



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Υπολογιστών

Διδάσκων: ΤΡΙΓΚΑ ΜΑΡΙΑ

Διάλεξη 7η

Ακαδημαϊκό έτος 2024-2025

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Κάθε εικόνα είναι ένα δισδιάστατο (2-D) σήμα.

■ Αναλογική εικόνα:

$$x_a(t_1, t_2), \quad -\infty < t_1, t_2 < \infty$$

■ Ψηφιακή εικόνα:

$$x(n_1, n_2) = Q[x_a(n_1 T_1, n_2 T_2)],$$

$$n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \quad T_1, T_2 \in \mathbb{R} \quad -\infty < n_1, n_2, T_1, T_2 < \infty$$

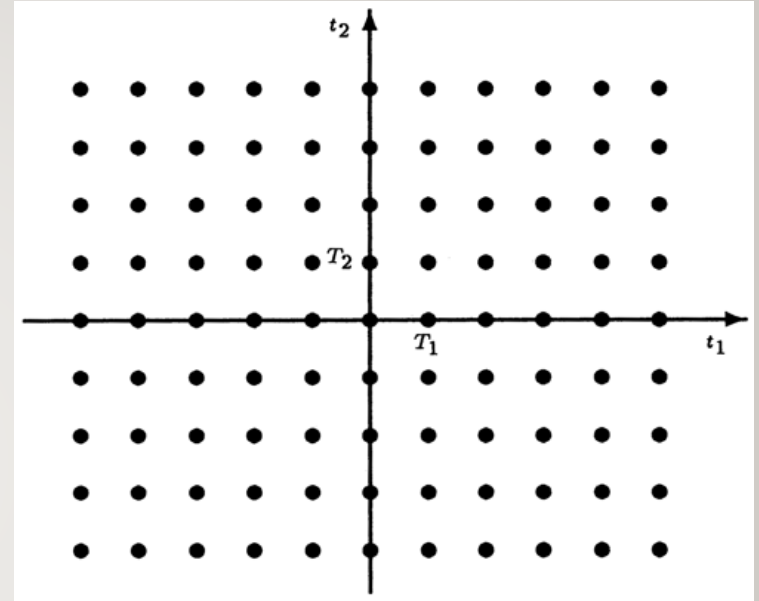
ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ένα διακριτό δισδιάστατο σήμα έχει την μορφή πίνακα και στην γενική του μορφή δηλώνεται ως:

$$x(n_1, n_2), \quad -\infty < n_1, n_2 < \infty$$

Συνήθως όμως το πεδίο ορισμού είναι πεπερασμένο:

$$x(n_1, n_2), \quad 0 < n_1 < N_1, \quad 0 < n_2 < N_2$$



*Γραφική απεικόνιση δισδιάστατου
σήματος*

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Μοναδιαίος
(κρουστικός) παλμός:

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1, n_2 = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

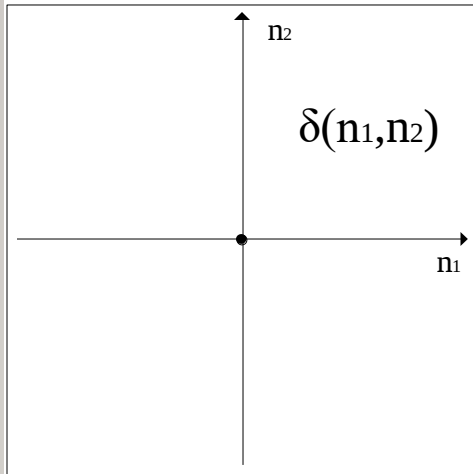
Μοναδιαίο βήμα:

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1, n_2 \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εκθετική ακολουθία:

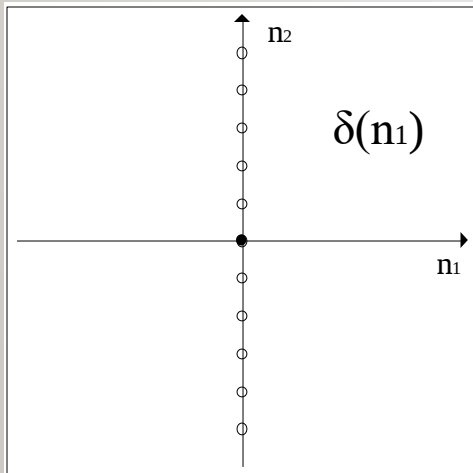
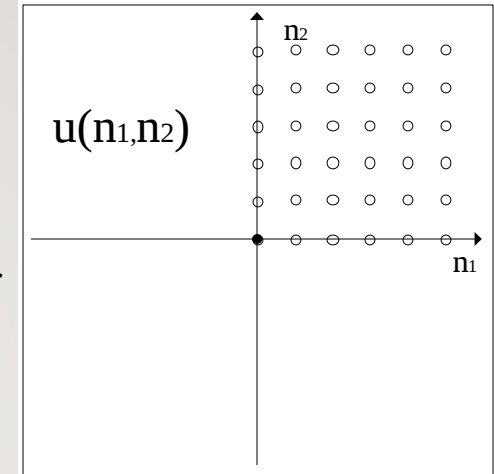
$$x(n_1, n_2) = a^{n_1} b^{n_2}, \quad -\infty < n_1, n_2 < \infty$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ



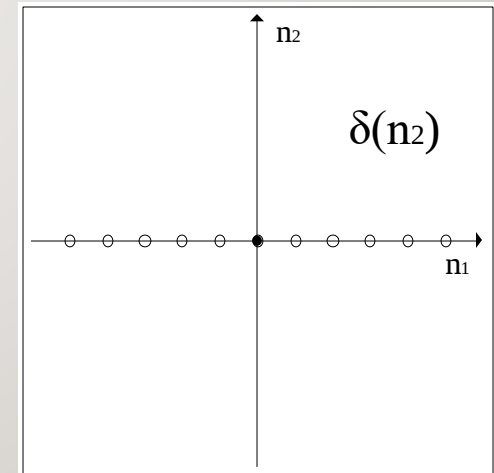
← μοναδιαίος παλμός

μοναδιαίο βήμα →



← παλμός στήλης

παλμός γραμμής →



ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Διαχωρίσιμες ακολουθίες: μία 2-D ακολουθία ονομάζεται διαχωρίσιμη εάν μπορεί να γραφεί ως

$$x(n_1, n_2) = f(n_1)g(n_2)$$

Προφανώς έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας

Ο μοναδιαίος παλμός και το μοναδιαίο βήμα είναι διαχωρίσιμες ακολουθίες.

$$\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1)\delta(n_2)$$

$$u(n_1, n_2) = u(n_1)u(n_2)$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Περιοδικά σήματα

Μία 2-D ακολουθία ονομάζεται ορθογώνια περιοδική με περίοδο $N_1 \times N_2$ εάν ισχύει

$$x(n_1, n_2) = x(n_1 + N_1, n_2) = x(n_1, n_2 + N_2)$$

Η στοιχειώδης περίοδος είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $[0, N_1) \times [0, N_2)$.

Η ορθογώνια περιοδικότητα είναι απλή αλλά δυστυχώς δεν μπορεί να καλύψει όλες τις περιπτώσεις περιοδικών 2-D σημάτων.

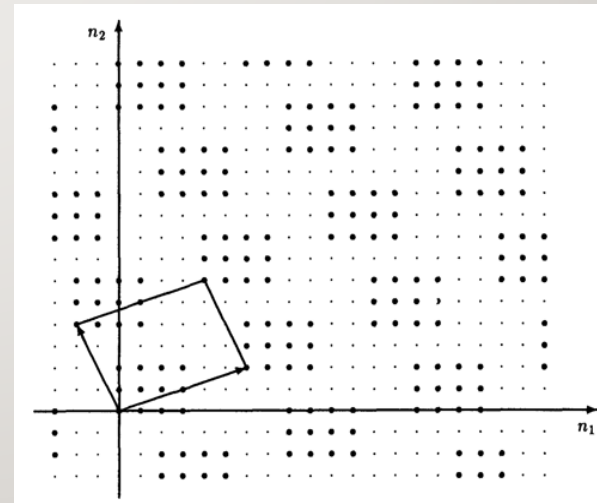
ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Γενικός ορισμός περιοδικών σημάτων

Μία 2-D ακολουθία ονομάζεται περιοδική εάν ισχύει:

$$x(n_1, n_2) = x(n_1 + kN_{11} + mN_{12}, n_2 + kN_{21} + mN_{22})$$

Έτσι ορίζεται περιοδική επέκταση σε οποιεσδήποτε κατευθύνσεις, όχι κατ' ανάγκην ορθογώνιες. Η βασική περίοδος είναι το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα $N_i = [N_{1i} \ N_{2i}]^T$.



ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

- Συνήθεις μετασχηματισμοί: DFT, DCT, Wavelet
Γιατί οι μετασχηματισμοί είναι χρήσιμοι στην επεξεργασία εικόνας;
- Επεξεργασία στο πεδίο των συχνοτήτων.
 - Φιλτράρισμα, αφαίρεση θορύβου, κυκλική μετατόπιση, συμπίεση, περιγραφή σχήματος
- Πλεονεκτήματα: μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Ο μετασχηματισμός Fourier δισδιάστατων σημάτων υπάρχει όταν η συνάρτηση είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και ορίζεται ως:

$$\text{FT : } F(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2$$

$$\text{IFT : } f(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2$$

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Στην περίπτωση διακριτών σημάτων χρησιμοποιείται ο διακριτός FT (DSFT – Discrete Space Fourier Transform).

FT διακριτού σήματος:

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2)$$

IFT διακριτού σήματος:

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2$$

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

- Έστω μία ακολουθία $x(n_1, n_2)$ πεπερασμένης χωρικής επέκτασης. Τότε ο 2-D DFT αυτής δίνεται από τις σχέσεις:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \exp(-i \frac{2\pi n_1 k_1}{N_1} - i \frac{2\pi n_2 k_2}{N_2})$$

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) \exp(i \frac{2\pi n_1 k_1}{N_1} + i \frac{2\pi n_2 k_2}{N_2})$$

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

- Η σχέση του DFT με τον DSFT είναι η εξής:

$$X(k_1, k_2) = X(w_1, w_2) \Big|_{w_1 = \frac{2\pi k_1}{N_1}, w_2 = \frac{2\pi k_2}{N_2}}$$

δηλαδή ο DFT είναι μία δειγματοληψία του DSFT πάνω στον διπλό μοναδιαίο κύκλο.

- Ο υπολογισμός του DFT μπορεί να γίνει γρήγορα (FFT) με την μέθοδο των γραμμών- στηλών.

$$G(n_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{n_2 k_2}$$

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} G(n_1, k_2) W_{N_1}^{n_1 k_1}$$

$$\text{όπου } W_{N_i} = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N_i}\right)$$

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Σημαντικές ιδιότητες του 2-D DFT

1. Γραμμικότητα

$$x(n_1, n_2) = a \cdot v(n_1, n_2) + b \cdot w(n_1, n_2) \leftrightarrow X(k_1, k_2) = a \cdot V(k_1, k_2) + b \cdot W(k_1, k_2)$$

2. Κυκλική μετατόπιση

$$x(n_1, n_2) = v(n_1 + m_1, n_2 + m_2) \leftrightarrow X(k_1, k_2) = \exp(ik_1 m_1 + ik_2 m_2) V(k_1, k_2)$$

3. Διαχωρίσιμη ακολουθία

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1)x_2(n_2) \leftrightarrow X(k_1, k_2) = X_1(k_1)X_2(k_2)$$

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

DCT διακριτού σήματος:

$$C(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} 4x(n_1, n_2) \cos \frac{(2n_1 + 1)k_1\pi}{2N_1} \cos \frac{(2n_2 + 1)k_2\pi}{2N_2}$$

IDCT διακριτού σήματος:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} w_1(n_1) w_2(n_2) C(k_1, k_2) \cos \frac{(2n_1 + 1)k_1\pi}{2N_1} \cos \frac{(2n_2 + 1)k_2\pi}{2N_2}$$

$$\text{με } w_i = \begin{cases} 1/2, & k_i = 0 \\ 1, & 1 \leq k_i \leq N_i - 1 \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός DCT είναι διαχωρίσιμος.

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

- Υπολογισμός κατά γραμμές και στήλες

$$G(n_1, k_2) = 2 \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cos \frac{(2n_2 + 1)k_2\pi}{2N_2}$$

$$C(k_1, k_2) = 2 \sum_{n_1=0}^{N_1-1} G(n_1, k_2) \cos \frac{(2n_1 + 1)k_1\pi}{2N_1}$$

- Υπολογισμός μέσω του DFT της $y(n_1, n_2)$ η οποία προκύπτει από κατοπτρική επέκταση της $x(n_1, n_2)$ σε περιοχή $2N_1 \times 2N_2$

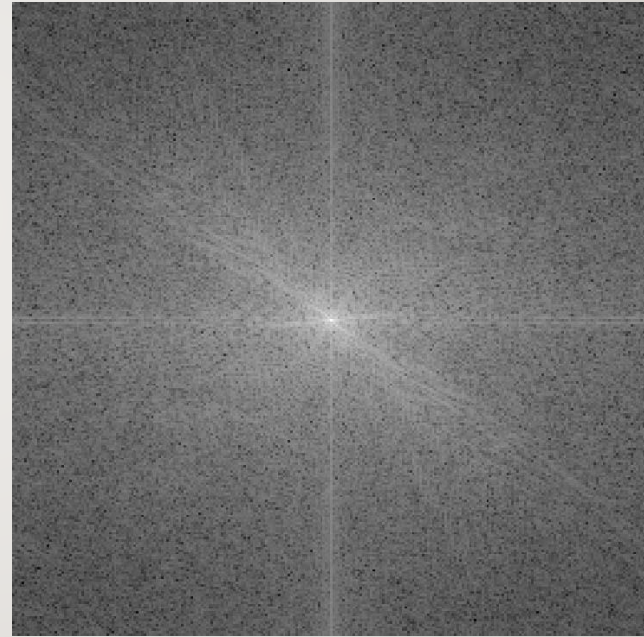
$$C(k_1, k_2) = W_{2N_1}^{k_1/2} W_{2N_2}^{k_2/2} Y(k_1, k_2) \quad \text{όπου } W = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N_i}\right)$$

Η ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

- Συχνοτικό περιεχόμενο του DFT (συγκέντρωση ενέργειας γύρω από το $(0,0)$)



lenna

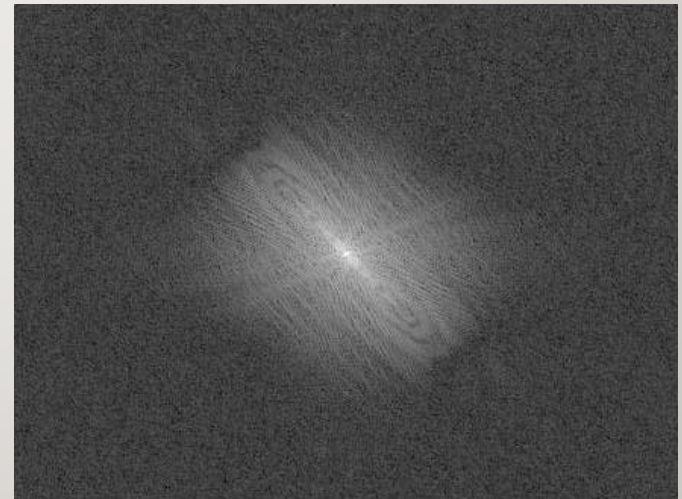
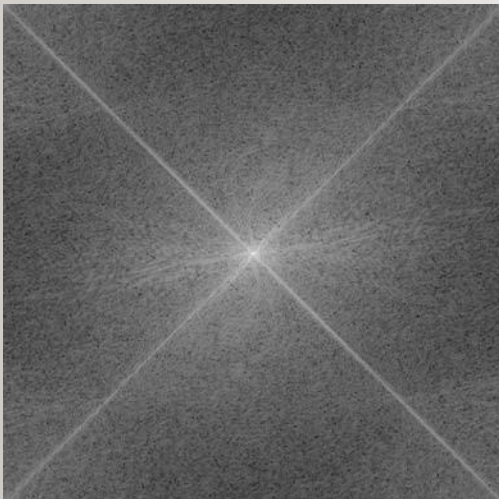
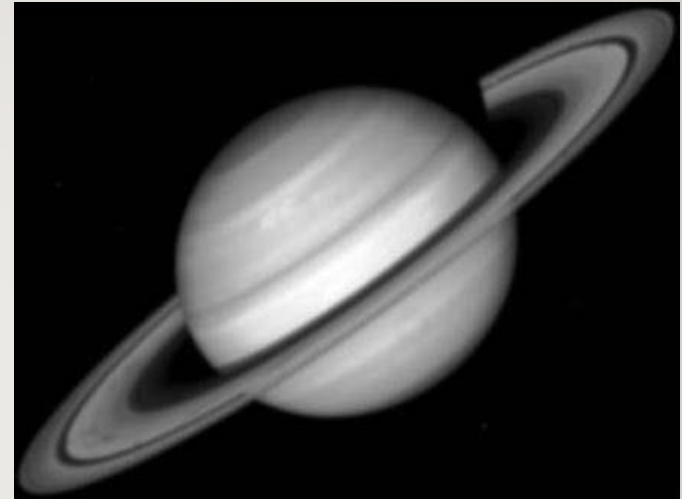


Λογαριθμική απεικόνιση
του πλάτους του DFT

Η ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ



Παραδείγματα
συγκέντρωσης
της ενέργειας
πάνω σε
συγκεκριμένες
διευθύνσεις

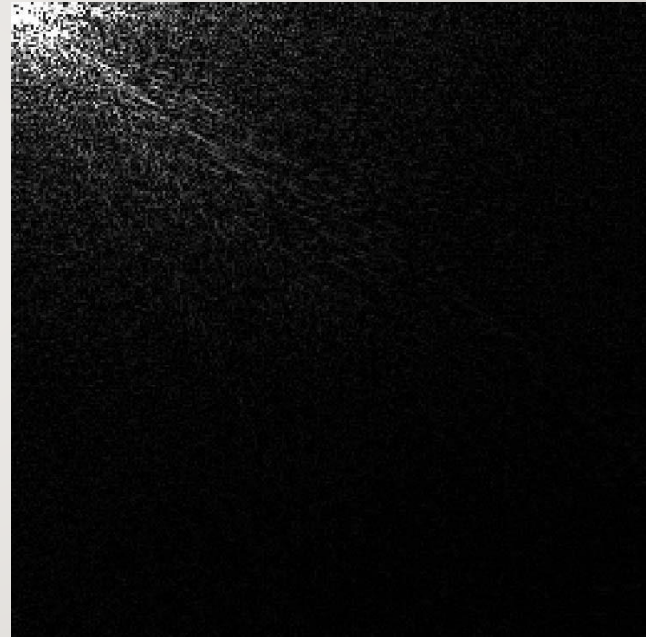


Η ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

- Συχνοτικό περιεχόμενο του DCT (συγκέντρωση ενέργειας στη μία γωνία)

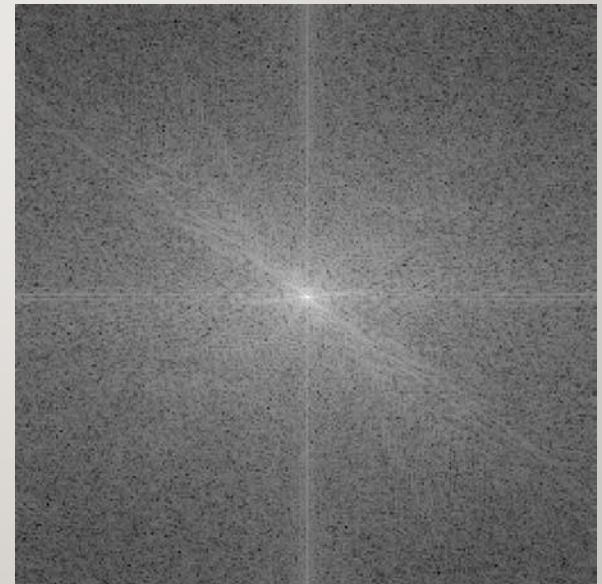


lenna

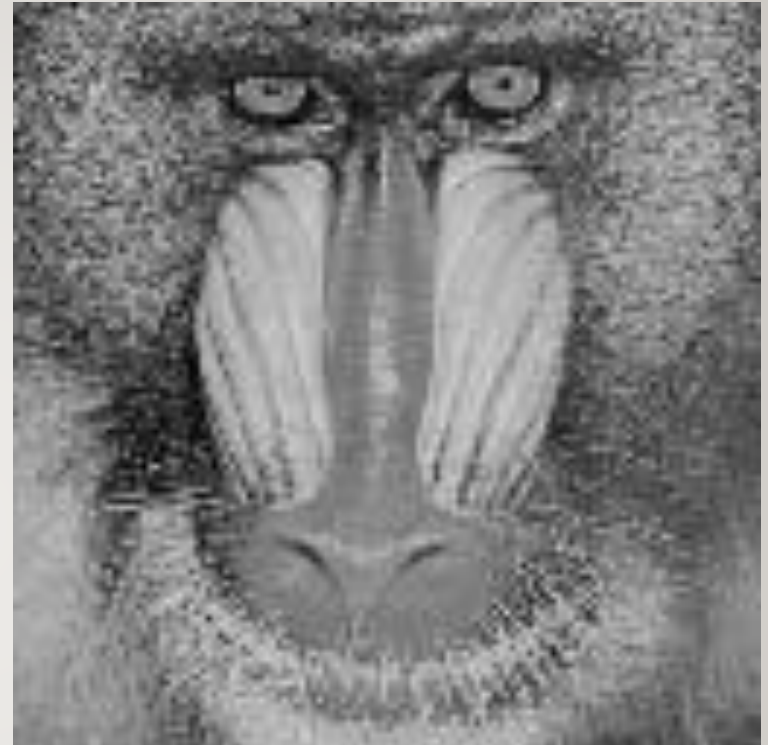
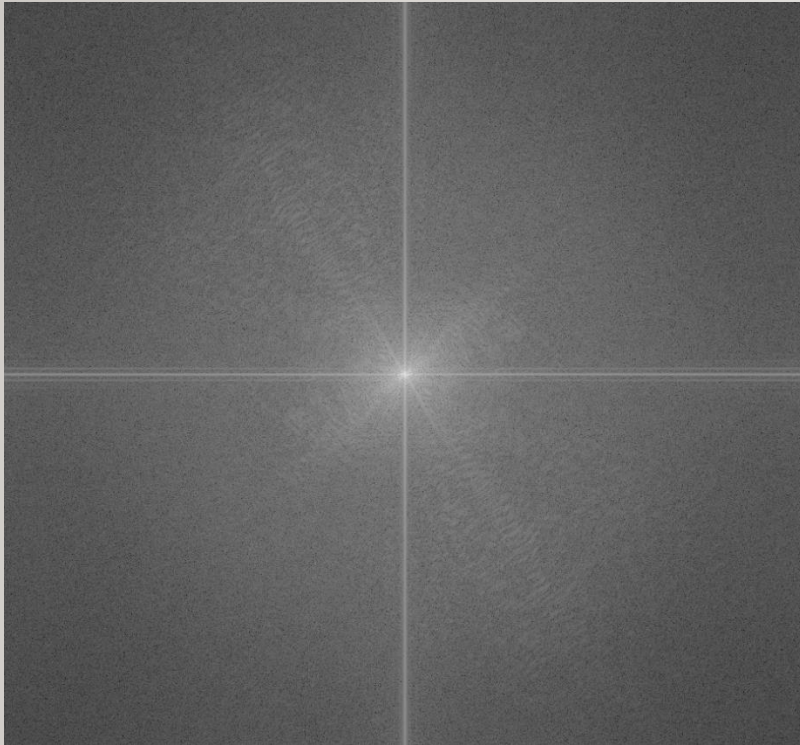


Γραμμική απεικόνιση του
πλάτους του DCT

Η ΕΙΚΟΝΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ



Η ΕΙΚΟΝΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ



Λάθος συμπέρασμα: Ο άνθρωπος μοιάζει πολύ με τον πίθηκο στο πεδίο συχνοτήτων

Σωστό συμπέρασμα: Υπάρχει σημαντική πληροφορία που δεν είναι εύκολα απεικονίσιμη

Δίδαγμα: Μην κάνεις ποτέ γνωριμίες στη βάση του πεδίου συχνοτήτων και μόνο

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT)

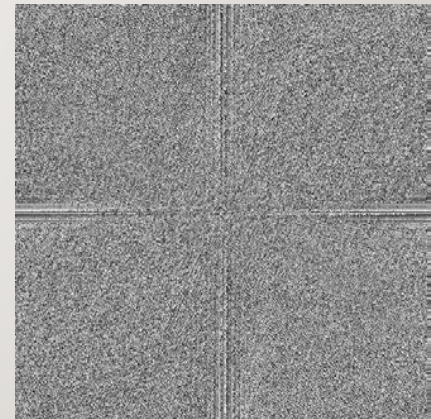
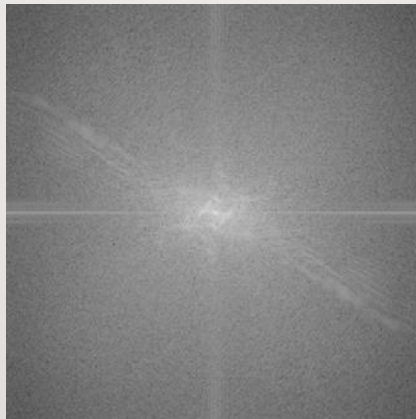
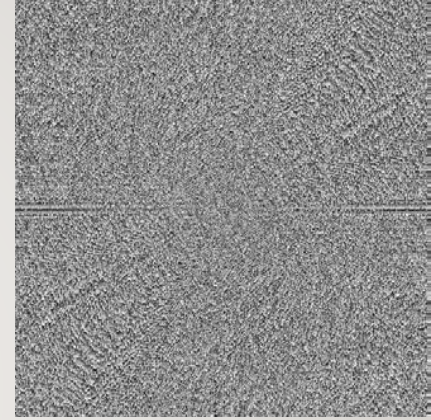
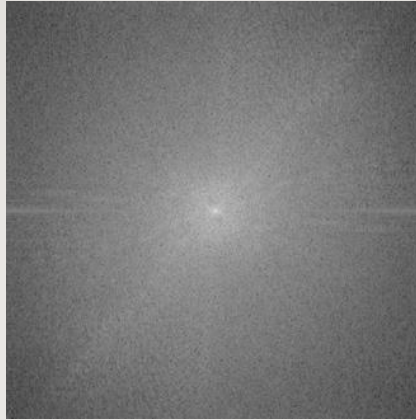
$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi kx/N} \text{ is just a matrix multiplication:}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{N-2} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & \dots & W^{N-3} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{N-2} & W^{N-3} & \dots & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \quad W = e^{-j2\pi/N}$$

Στην πράξη υλοποιείται χρησιμοποιώντας τον αλογόριθμο *fast Fourier transform* (FFT).

M/Σ FOURIER TRANSFORMS ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ



original

amplitude

phase

FOURIER TRANSFORMS ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ

Image phase matters!



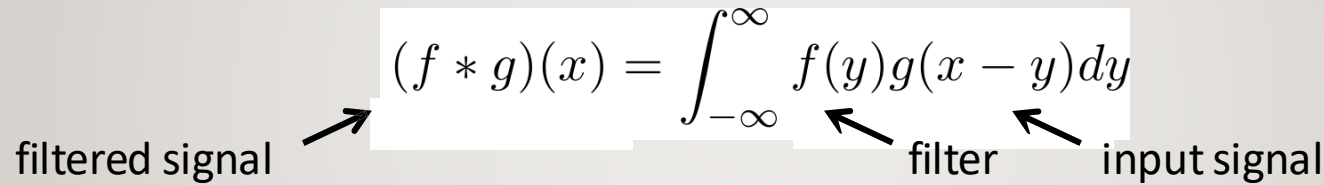
cheetah phase with zebra amplitude



zebra phase with cheetah amplitude

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΣΗΜΑΤΑ

Definition of linear shift-invariant filtering as convolution:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$$


filtered signal

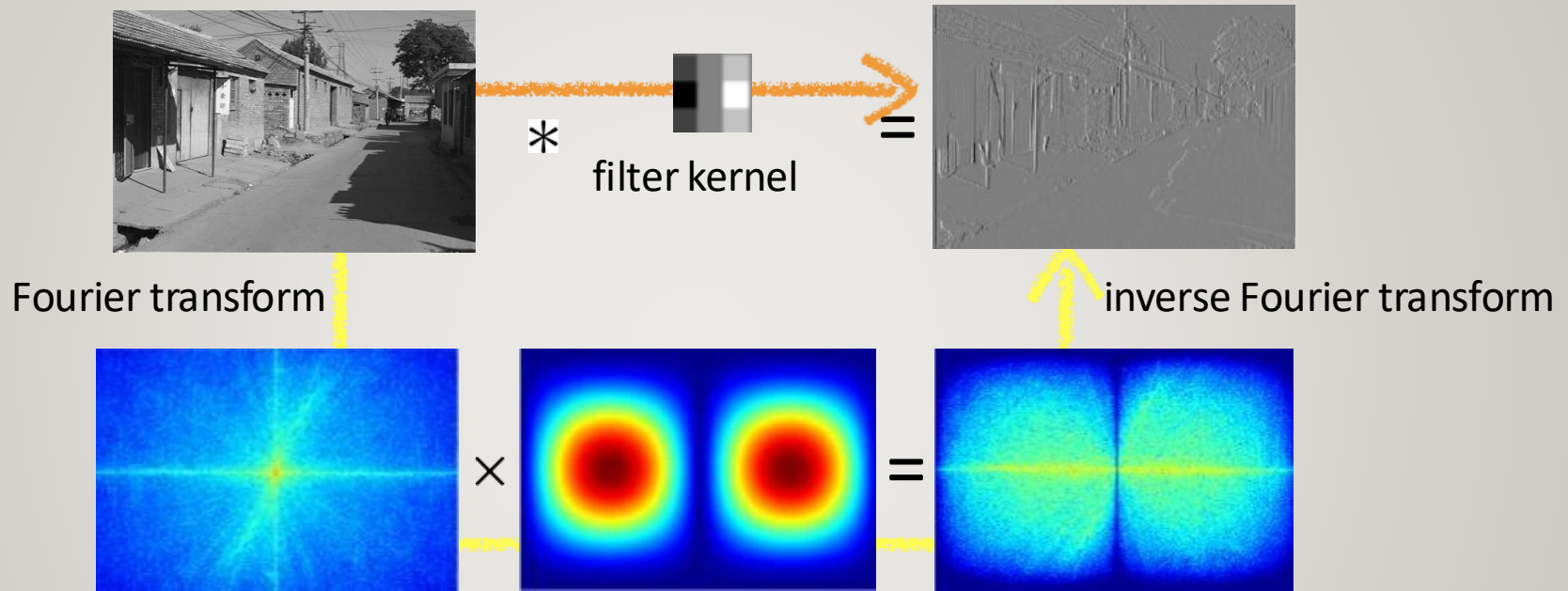
filter

input signal

Using the convolution theorem, we can interpret and implement all types of linear shift-invariant filtering as multiplication in frequency domain.

Why implement convolution in frequency domain?

ΦΙΛΤΡΟ ΣΤΟ ΧΩΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Σημείωση: Οι εικόνες συνήθως έχουν μεγάλη μέση τιμή (όπως 128) και πολλές πληροφορίες χαμηλής συχνότητας, επομένως οι εικόνες FT συνήθως έχουν μια φωτεινή μάζα εξαρτημάτων κοντά στο κέντρο.

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Ένα δισδιάστατο διακριτό σύστημα $T(\cdot)$ μετασχηματίζει ένα 2-D διακριτό σήμα εισόδου $x(n_1, n_2)$ σε ένα 2-D διακριτό σήμα εξόδου $y(n_1, n_2)$

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)]$$

- Γραμμικό σύστημα:

$$T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2]$$

- Χωρικά αμετάβλητο σύστημα:

$$y(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = T[x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)]$$

- Επίσης, συνήθως τα 2-D συστήματα είναι μη-αιτιατά.

Θα μας απασχολήσουν κυρίως γραμμικά και χωρικά αμετάβλητα συστήματα

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Τα συστήματα ορίζονται από την κρουστική τους απόκριση. Η σχέση εισόδου-εξόδου είναι

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) ** h(n_1, n_2)$$

- FIR σύστημα: η $h(n_1, n_2)$ έχει περιορισμένη περιοχή υποστήριξης $0 \leq n_1 \leq N_1, 0 \leq n_2 \leq N_2$
- IIR σύστημα: η $h(n_1, n_2)$ έχει άπειρη περιοχή υποστήριξης.
- Διαχωριζόμενο σύστημα: $h(n_1, n_2) = h(n_1)h(n_2)$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η συνέλιξη είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επεξεργασία εικόνας (π.χ., φιλτράρισμα).

- Κυκλική συνέλιξη: $w_C(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) \otimes \otimes y(n_1, n_2) \leftrightarrow X(k_1, k_2)Y(k_1, k_2)$
- Γραμμική συνέλιξη:

$x(n_1, n_2)$ με περιοχή υποστήριξης $R_{P_1 P_2} = [0, P_1) \times [0, P_2)$

$y(n_1, n_2)$ με περιοχή υποστήριξης $R_{Q_1 Q_2} = [0, Q_1) \times [0, Q_2)$

Η γραμμική συνέλιξη είναι: $w_L(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{Q_1-1} \sum_{m_2=0}^{Q_2-1} y(m_1, m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$

Η έξοδος έχει περιοχή υποστήριξης την

$$R_{L_1 L_2} = [0, L_1) \times [0, L_2) \quad L_i = P_i + Q_i - 1, \quad i = 1, 2$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

- Έστω ότι επιλέγουμε περιοχή υποστήριξης με επέκταση $N_1 \times N_2$, όπου $N_i \geq L_i$, και επεκτείνουμε με μηδενικά τις ακολουθίες $x(n_1, n_2)$ και $y(n_1, n_2)$ ώστε να ορίζονται σε όλη την περιοχή με διαστάσεις $N_1 \times N_2$.
- Τότε μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η κυκλική συνέλιξη και η γραμμική συνέλιξη των x και y , ταυτίζονται.
- Όταν έχουμε συνέλιξη ακολουθίας $x(n_1, n_2)$ με κρουστική απόκριση $h(n_1, n_2)$ που είναι διαχωρίσιμη τότε η συνέλιξη αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη μέθοδο γραμμών-στηλών.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΠΛΑΤΟΥΣ-ΦΑΣΗΣ

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι μιγαδική ποσότητα και έτσι μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή

$$\begin{aligned} X(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) e^{-j\omega_1 n_1} e^{-j\omega_2 n_2} = \\ &= |X(\omega_1, \omega_2)| e^{-j\Phi_x(\omega_1, \omega_2)} \end{aligned}$$

- Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να γραφτεί και ο 2D-DFT
- Η πληροφορία φέρεται κυρίως από την φάση $\Phi_x()$

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΠΛΑΤΟΥΣ-ΦΑΣΗΣ

■ Έστω η εικόνα x με $F\{x\}=M_x e^{j\Phi_x}$. Δημιουργούμε τις εικόνες x_p , x_m ώστε $x_p=F^{-1}\{c e^{j\Phi_x}\}$, $x_m=F^{-1}\{M_x e^{jf}\}$, όπου c , f σταθερές

Εικόνα x



Εικόνα x_p με $c=1$



Εικόνα x_m με $f=0,4\pi$



ΠΛΗΡΟΦΟΡΑΑ ΠΛΑΤΟΥΣ-ΦΑΣΗΣ

- Έστω οι εικόνες x, y με $F\{x\} = M_x e^{j\Phi_x}$, $F\{y\} = M_y e^{j\Phi_y}$. Δημιουργούμε τις εικόνες z, w ώστε $z = F^{-1}\{M_y e^{j\Phi_x}\}$, $w = F^{-1}\{M_x e^{j\Phi_y}\}$

Εικόνα x



Εικόνα y



Εικόνα z



Εικόνα w



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΚΤΗΣΗΣ ΠΛΑΤΟΥΣ

- Ο στόχος είναι η ανακατασκευή ενός σήματος $x(n_1, n_2)$ μόνο από την φάση Φ_x του μετασχηματισμού Fourier
- Το σήμα $x'(n_1, n_2)$ που προκύπτει ισούται με $ax(n_1, n_2)$
- Περιορισμοί:
 - Το $x(n_1, n_2)$ πραγματικό και πεπερασμένο
 - Ο μετασχηματισμός Fourier δεν παραγοντοποιείται σε γινόμενο πολυωνύμων των $e^{j\omega_1}$ και $e^{j\omega_2}$
- Συνήθως, στις εικόνες ισχύουν οι παραπάνω περιορισμοί

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΚΤΗΣΗΣ ΠΛΑΤΟΥΣ

- Δύο λύσεις για το πρόβλημα:

- » Μέσω γραμμικού συστήματος

- » Μέσω επαναληπτικής μεθόδου

- Γραμμικό σύστημα

$$\tan \theta_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{X_I(\omega_1, \omega_2)}{X_R(\omega_1, \omega_2)} = - \frac{\sum_{(n_1, n_2) \in R_x} x(n_1, n_2) \sin(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}{\sum_{(n_1, n_2) \in R_x} x(n_1, n_2) \cos(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}$$

- Αν N^2 άγνωστοι τότε δειγματοληπτούμε σε N^2 σημεία (ω_1, ω_2) , π.χ. με τον τρόπο που γίνεται στον 2D-DFT
- Το σύστημα που προκύπτει είναι της μορφής $A \cdot x = 0$ οπότε η λύση είναι της μορφής $ax(n_1, n_2)$

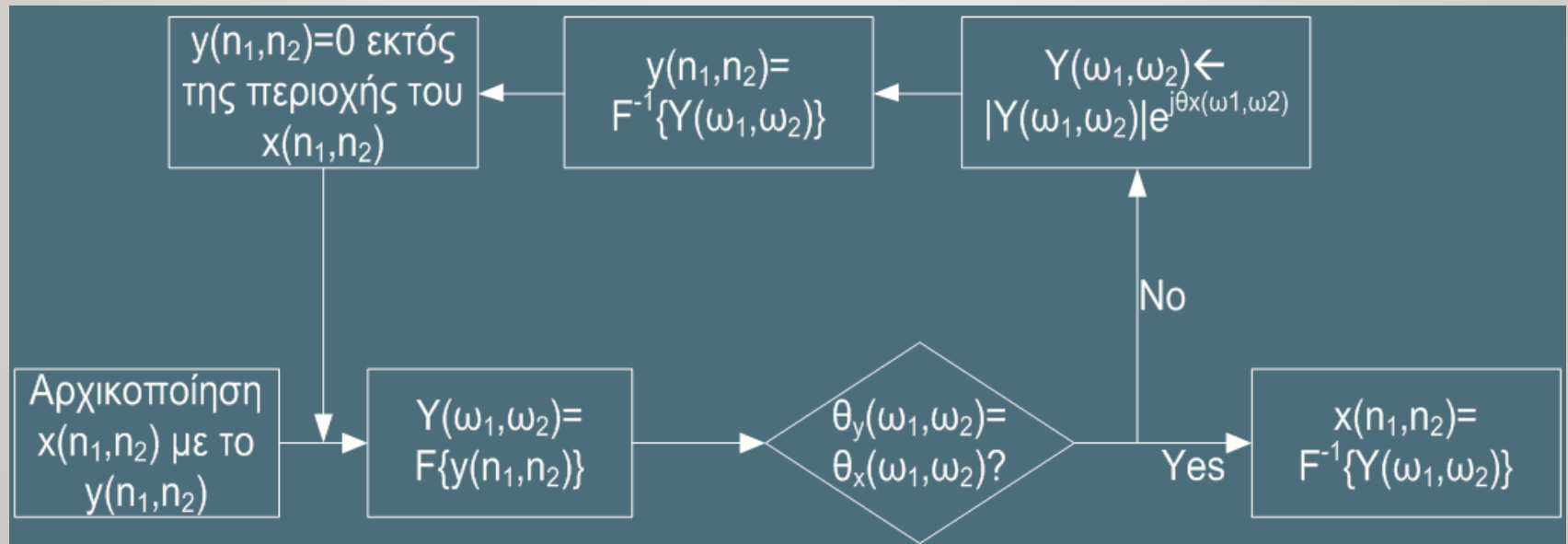
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΚΤΗΣΗΣ ΠΛΑΤΟΥΣ

- Η μέθοδος γραμμικού συστήματος είναι κατάλληλη για μικρές εικόνες αφού για παράδειγμα αν έχουμε εικόνα 1Mpixel τότε απαιτούνται 1M εξισώσεις!!!
- Επαναληπτική μέθοδος:
 - Θέτει περιορισμούς
 - » Στον χωρικό πεδίο: πραγματικές τιμές και τα εκτός εικόνας εικονοστοιχεία μηδέν
 - » Στο συχνοτικό πεδίο: ο μετασχηματισμός Fourier δεν πρέπει να παραγοντοποιείται

Κριτήριο σταματήματος: Η φάση του αποτελέσματος πρέπει να είναι ίση (ή $\sim$) με αυτή της αρχικής εικόνας

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΚΤΗΣΗΣ ΠΛΑΤΟΥΣ

■ Επαναληπτική διαδικασία



ΣΧΕΣΗ ΧΩΡΟΥ – ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- $F(\Omega_1, \Omega_2) = \text{FT}[f(t_1, t_2)]$

$f(t_1, t_2)$: απόλυτα ολοκληρώσιμη

- Εάν $f(t_1, t_2)$: ζωνοπεριορισμένη $\mathbb{P} \ f(n_1, n_2)$

- $F(\omega_1, \omega_2) = \text{DSFT}[f(n_1, n_2)]$, (DS: discrete space)

- Εάν $f(n_1, n_2)$ περιορισμένης χωρικής επέκτασης

$\mathbb{P} \ F(k_1, k_2)$ (δειγματοληψία του DSFT)

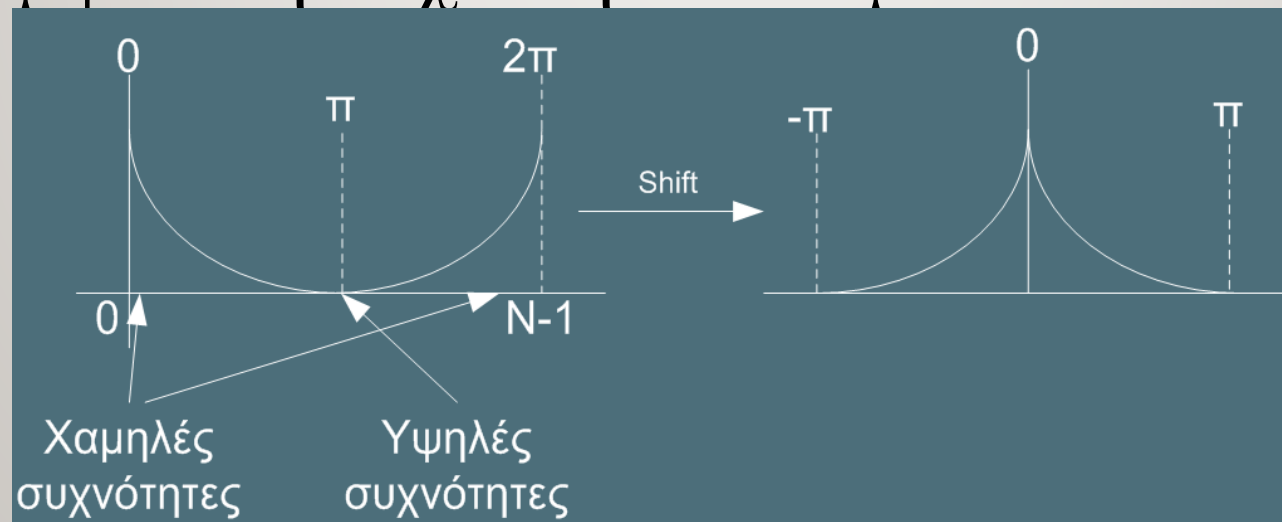
- $F(k_1, k_2) = \text{DFT}[f(n_1, n_2)]$

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΧΝΟΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

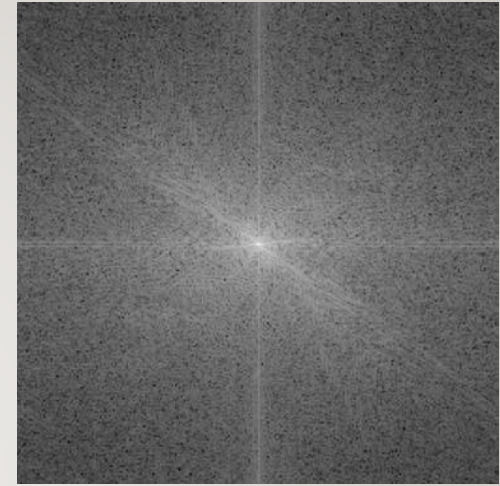
- Το ζεύγος DFT για 2D σήματα είναι (με συμβολισμό πιο συνήθη σε ΨΕΑΕ):

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j 2 \pi (ux+vy) / N}$$
$$f(x, y) = (1 / N^2) \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j 2 \pi (ux+vy) / N}$$

- Εμφάνιση συχνοτήτων σε μονοδιάστατα σήματα



ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΧΝΟΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ



- Όμοια για τα δισδιάστατα σήματα
- Η ολίσθηση είναι της μορφής $F(u,v) \leftarrow F(u-N/2, v-N/2)$
- Χαμηλές συχνότητες
 - Ομαλές περιοχές στην εικόνα
- Υψηλές συχνότητες
 - Περιγράμματα και άκρα εικόνας λόγω παραθύρωσης

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΧΝΟΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

■ Άλλα παραδείγματα:

