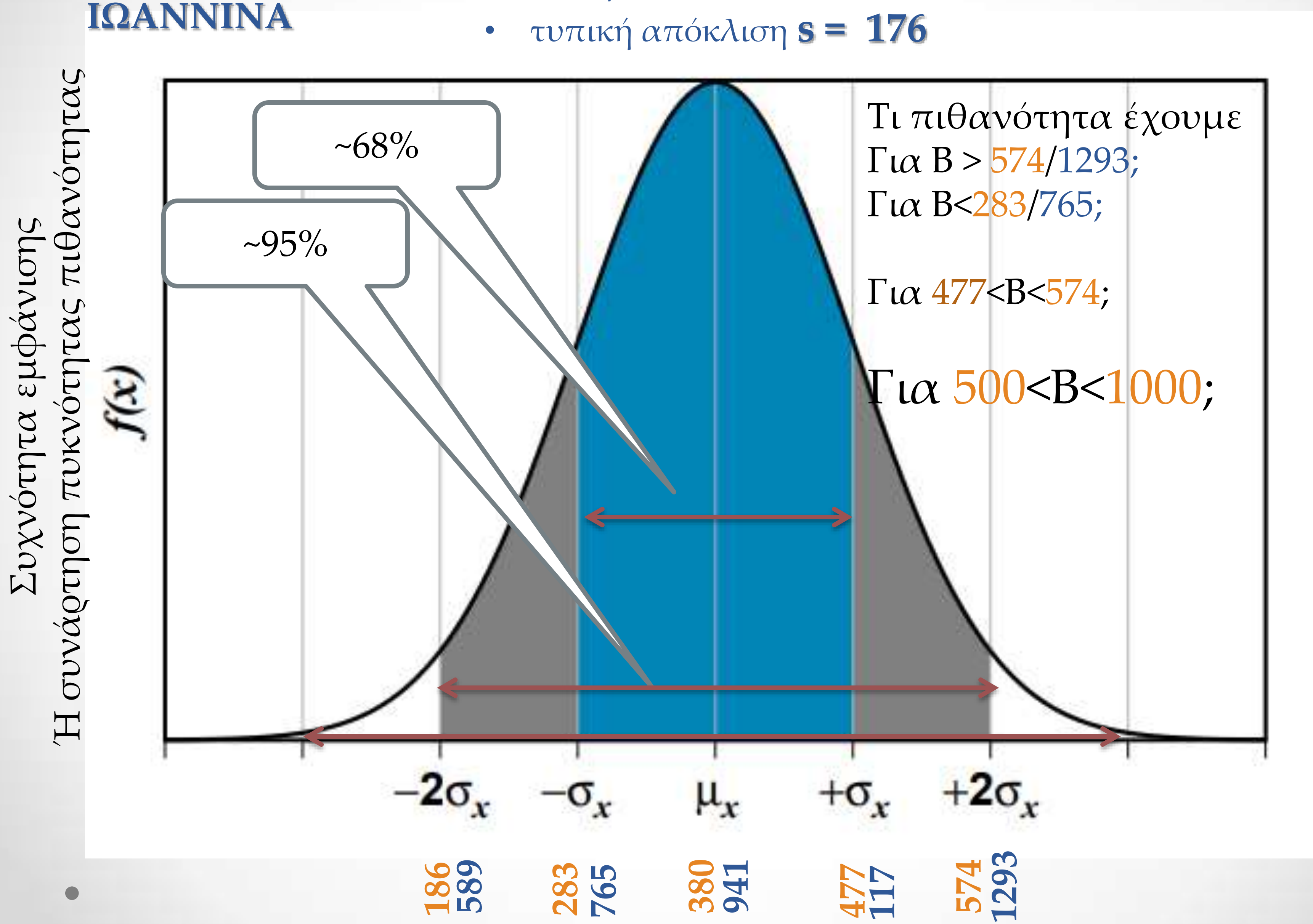
Τύπος

ΕΛΛΗΝΙΚΟ

- μέσος **m = 380**
- τυπική απόκλιση **s = 97**

ΙΩΑΝΝΙΝΑ

- μέσος **m = 941**
- τυπική απόκλιση **s = 176**



Τι πιθανότητα έχουμε

Για B > 574/1293;

Για B<283/765;

Για 477<B<574;

Για 500<B<1000;

συνάρτηση του Excell **NORMDIST.**

[σύνταξη:NORMDIST(X,μ,σ, TRUE)] True = CDF , False = PDF

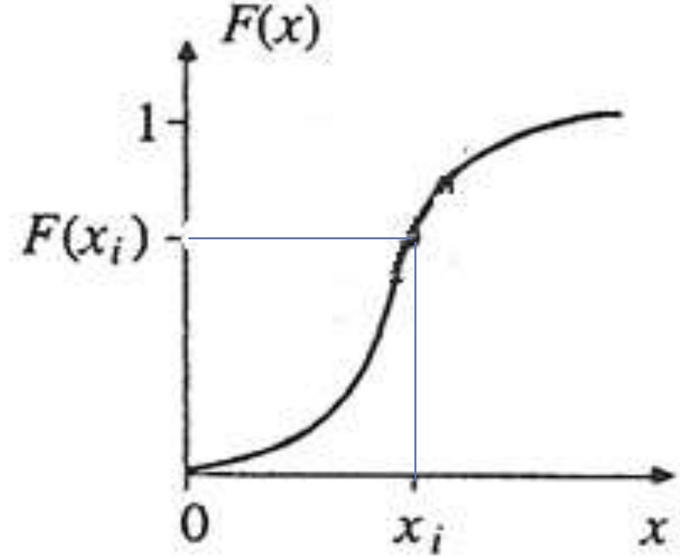
Τι μας δίνει η **NORMDIST?**

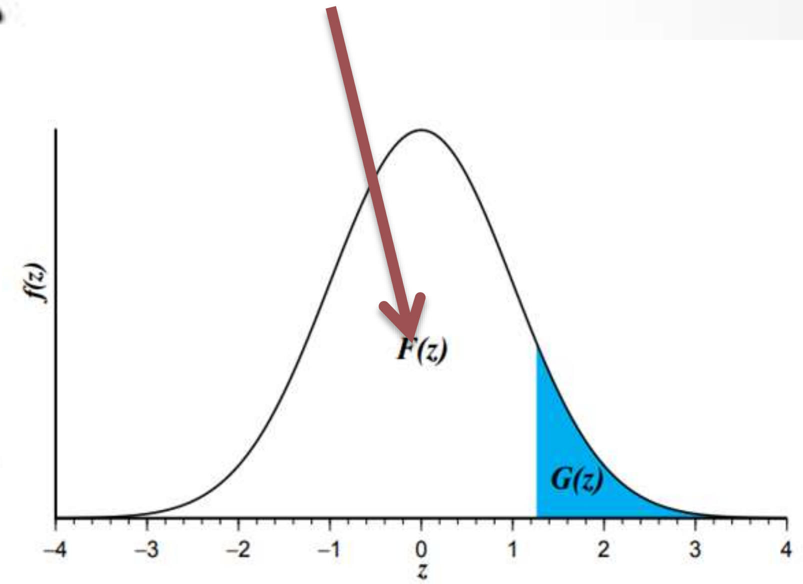
(το α είναι το x_i)

CDF = $F(x_i)$ = εμβαδόν της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (PDF) έως και το α

(c) *Probability distribution function*

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας



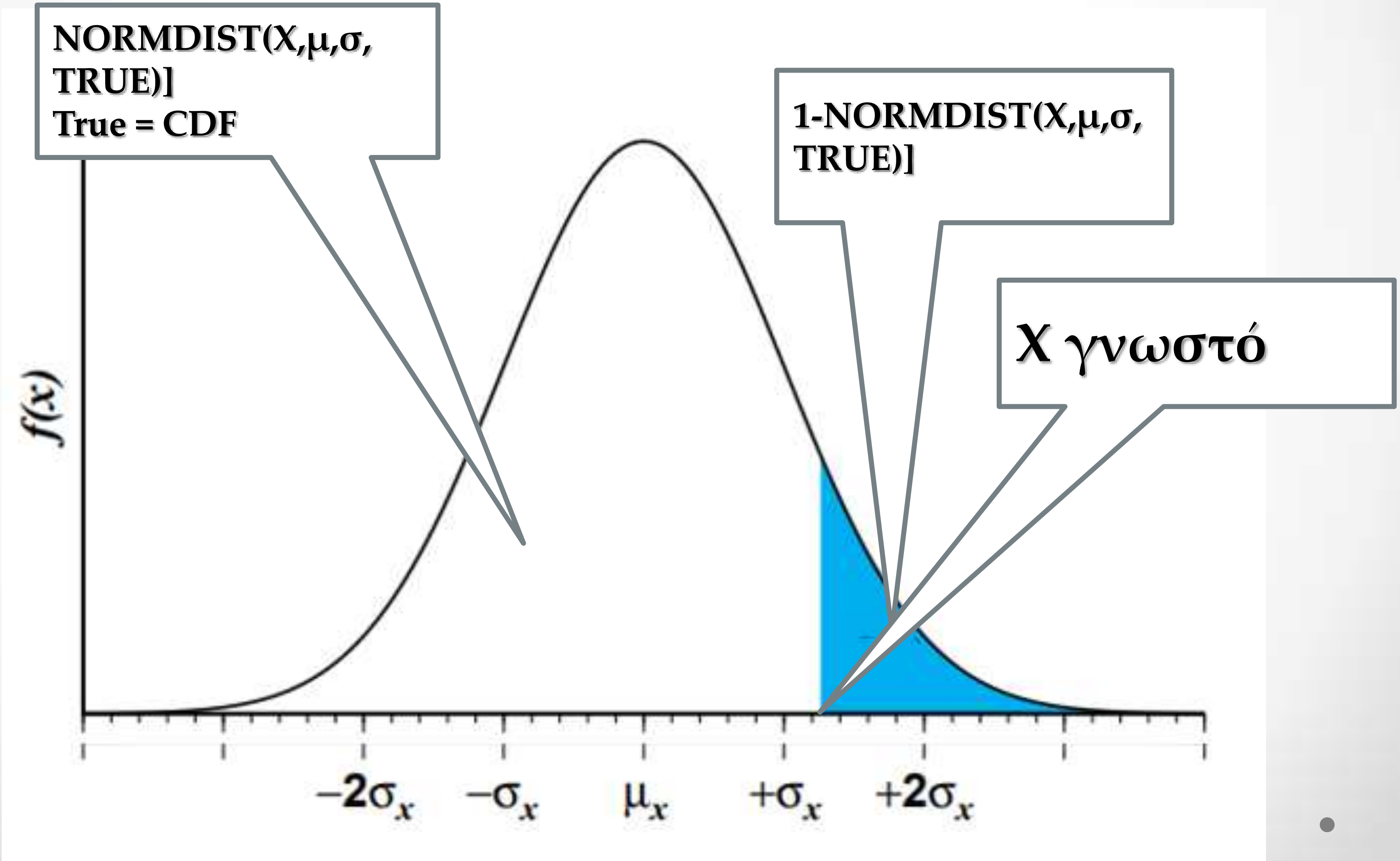


$$F(a) = P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

(τι ποσοστό του εμβαδού αφήνει **<u>αριστερά</u>**)

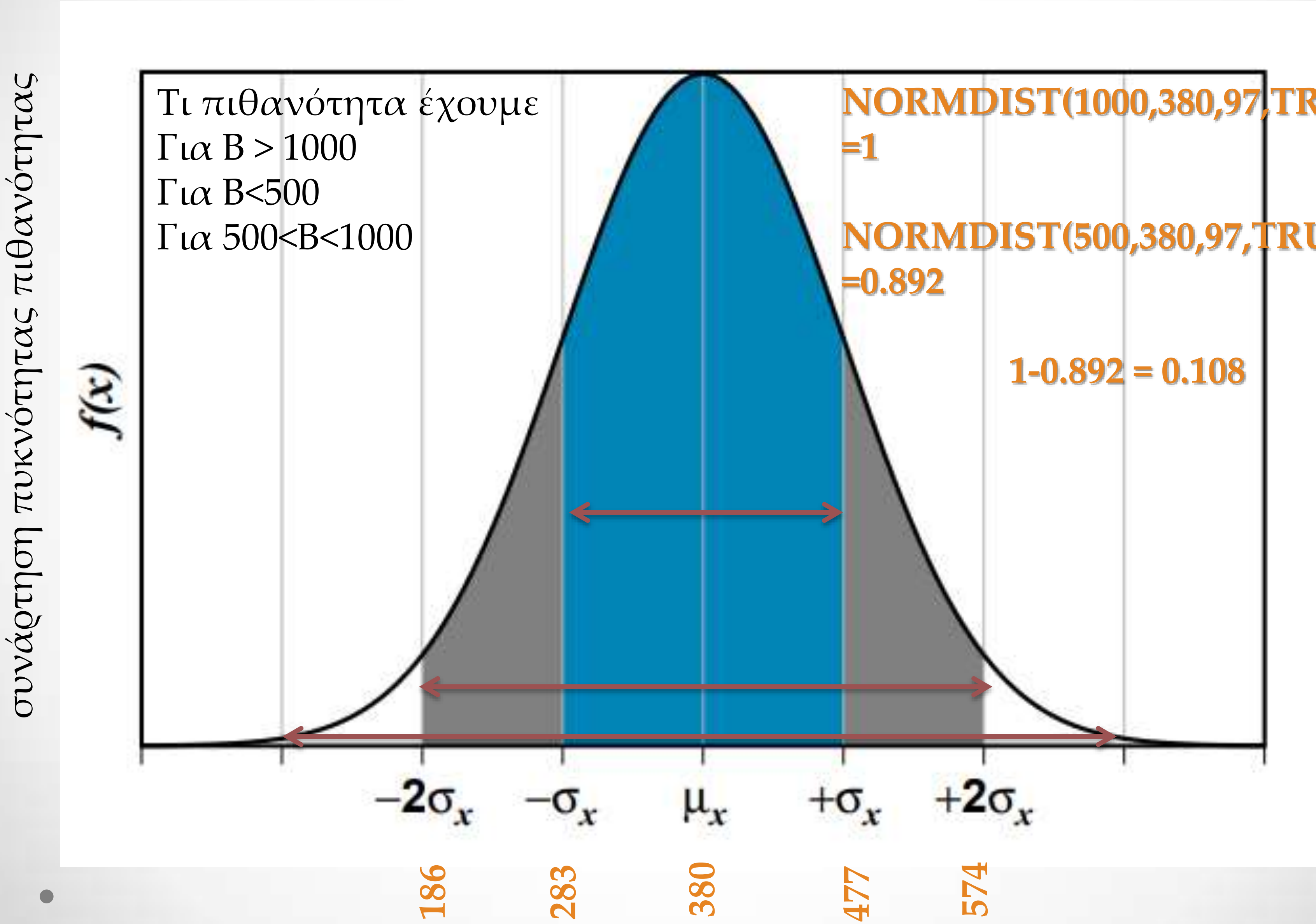
ΕΥΘΕΙΑ ΕΡΩΤΗΣΗ δεδομένη τιμή του X, τι ποσοστό του εμβαδού αφήνει αριστερά

συνάρτηση του Excell **NORMDIST.**
[σύνταξη:NORMDIST(X,μ,σ, TRUE)]
True = CDF , False = PDF



- μέσος **m = 380**
- τυπική απόκλιση **s = 97**

Η συνάρτηση του Excell **NORMDIST.**
[σύνταξη:NORMDIST(X,μ,σ, TRUE)]
True = cdf , False = pdf



Τι πιθανότητα έχουμε
Για Β > 1000
Για Β<500
Για 500<Β<1000

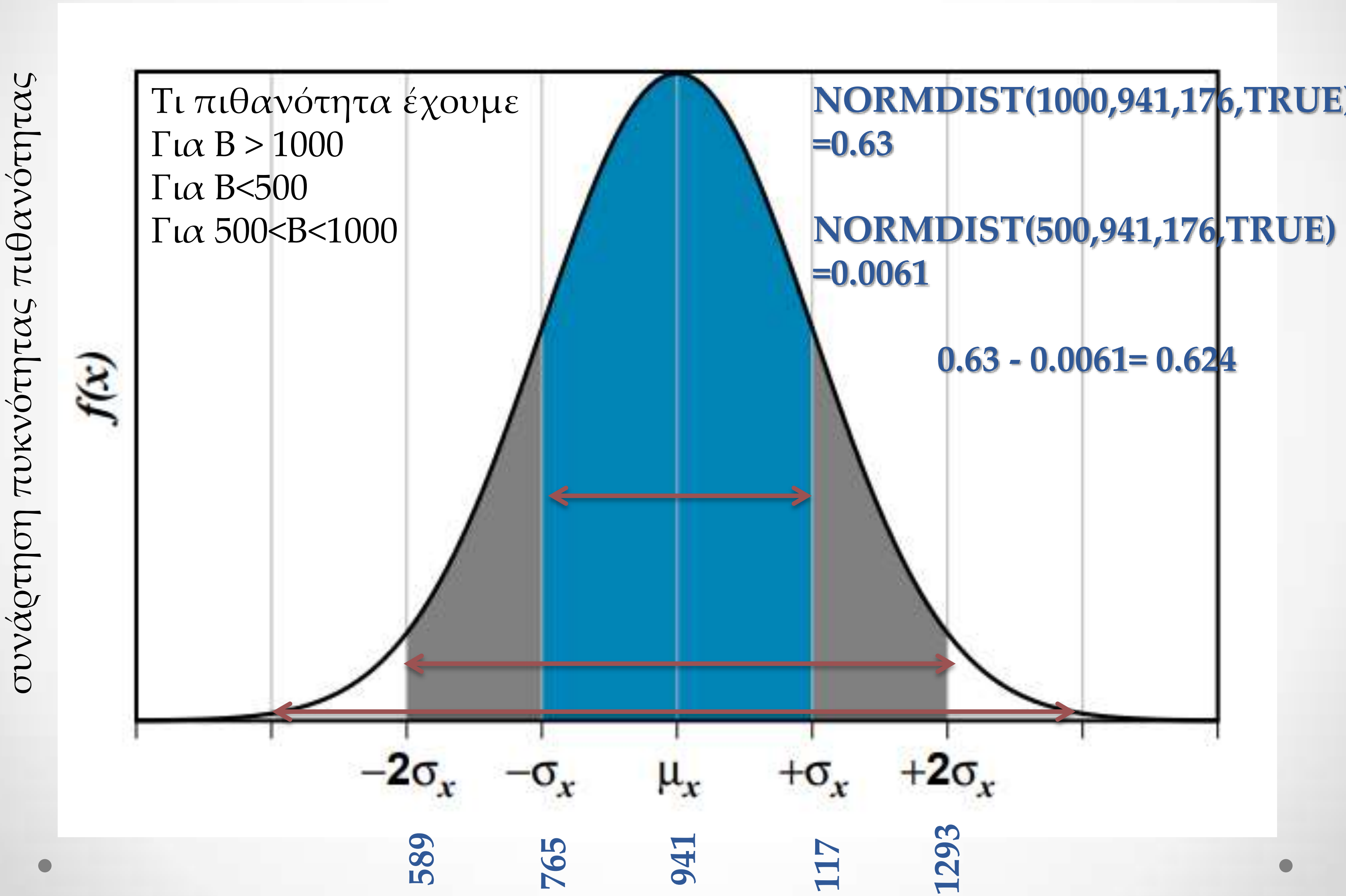
NORMDIST(1000,380,97,TRUE)
=1

NORMDIST(500,380,97,TRUE)
=0.892

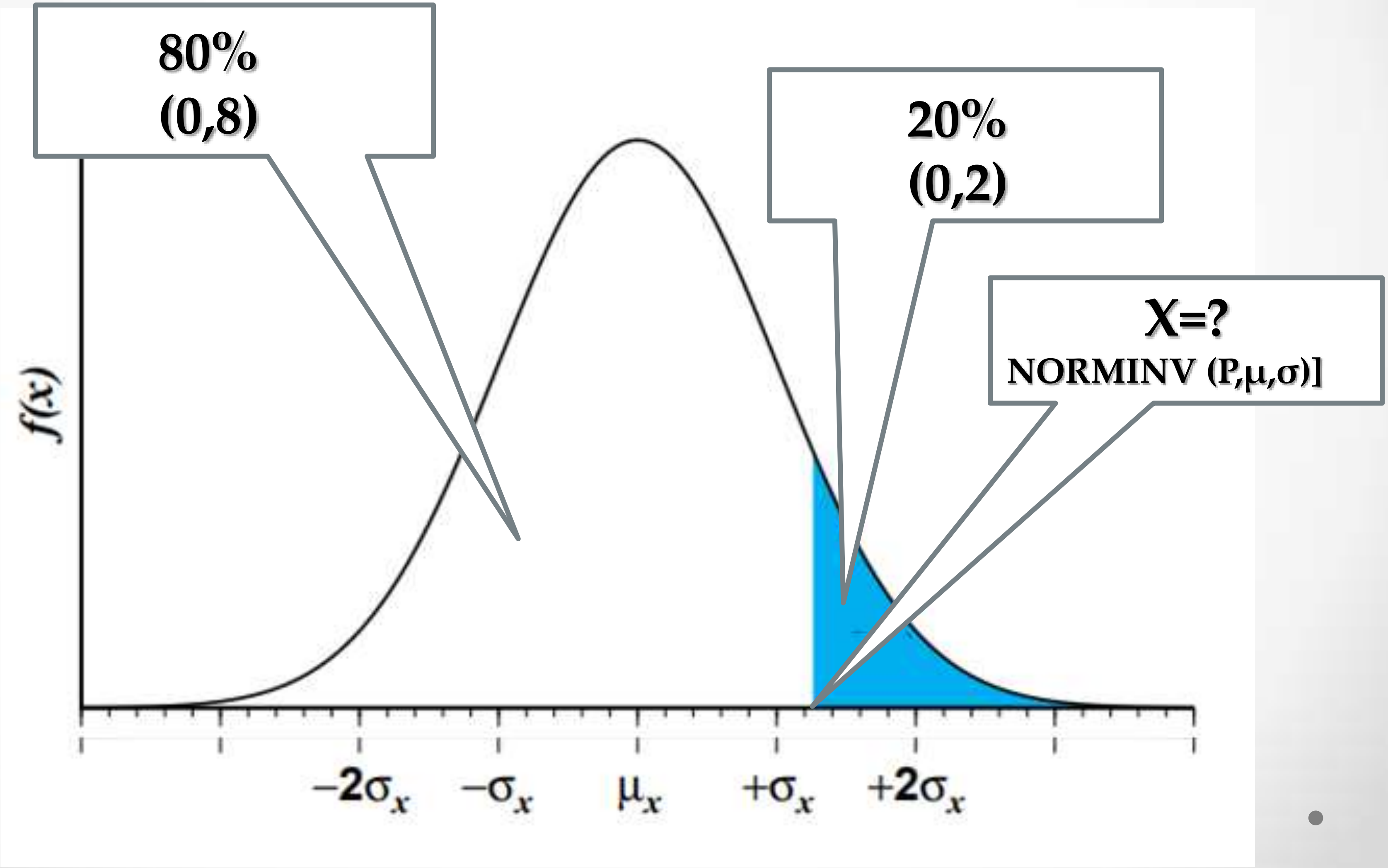
1-0.892 = 0.108

- μέσος **m = 941**
- τυπική απόκλιση **s = 176**

Η συνάρτηση του Excell **NORMDIST.**
[σύνταξη:NORMDIST(X,μ,σ, TRUE)]
True = cdf , False = pdf



ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΕΡΩΤΗΣΗ θέλουμε την τετμημένη (τιμή του χ) που αφήνει δεξιά πχ το 20% (ή αριστερά το 80%) του εμβαδού.
συνάρτηση του Excell **NORMINV (ποσοστό,μέσος,τυπική απόκλιση) [σύνταξη:NORMINV (P,μ,σ)]**



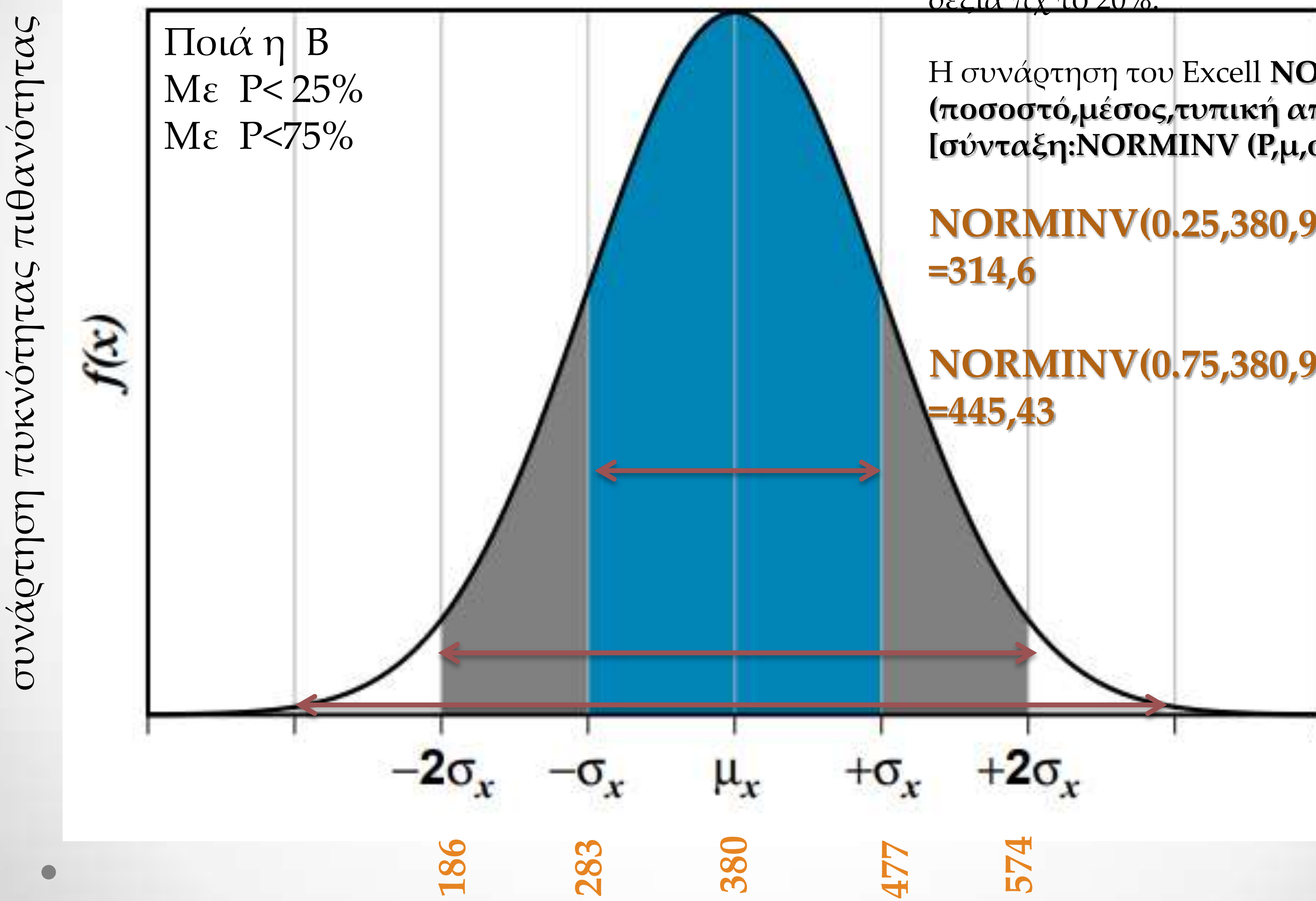
- μέσος **m = 380**
- τυπική απόκλιση **s = 97**

Η **αντίστροφη ερώτηση** είναι όταν με γνωστό το ποσοστό εμφάνισης ψάχνουμε την τιμή του Χ.(αντίστροφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) Εδώ γυρεύουμε το αντίστροφο, θέλουμε την τετμημένη (τιμή του χ) που αφήνει δεξιά πχ το 20%.

Η συνάρτηση του Excell **NORMINV (ποσοστό,μέσος,τυπική απόκλιση) [σύνταξη:NORMINV (P,μ,σ)]**

NORMINV(0.25,380,97) =314,6

NORMINV(0.75,380,97) =445,43

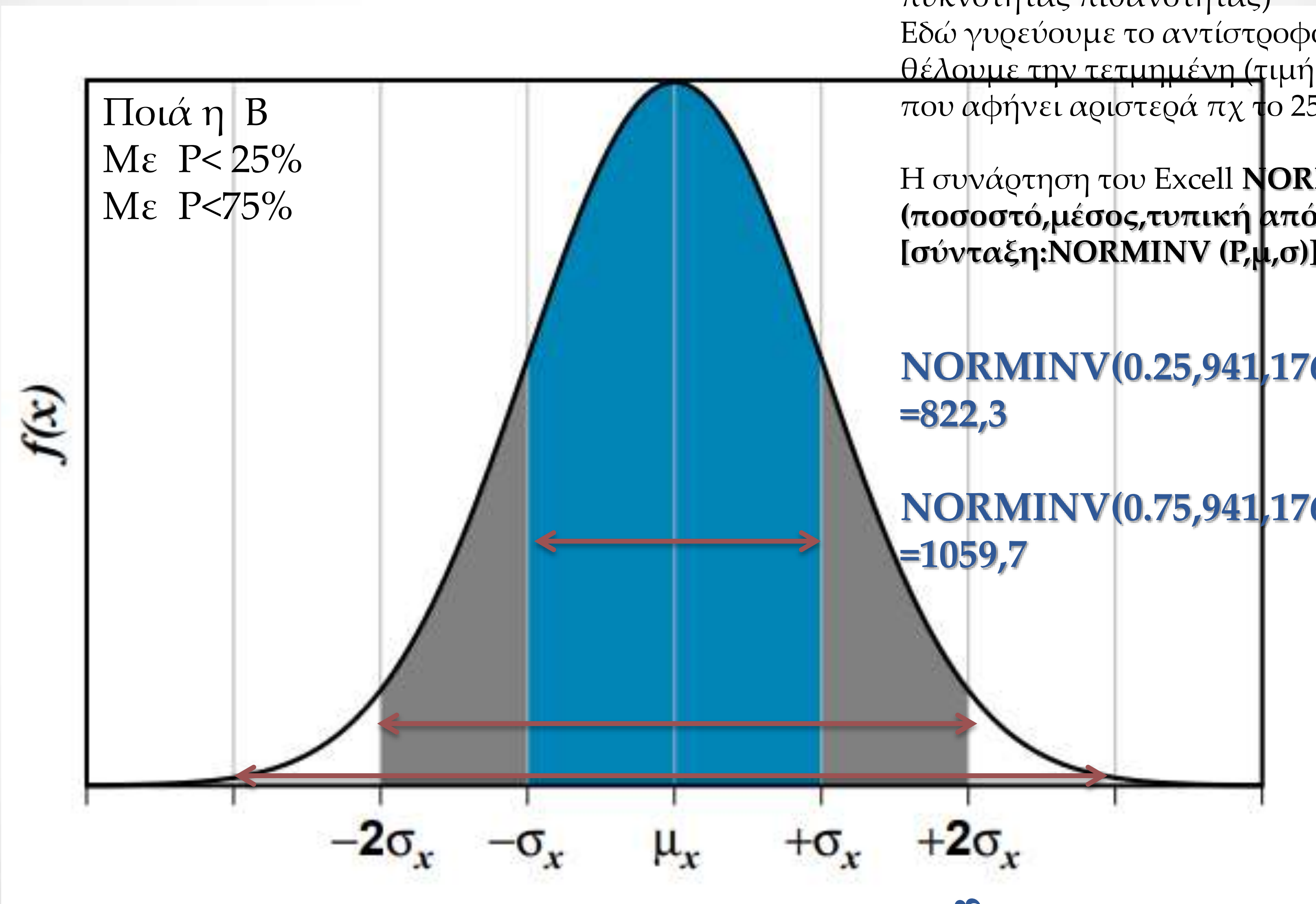


- μέσος **m = 941**
- τυπική απόκλιση **s = 176**

Η **αντίστροφη ερώτηση** είναι όταν με γνωστό το ποσοστό εμφάνισης ψάχνουμε την τιμή του X.(αντίστροφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας)
Εδώ γυρεύουμε το αντίστροφο, θέλουμε την τετμημένη (τιμή του χ) που αφήνει αριστερά πχ το 25%.

Η συνάρτηση του Excell **NORMINV (ποσοστό,μέσος,τυπική απόκλιση) [σύνταξη:NORMINV (P,μ,σ)]**

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας



Ποιά η Β
Με P< 25%
Με P<75%

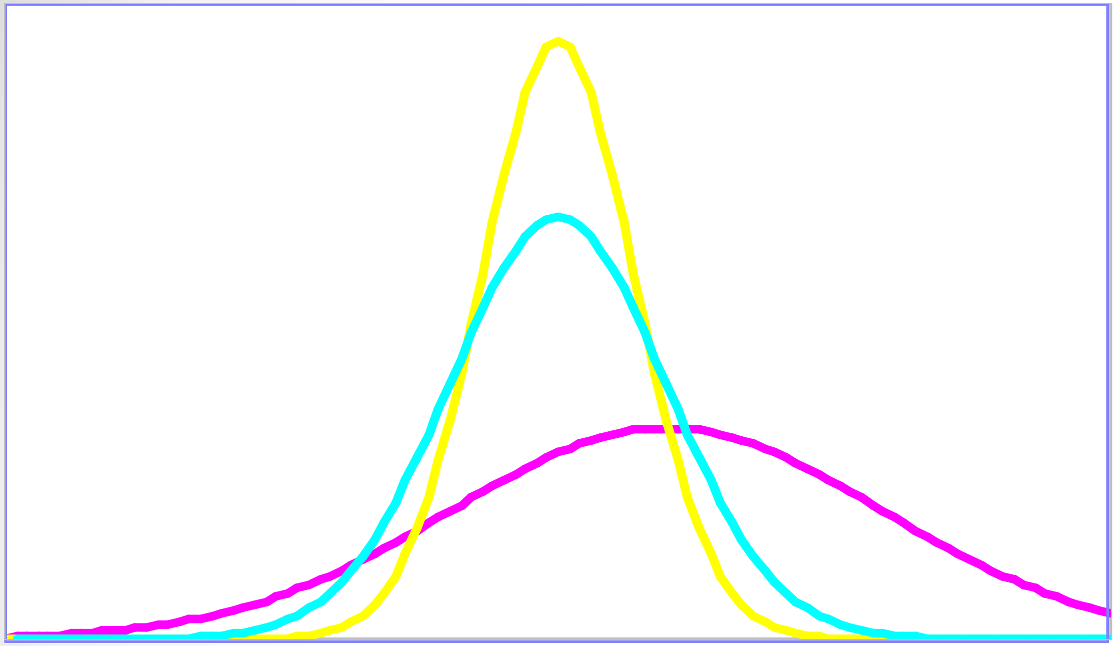
NORMINV(0.25,941,176) =822,3

NORMINV(0.75,941,176) =1059,7

589 765 941 117 1293

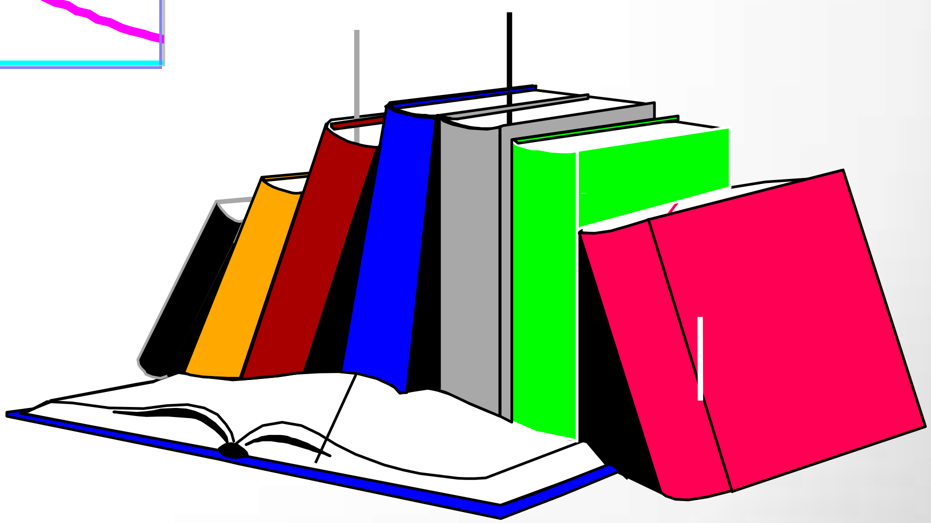
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ετήσια βροχόπτωση σε σταθμό.

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.



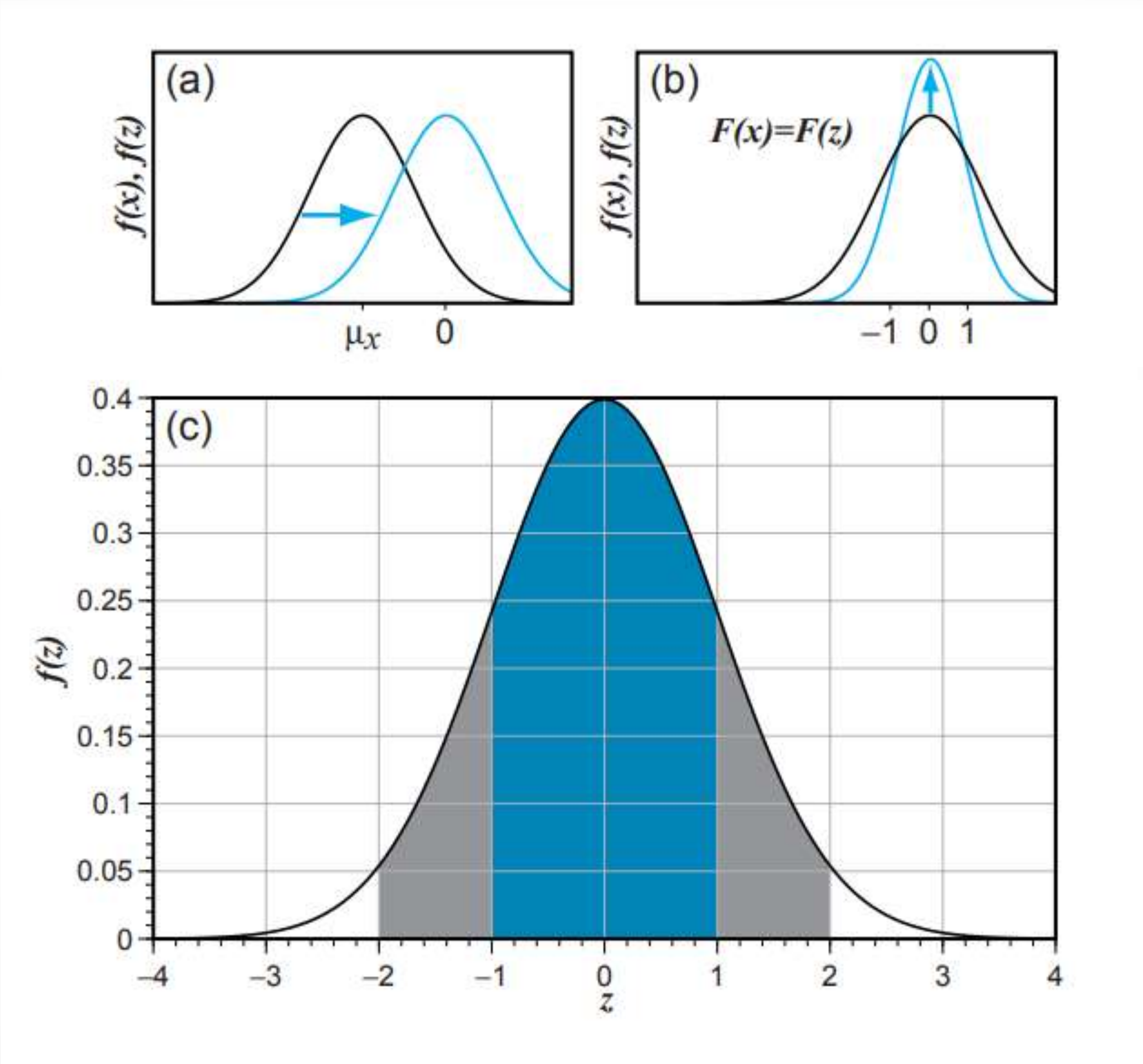
Όπως είναι φανερό υπάρχουν άπειρες κανονικές κατανομές ανάλογα με το μ και το σ.

Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε άπειρους πίνακες κανονικής κατανομής?



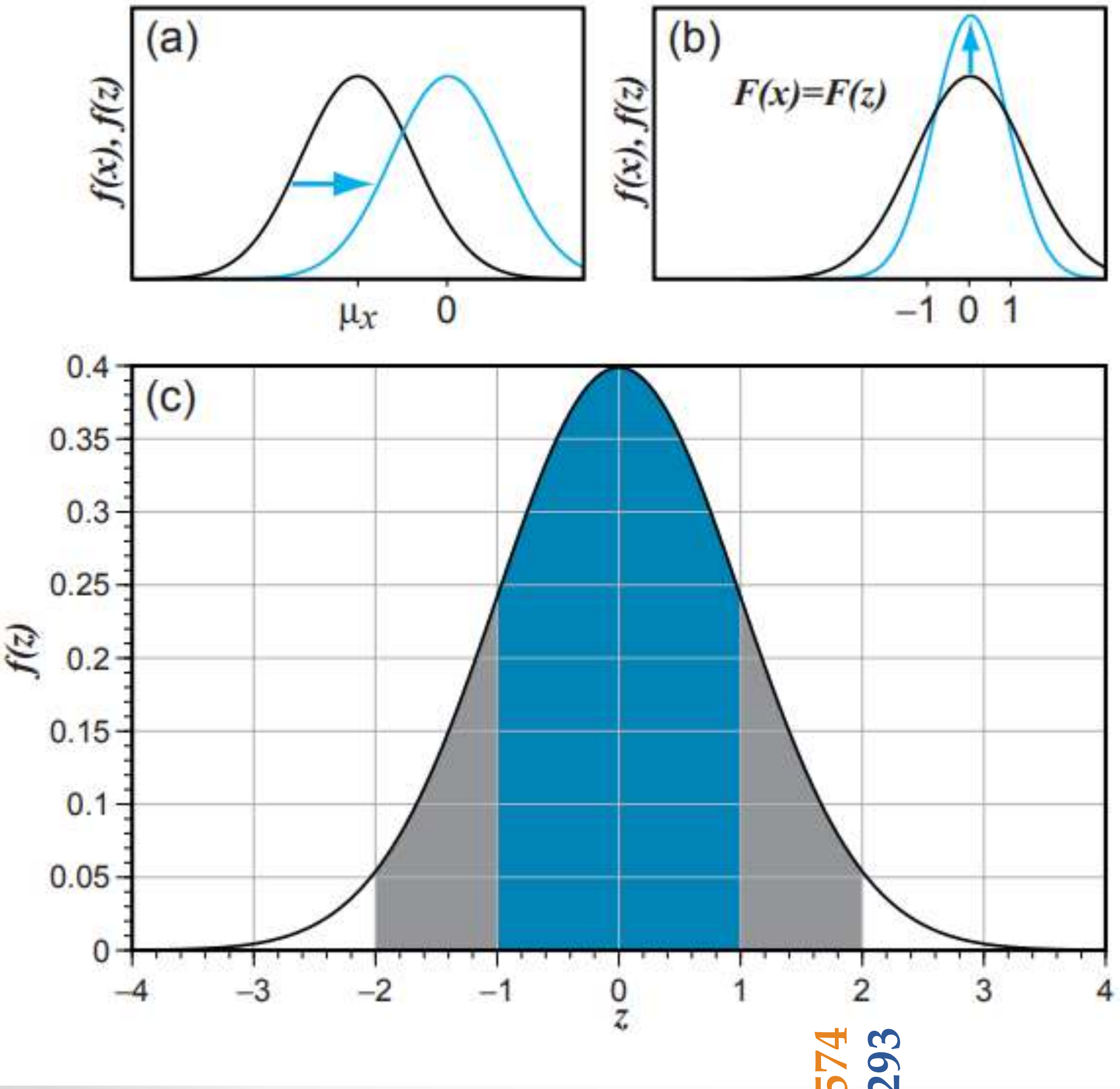
ΛΥΣΗ: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΕ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

νέα μεταβλητή **z**, **$z = (x-\mu)/\sigma$**



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ετήσια βροχόπτωση σε σταθμό.

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.



ΛΥΣΗ: μετασχηματισμός της κατανομής σε **τυποποιημένη** καν.κατ. με **μέσο 0** και **τυπική απόκλιση 1**.

Δημιουργούμε τη νέα μεταβλητή **z** με τον εξής μετασχηματισμό

$$z = (x-\mu)/\sigma$$

συνάρτηση του Excell

STANDARDIZE (Χ,μ,σ)

STANDARDIZE (1293, 941,176) = 2

STANDARDIZE (574, 380,97) = 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ετήσια βροχόπτωση σε σταθμό.

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.

Δημιουργούμε μια νέα μεταβλητή **z** με τον εξής μετασχηματισμό

$$\mathbf{z = (x\text{-}\mu)/\sigma}$$

- μέσος **m = 380**
- τυπική απόκλιση **s = 97**
- μέσος **m = 941**
- τυπική απόκλιση **s = 176**

- $z = (x-380) / 97$
- $z = (x-941) / 176$

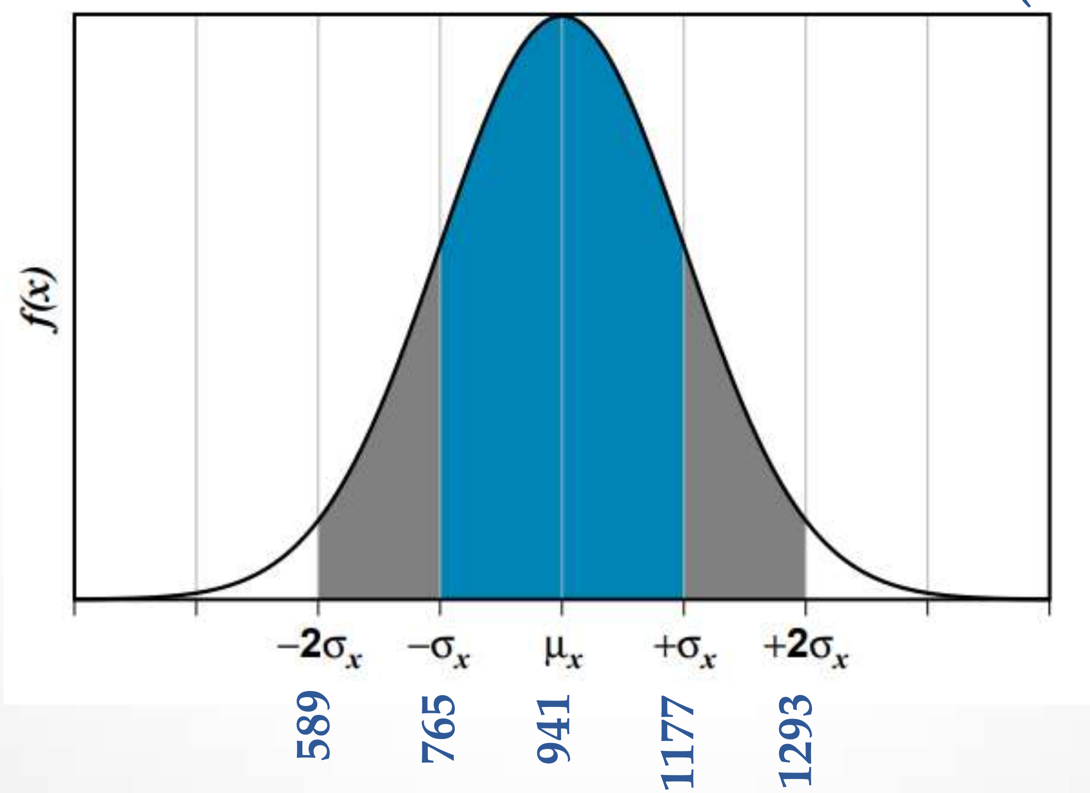
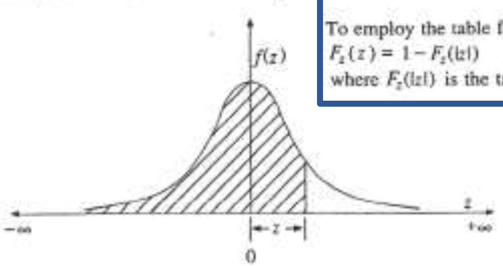


TABLE 11.2.1
Cumulative probability of the standard normal distribution

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Source: Grant, E. L., and R. S. Leavenworth, *Statistical Quality and Control*, Table A, p.643, McGraw-Hill, New York, 1972. Used with permission.



To employ the table for $z < 0$, use
$F_z(z) = 1 - F_z(|z|)$
where $F_z(|z|)$ is the tabulated value.

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ Καν.Κατ.:

Ερώτημα: Τι πιθανότητα υπάρχει η ΕΒ στοΕλληνικό/Ιωάννινα να είναι ≤700χιλ.

Πρώτο βήμα: υπολογίζουμε τον μέσο και την τυπική απόκλιση απο τους τύπους:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}{n-1}}$$

m= 380 ,s= 97

m= 941 ,s= 176

Δεύτερο βήμα: υπολογίζουμε την τιμή της z (τυποποιημένης κ.κ.) από τον τύπο:

$$z = \frac{a - \overline{x}}{s_x}$$

- **z =700- 380 / 97 = 3.3**
- **z = 700-941 /176=-1.37**

Τρίτο βήμα: αναζητούμε το z στον πίνακα (πρώτο δεκαδικό ->στήλη δεύτερο δεκαδικό – > πάνω γραμμή):

Απάντηση:

0.9995 = 99,95%

1-0.914 = 8,6%

TABLE 11.2.1

Cumulative probability of the standard normal distribution

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Περιοδος επαναφοράς – συχνότητα επανεμφάνισης

Έστω ότι ορίζουμε σαν **ακραίο ενδεχόμενο** την εμφάνιση μιάς τυχαίας μεταβλητής Χ* , πχ της ημερήσιας βροχόπτωσης στον βροχομετρικό σταθμό Χ*>88 ίσης ή μεγαλύτερης μιας τιμής Χτ. Η **περίοδος επαναφοράς τ** είναι ο χρόνος ανάμεσα στις εμφανίσεις Χ ≥ Χ*.

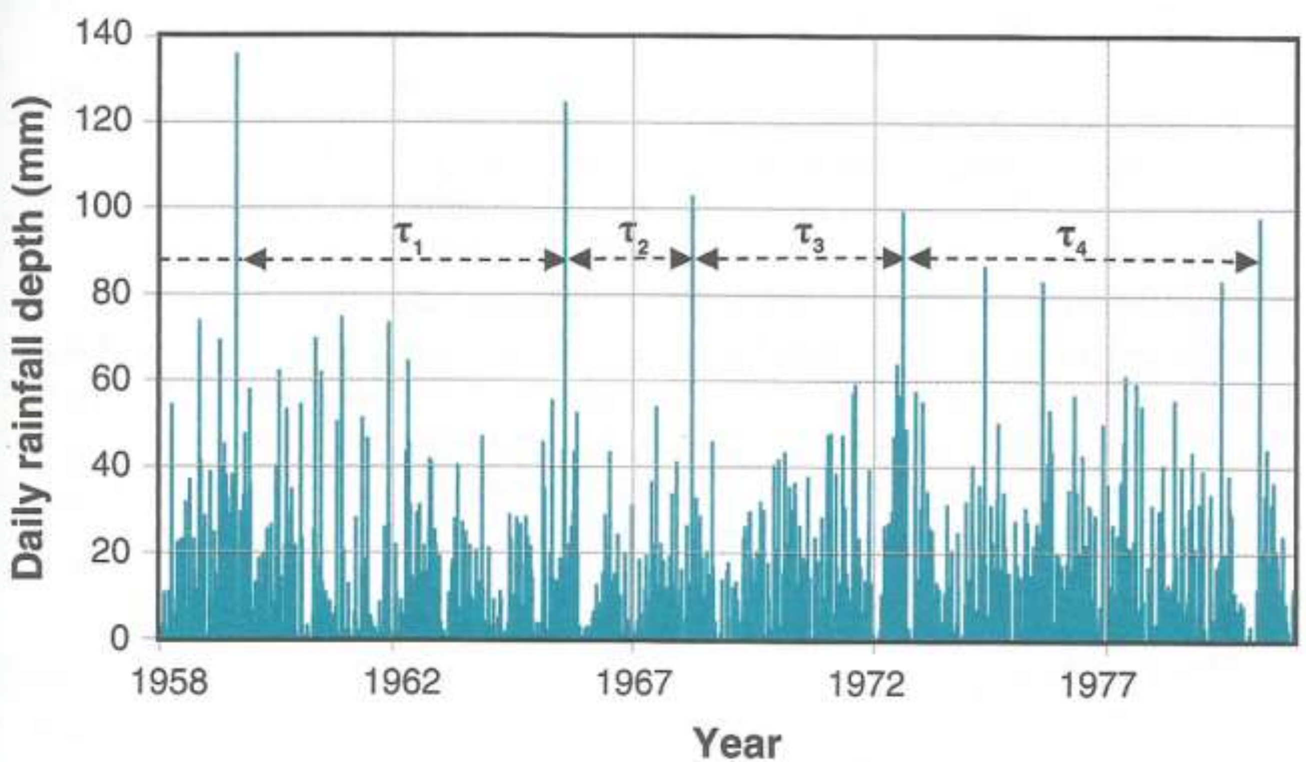


Figure 2.8 Record of daily precipitation depth, X, for the city of Turin. The return period of the extreme value $X^* = 88$ mm d^{-1} (*dashed horizontal line*) is the mean of the recurrence intervals τ_1, τ_2, and so on.

Η περίοδος επαναφοράς Τ του γεγονότος Χ ≥ Χ*, είναι η αναμενόμενη τιμή του τ, της οποίας η μέση τιμή μετριέται για αρκετές φορές εμφάνισης.

Περιοδος επαναφοράς – συχνότητα επανεμφάνισης

Η **πιθανότητα υπέρβασης P**=P(X≥X*), δηλαδή η πιθανότητα η τιμή της τυχ. μεταβλητής X να είναι ίση ή μεγαλύτερη μιας τιμής X*, και η **περίοδος επαναφοράς T**, είναι αντίστροφοι αριθμοί, δηλαδη

$$\mathbf{P = 1/T}$$

Η πιθανότητα η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X να είναι μικρότερη της τιμής X*, ας την ονομάσουμε P' (X<X*), είναι προφανώς συμπληρωματική της P,

$$\mathbf{P(X \geq X^*) + P'(X < X^*) = 1,}$$

και είναι το εμβαδόν της κανονικής καμπύλης στα αριστερά της τιμής X* (αυτή τη τιμή παίρνουμε από την NORMDIST και τους πίνακες).

Μπορούμε και να θυμόμαστε το εξής παραστατικό: Η τιμή που έχει πχ 10% πιθανότητες να ξεπεραστεί είναι αυτή που έχει 90% πιθανότητες να συμβεί.

Διακινδύνευση (risk): Η πιθανότητα ότι ένα ενδεχόμενο T-χρόνων θα συμβεί τουλάχιστον μιά φορά στα N χρόνια. Είναι P = P(X ≥ X*) τουλάχιστον άπαξ στα N χρόνια) = 1-(1-1/T)N

Περιοδος επαναφοράς – συχνότητα επανεμφάνισης

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν μας ζητείται η βροχόπτωση με περίοδο επαναφοράς Τ =20, τότε οι πιθανότητες υπέρβασηςείναι P = 1/T = 1/20 =>

P = 0.05

και οι πιθανότητες να συμβεί

P' = 1-P = 0.95.

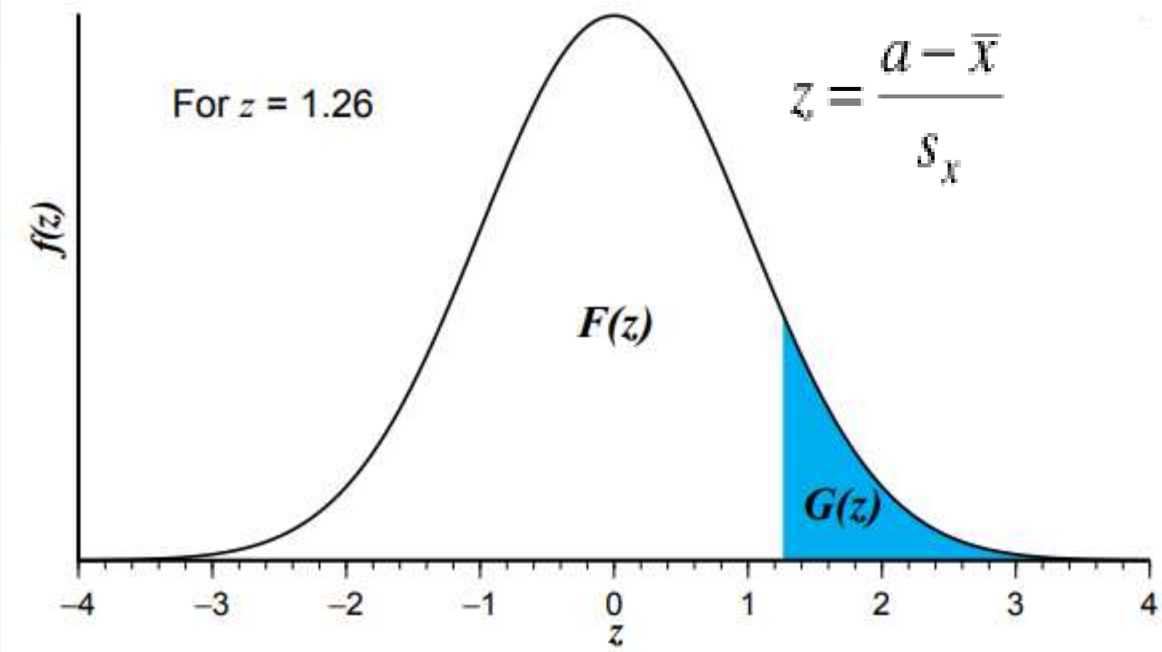
με μέσο **m = 380** και τυπική απόκλιση **s = 97**, χρησιμοποιούμε και πάλι την NORMINV (0.95,380,97) ή πίνακες ως εξής:

Αναζητούμε την τιμή 0,95 μέσα στον πίνακα (η την πιο κοντινή της) **z = 1.65**

α = z*s+m = 1.65*97+380 = **540 mm**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η βροχόπτωση των 20 χρόνων (που ξεπερνιέται κατα μέσο όρο μια φορά στα 20 χρόνια) είναι 540 mm.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μέση ετήσια βροχόπτωση σε σταθμό.



$$z = \frac{a - \bar{x}}{s_x}$$

TABLE 11.2.1
Cumulative probability of the standard normal distrib

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	$\boxed{0.8962}$

Ερώτημα: Αν z = 1.26 πόσο είναι το x (α);

α = z*s+m = 1.26*97+380 = 502.2
α = z*s+m = 1.26*176+941 =1162.8

Περιοδος επαναφοράς – συχνότητα επανεμφάνισης

Ο λόγος που μας ενδιαφέρει η περίοδος επαναφοράς ιδιαίτερα, είναι ότι σε αυτήν τη βάση γίνεται ο σχεδιασμός των αντιπλημμυρικών έργων.

Πίνακας 65. Περίοδοι επαναφοράς βροχόπτωσης μελέτης – Όρια κατάκλυσης οδοστρώματος οδικών έργων (ΟΜΟΕ)

Χαρακτηριστικά οδού	*Κατηγορία*	*Συχνότητα βροχόπτωσης, ανάλογα προς τα έργα (έτη)*			*Όρια κατάκλυσης από πλημμύρα*
		Οχετοί	*Έργα υδροσυλλογής συνδέσεων και τοπικών αγωγών*	*Κύριοι αγωγοί*	
Κυκλοφορούμενα τμήματα οδών, κλάδοι κόμβων και άλλα τμήματα ίδιας σημασίας	Αυτοκινητόδρομοι	50	10	50	Χωρίς κατάκλυση του οδοστρώματος
	Εθνικές & Επαρχιακές οδοί	50	10	25	Χωρίς κατάκλυση του οδοστρώματος
	Αστικές ελεύθερες λεωφόροι	—	10	50	Χωρίς κατάκλυση των λωρίδων κυκλοφορίας*
	Ταχείες λεωφόροι και άλλες αρτηριακές αστικές οδοί	—	10	25	Κατάκλυση το πολύ μέχρι το μισό πλάτος μιας λωρίδας κυκλοφορίας
Κυκλοφορούμενα τμήματα οδών και κλάδοι κόμβων και άλλα τμήματα ίδιας σημασίας σε βαθιά σημεία και σε ταπεινωμένα τμήματα που απαιτούν άντληση	Αυτοκινητόδρομοι	50	50	50	Χωρίς κατάκλυση του οδοστρώματος
	Εθνικές & Επαρχιακές οδοί	50	25	25	Χωρίς κατάκλυση του οδοστρώματος
	Αστικές ελεύθερες λεωφόροι	—	50	50	Χωρίς κατάκλυση των λωρίδων κυκλοφορίας*
	Ταχείες λεωφόροι και άλλες αρτηριακές αστικές οδοί	—	25	25	Κατάκλυση το πολύ μέχρι το μισό πλάτος μιας λωρίδας κυκλοφορίας
Δευτερεύον δίκτυο	Παράπλευρες οδοί και εγκάρσιες δευτερεύουσες αστικές οδοί – κοινοτικές και λοιπές δευτερεύουσες υπεραστικές οδοί	50	10	10	Κατάκλυση το πολύ μέχρι το μισό πλάτος μιας λωρίδας κυκλοφορίας

* Σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει Λ.Ε.Α. στη θέση όπου γίνεται ο έλεγχος, τότε επιτρέπεται κατάκλυση της λωρίδας κυκλοφορίας σε πλάτος τόσο ώστε το μέγιστο ύψος νερού πλημμύρας στο άκρο της λωρίδας κυκλοφορίας να είναι το πολύ ίσο προς 0,02 m

ΑΛΛΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΤΗΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ

Στην υδρολογική ανάλυση μας ενδιαφέρουν συχνά και οι πιθανότητες εμφάνισης ακραίων τιμών των γεγονότων π.χ. των πλημμυρών.

Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε άλλες σειρές δεδομένων, π.χ την μέγιστη 24ωρη ή 12ωρη ή 10λεπτη βροχόπτωση του κάθε έτους ή την μέγιστη παροχή κάθε έτους. ‘Ομως, μπορούμε να πάρουμε δύο τιμές π.χ από ένα έτος και καμία από άλλο. Αυτές λέγονται μερικές σειρές.

Τα ακραία γεγονότα δεν αποδίδονται με την κανονική κατανομή, μιας και τα ιστογράμματά τους τείνουν να έχουν μακριές «ουρές», δηλαδή έντονη ασυμμετρία.

Σε τέτοιες περιπτώσεις ταιριάζουν άλλες κατανομές από τις οποίες οι κυριώτερες είναι:

1. Lognormal
2. Poisson (exponential) – π.χ χρονικό διάστημα μεταξύ βροχοπτώσεων
3. LogPearson3 (π.χ μέγιστες παροχές σε ποταμούς)
4. Extreme Value Distributions (EV) – τρεις τύποι:
    - EV I Gumbel (π.χ μέγιστη βροχόπτωση)
    - EV II Frechet
    - EV III Weibull

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- APPLIED HYDROLOGY, Chow, Maidment, Mays, McGROW HILL
- Στοιχεία Φυσικής Υδρολογίας, Hornberger et al. ΜΤΦ Σ.Καραλής (**Παράρτημα 3: Βασική Στατιστική στην Υδρολογία**)
- Δείτε επίσης και το worksheet «ιδιότητες κανονικής κατανομής» στο Excell αρχείο **Gauss.xls**