ΠΑΛΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ – ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1. Να βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς των παρακάτω διακριτών συστημάτων

$a)\quad y(k)+0.5y(k-1)=2x(k)$

$b)\quad y(k)+2y(k-1)-y(k-2)=2x(k)-x(k-1)+2x(k-2)$

$c)\quad y(kT)+3y(kT-T)+4y(kT-2T)+5y(kT-3T)=$
$=r(kT)-3r(kT-T)+2r(kT-2T)$

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε τις ζητούμενες συναρτήσεις μεταφοράς αρκεί να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις διαφορών κατά Ζ υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.

$a)\quad y(k)+0.5y(k-1)=2x(k)$

$$Y(z)(1+0.5z^{-1})=2X(z)\quad\Rightarrow\quad H(z)=\frac{2}{1+0.5z^{-1}}=\frac{2z}{z+0.5}\quad(1)$$

$b)\quad y(k)+2y(k-1)-y(n-2)=2x(n)-x(n-1)+2x(k-2).$

$$Y(z)(1+2z^{-1}-z^{-2})=X(z)(2-z^{-1}+2z^{-2})$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{2-z^{-1}+2z^{-2}}{1+2z^{-1}-z^{-2}}=\frac{2z^2-z+2}{z^2+2z-1}\quad(2)$$

$c)\ Y(z)+3Y(z)z^{-1}+4Y(z)z^{-2}+5Y(z)z^{-3}=R(z)-3R(z)z^{-1}+2R(z)z^{-2}\Rightarrow$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{1-3z^{-1}+2z^{-2}}{1+3z^{-1}+4z^{-2}+5z^{-3}}=\frac{z^3-3z^2+2z}{z^3+3z^2+4z+5}\quad(3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. Να βρεθούν οι εξισώσεις διαφορών των συστημάτων με συναρτήσεις μεταφοράς τις $G(z)=\dfrac{z^4+3z^3+2z^2+z+1}{z^4+4z^3+5z^2+3z+2}$ και $H(z)=\dfrac{z}{z^2-1.7z+0.72}$

ΛΥΣΗ

α) $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{1+3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}}{1+4z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+2z^{-4}}$ (1) Οπότε έχουμε

$$Y(z)(1+4z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+2z^{-4})=R(z)(1+3z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})\quad(2)$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ από την (2) προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση διαφορών.

$$y(kT)+4y(kT-T)+5y(kT-2T)+3y(kT-3T)+2y(kT-4T)=$$
$$r(kT)+3r(kT-T)+2r(kT-2T)+r(kT-3T)+r(kT-4T)\quad(3)$$

β) $H(z)=\dfrac{z}{z^2-1.7z+0.72}=z^{-1}\dfrac{1}{1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2}}$ (4)

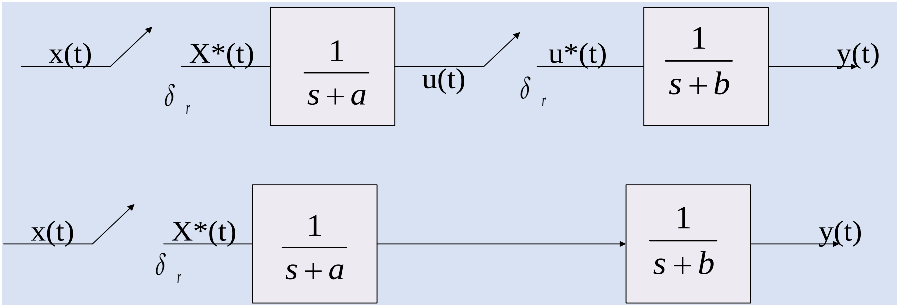
Ισχύει ότι $Y(z)=H(z)U(z)$ επομένως

$(1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2})Y(z)=z^{-1}U(z)$ (5)

Από το πεδίο του μετασχηματισμού Z μεταβαίνουμε στο πεδίο του χρόνου οπότε η ζητούμενη εξίσωση διαφορών του συστήματος δίνεται από τη σχέση (6).

$y_k=1.7y_{k-1}-0.72y_{k-2}+u_{k-1}$ (6)

ΑΣΚΗΣΗ 3. Να βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς των παρακάτω διακριτών συστημάτων και να δειχθεί ότι είναι διαφορετικές.



ΛΥΣΗ

Για το πρώτο σύστημα παρατηρούμε ότι η Σ.Μ του δίνεται από τη σχέση (1):

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=G(z)H(z)=\frac{z}{z-e^{-aT}}.\frac{z}{z-e^{-bT}} \quad (1)$$

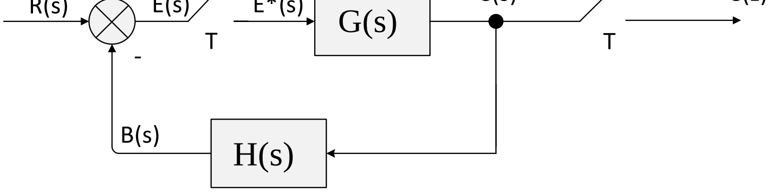
Ενώ για το δεύτερο σύστημα η Σ.Μ του δίνεται από τη σχέση (2):

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=ZT\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right]=ZT\left[\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}\right)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}\right] \quad (2)$$

Τα συστήματα δεν είναι ισοδύναμα διότι οι συναρτήσεις μεταφοράς τους είναι διαφορετικές.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Για το σύστημα του σχήματος να βρεθεί η σχέση που δίνει την έξοδο Y(z) συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος και της εισόδου του.



ΛΥΣΗ

Θα υπολογίσουμε την Y(z) από τις εξισώσεις του μοντέλου του συστήματος.

Από το δομικό διάγραμμα του σχήματος έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&E(s) = R(s) - B(s) \quad (1)\\
&B(s) = H(s)C(s) \quad (2)\\
&C(s) = G(s)E^*(s) \quad (3)\\
&(2) \Rightarrow B(s) = H(s)G(s)E*(s) \quad (4)\\
&(1),(4) \Rightarrow E(s) = R(s) - H(s)G(s)E*(s) \quad (5)
\end{aligned}
$$

Παρατηρώντας τη σχέση (5) βλέπουμε ότι έχουμε τους όρους $E(s)$ και $E^*(s)$ οπότε προκειμένου να βγάλουμε κοινό παράγοντα το $E^*(s)$ πρέπει να μετασχηματίσουμε τη σχέση όπως παρακάτω.

$$
\begin{aligned}
&(5)\overset{*}{\Rightarrow} E^*(s) = R^*(s) - HG^*(s)E^*(s) \Rightarrow\\
&E^*(s) + HG^*(s)E^*(s) = R^*(s) \Rightarrow\\
&E^*(s)\left[1 + HG^*(s)\right] = R^*(s) \Rightarrow\\
&E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \quad (6)
\end{aligned}
$$

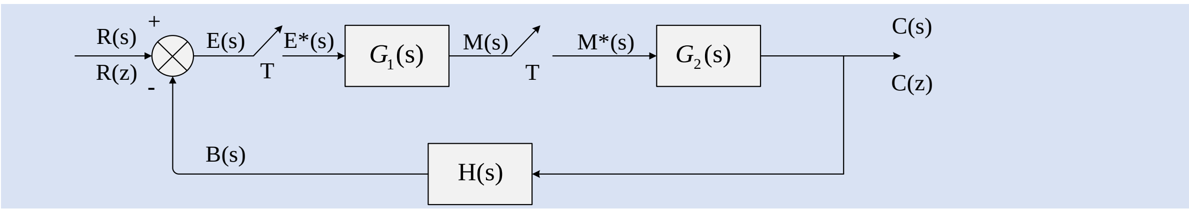
$$(3),(5) \Rightarrow C(s) = G(s)E^*(s)\overset{*}{\Rightarrow} C^*(s) = G^*(s)E^*(s) \Rightarrow E^*(s) = \frac{C^*(s)}{G^*(s)} \ (7)$$

$$(6),(7) \Rightarrow \frac{C^*(s)}{G^*(s)} = \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \Rightarrow C^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)}G^*(s) \quad (8)$$

Μετασχηματίζουμε τη σχέση (8) κατά Ζ οπότε προκύπτει:

$$C(z) = \frac{R(z)}{1 + HG(z)}G(z) \quad (9)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5. Για το σύστημα του σχήματος να βρεθεί η σχέση που δίνει την έξοδο Υ(z) συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος και της εισόδου του.



ΛΥΣΗ

Θα υπολογίσουμε την Υ(z) από τις εξισώσεις του μοντέλου του συστήματος.
Από το δομικό διάγραμμα του σχήματος έχουμε:

$$C(s) = G_2(s)M^*(s) \quad (1)$$
$$M(s) = G_1(s)E^*(s) \quad (2)$$
$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (3)$$
$$B(s) = H(s)C(s) \quad (4)$$
$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (5)$$
$$E(s) = R(s) - H(s)G_2(s)M^*(s) \quad (6)$$

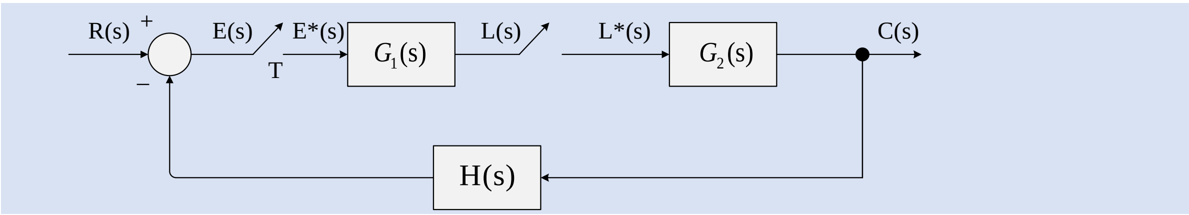
Διακριτοποιούμε την εξίσωση (6) (τοποθετώντας αστεράκια σε όλα τα επιμέρους στοιχεία)

$$C^*(s) = G_2^*(s)M^*(s) \quad (7)$$
$$(2)\overset{*}{\Rightarrow} M^*(s) = G_1^*(s)E^*(s) \Rightarrow M^*(s) = G_1^*(s)\left[R^*(s) - HG_2^*(s)M^*(s)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M^*(s) = G_1^*(s)R^*(s) - G_1^*(s)HG_2^*(s)M^*(s) \quad (8)$$
$$(6)\overset{*}{\Rightarrow} E^*(s) = R^*(s) - HG_2^*(s)M^*(s) \quad (9)$$
$$(7),(8) \Rightarrow \frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G_1^*(s)G_2^*(s)}{1+G_1^*(s)G_2H^*(s)} \quad (10)$$

Μετασχηματίζουμε τη σχέση (10) κατά Ζ οπότε προκύπτει:

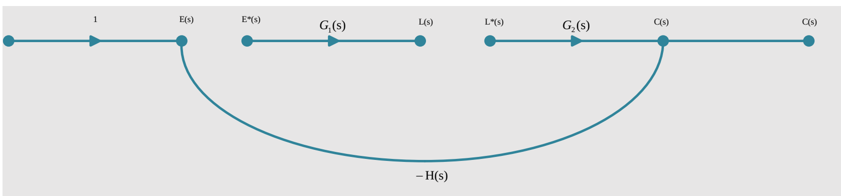
$$C(z) = \frac{G_2(z)G_1(z)R(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)} \quad (11)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6. Για το σύστημα του σχήματος να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου $\frac{C(z)}{R(z)}$ με τον τύπο του Mason.



ΛΥΣΗ

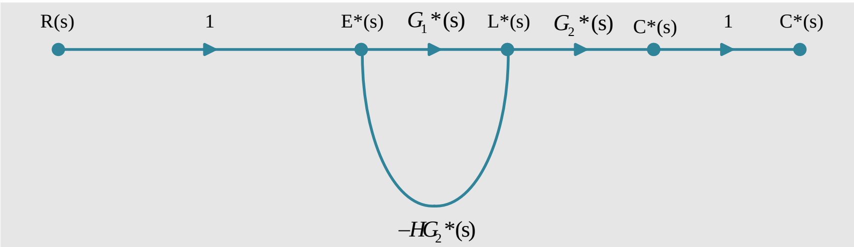
Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ροής σήματος (Δ.Ρ.Σ) που αντιστοιχεί στο δομικό διάγραμμα του σχήματος.



Παρατηρούμε ότι το Δ.Ρ.Σ παρουσιάζει ασυνέχεια μεταξύ των $E(s)$ και $E^*(s)$ και μεταξύ των $L(s)$ και $L^*(s)$ οπότε χρησιμοποιώντας το μοντέλο του συστήματος θα σχεδιάσουμε εκ νέου το Δ.Ρ.Σ χωρίς ασυνέχεια.

$$E(s)=R(s)-H(s)G_2(s)L^*(s)\overset{*}{\Rightarrow}$$
$$E^*(s)=R^*(s)-HG_2^*(s)L^*(s) \quad (1)$$
$$C(s)=G_2(s)L^*(s)\overset{*}{\Rightarrow}C^*(s)=G_2^*(s)L^*(s) \quad (2)$$
$$L(s)=G_1(s)E^*(s)\overset{*}{\Rightarrow}L^*(s)=G_1^*(s)E^*(s) \quad (3)$$

Από τις εξισώσεις (1),(2) και (3) σχεδιάζουμε το ισοδύναμο Δ.Ρ.Σ.



Εφαρμόζοντας τον τύπο του Mason έχουμε

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)}=\frac{T_1\Delta_1}{\Delta} \quad (4)$$

Όπου

$$T_1=G^*{}_1(s)G^*{}_2(s)$$

$$\Delta=1-(-G^*{}_1(s)HG_2^*(s)) \quad \text{και} \quad \Delta_1=1-(0)=1$$

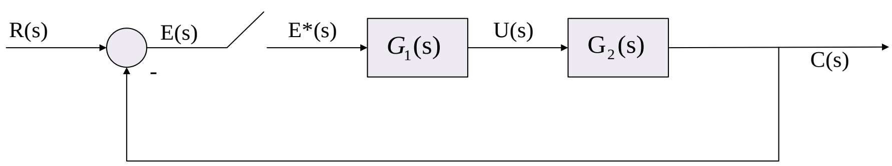
Οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (4) προκύπτει

$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)}=\frac{G_1^*(s)G_2^*(s)}{1+G_1^*(s)G_2H^*(s)} \quad (5)$$

Η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση (6).

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)} \quad (6)$$

ΑΣΚΗΣΗ 7. Για το σύστημα του σχήματος να βρεθεί η παλμική συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου.



Δίνονται

$$G_1(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}, \qquad G_2(s)=\frac{K}{s+1}$$

ΛΥΣΗ

Η παλμική συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ προκύπτει όπως παρακάτω.

$$G(z)=Z[G(s)]=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s+1}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]$$

$$=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s}-\frac{K}{s+1}\right]=(1-z^{-1})\left(\frac{K}{1-z^{-1}}-\frac{K}{1-e^{-T}z^{-1}}\right)\Rightarrow$$

$$G(z)=\frac{K(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} \qquad (1)$$

Η παλμική συνάρτηση μεταφοράς $G_{cl}(z)$ κλειστού βρόχου θα είναι:

$$G_{cl}(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{K(1-e^{-T})z^{-1}}{1+[K-(K+1)e^{-T}]z^{-1}} \qquad (2)$$