ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ένα σύνολο $V \neq \emptyset$ καλείται F-διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος, όπου $(F,+,\cdot)$ ένα σώμα (με προσθετική και πολλαπλασιαστική πράξη), όταν είναι εφοδιασμένο με μια προσθετική πράξη, με το ζεύγος $(\bar{v}_1,\bar{v}_2)\in V\times V$ να αντιστοιχίζεται (μέσω της πράξης αυτής) στο στοιχείο $\bar{v}_1+\bar{v}_2\in V$, που καλείται άθροισμα των διανυσμάτων $\bar{v}_1,\bar{v}_2\in V$, και με μια εξωτερική πολλαπλασιαστική πράξη, με το ζεύγος $(a,\bar{v})\in F\times V$ να αντιστοιχίζεται στο διάνυσμα $a\cdot\bar{v}\in V$, που καλείται γινόμενο αριθμού $a\in F$ και διανύσματος $\bar{v}\in V$. Η συλλογή $(V,+,\cdot)$ καλείται επίσης Δ.Χ. Η προσθετική και η πολλαπλασιαστική πράξη του Δ.Χ. πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες:

(α) $\bar{v}_1+\bar{v}_2=\bar{v}_2+\bar{v}_1$, $v_1,v_2\in V$ (αντιμεταθετικότητα διανυσμάτων)

(β) $(\bar{v}_1+\bar{v}_2)+\bar{v}_3=\bar{v}_1+(\bar{v}_2+\bar{v}_3)=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3$ (προσεταιριστικότητα διανυσμάτων)

(γ) $a\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot a$, $v\in V$, $a\in F$ (αντιμεταθετικότητα αριθμού και διανύσματος)

(δ) $(a+b)\cdot\bar{v}=av+b\bar{v}$, $a,b\in F$, $v\in V$ (1η επιμεριστικότητα)

(ε) $a(\bar{v}+\bar{u})=av+a\bar{u}$, $a\in\mathbb{R}$, $\bar{u},\bar{v}\in V$ (2η επιμεριστικότητα).

(στ) $1_F\cdot\bar{v}=\bar{v}$, $v\in V$ (1_F μοναδιαίο στοιχείο του F)

Το στοιχείο $\bar{0}_V$ (ή απλά $\bar{0}$) καλείται μηδενικό διάνυσμα του δ.χ. V, όταν

$$\bar{0}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{0}=\bar{v},\ v\in V$$ (ουδέτερο στοιχείο της προσθετικής πράξης διαν.).

Πάντοτε $\exists\,\bar{0}\in V$, με $\{\bar{0}\}$ ο μηδενικός χώρος (ο μικρότερος δ.χ.)

Από τις ιδιότητες, ισχύει άμεσα ότι :

$$0_F \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot 0_F = \bar{0}, \quad ή \quad 0 \cdot \bar{v} = v \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{v} \in V, \quad και$$
$$a \cdot \bar{0}_V = \bar{0}_V \quad ή \quad a\,\bar{0} = \bar{0}, \quad a \in F.$$

$a \in F$.

Το στοιχείο $-\bar{v} \in V$ καλείται αντίθετο διάνυσμα του $\bar{v} \in V$, όταν

$$(-\bar{v}) + \bar{v} = \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}.$$

Ισχύει ότι $(-1)\cdot\bar{v} + \bar{v} = (-1)\cdot\bar{v} + 1\cdot\bar{v} = (-1+1)\cdot\bar{v} = 0\cdot\bar{v} = \bar{0}$, δηλ. $(-1)\cdot\bar{v} = -\bar{v}$, $v \in V$. Άρα το $(-1)\cdot\bar{v}$ είναι το αντίθετο διάνυσμα του $\bar{v} \in V$.

Έστω $(F,+,\cdot)$ σώμα. Το σύνολο F^n των n-διανυσμάτων, $n \in \mathbb{N}^*$ (διατεταγμένων n-άδων) ορίζουμε την προσθετική πράξη

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_i)_{i=1}^{n} + (b_i)_{i=1}^{n} := (a_i + b_i)_{i=1}^{n}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in F^n$$

και την πολλαπλασιαστική πράξη

$$\lambda \cdot \bar{a} = \lambda \cdot (a_i)_{i=1}^{n} := (\lambda \cdot a_i)_{i=1}^{n}, \quad \bar{a} \in F^n, \ \lambda \in F.$$

Τότε $(F^n, +, \cdot)$ είναι F-Δ.Χ. Ισχύει επίσης $-\bar{a} = -(a_i)_{i=1}^{n} = (-a_i)_{i=1}^{n}$, $\bar{a} \in F^n$ και $\bar{0}_{F^n} = (0)_{i=1,2,\dots,n}$ το μηδενικό διάνυσμα του F-δ.χ. F^n.

Γενικότερα $(F^{m\times n}, +, \cdot)$ δ.χ. των F-πινάκων, εφοδιασμένο με την προσθετική πράξη της άθροισης πινάκων και την πολλαπλασιαστική πράξη του γινομένου αριθμών (στοιχείων του σώματος F) επί πίνακα, είναι επίσης Δ.Χ.

Ισχύει ότι $-A = -(a_{ij})_{m\times n} = (-a_{ij})_{m\times n}$, $0_{F^{m\times n}} = 0_{m\times n} = (0)_{m\times n}$ το μηδενικό διάνυσμα του F-δ.χ. $F^{m\times n}$.

Ορισμός. Έστω $\bar{v}_i \in V$, $(V,+,\cdot)$ F-δ.χ. $i=1,2,\dots,n$.

$\bar{v}$ γραμμικός συνδυασμός των $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

$$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \quad \bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{v}_i \,, \quad \lambda_i \in F, \; i=1,2,\dots,n.$$

Παράδειγμα. Έστω $\bar{x}_1 = (3,-1,2)^T$, $\bar{x}_2 = (1,0,4)^T$, $\bar{x}_3 = (-1,1,1)^T$
Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με $\bar{x} := (10,-5,5)^T = \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \lambda_3 \bar{x}_3$.

Έχουμε $\bar{x} = (10,-5,5)^T = \lambda_1 (3,-1,2)^T + \lambda_2 (1,0,4)^T + \lambda_3 (-1,1,1)^T$

$$= (3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)^T$$

οπότε

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = -5 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = -3$$

και άρα $\bar{x} = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 3\bar{x}_3$ ($\bar{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$).

Ορισμός Γραμμικής επέκτασης (ή θήκης)
Έστω $S = \{x_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset \mathbb{R}^n$.

$L(S)$ S-γραμμική επέκταση

$$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \quad L(S) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n\}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}}$$

δηλ. το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων S.

Τα διανύσματα καλούνται και γεννήτορες του $L(S)$.

Παράδειγμα. Έστω $(\bar{e}_i) = (\delta_{ij}) = (0,0,\dots,\underset{i}{1},0,\dots,0)^T$. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Τότε $\bar{x} = x_1(1,0,\dots,0)^T + x_2(0,1,0,\dots,0)^T + \dots + x_n(0,0,\dots,0,1)^T = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$
δηλ. $\bar{x} \in L(\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n\})$.

Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία

Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset V$ καλείται γραμμική επικάλυψη των $\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ και συμβολίζεται με

$$L(\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n}) = L(\{\bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_n\}) = \langle \bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_n \rangle$$
$$:= \{\sum a_i \bar v_i\}_{a_1,a_2,\dots,a_n \in F} = \{a_1\bar v_1 + a_2\bar v_2 + \dots + a_n \bar v_n\}_{(a_i)\in F^n}.$$

Ένα υποσύνολο $U \subset V$ του F-δ.χ. καλείται V-υπόχωρος, όταν $(U,+,\cdot)$ F-δ.χ. όπου όταν γράφουμε $(U,+,\cdot)$ εννοούμε ότι οι πράξεις $(+,\cdot)$ του U είναι οι πράξεις $(+,\cdot)$ του V περιορισμένες στον $U \subset V$. Ισοδύναμα, $\bar u_1 + \bar u_2 \in U$ και $a \cdot \bar u \in U$, για $a \in F$, $\bar u, \bar u_1, \bar u_2 \in U$.
Ισχύει άμεσα ότι $L(\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n}) \subset V$ V-υπόχωρος.

Έστω V F-δ.χ. Τότε το $\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset V$ καλείται σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων όταν,

$$\{(a_i) \in F^n / \sum_{i=1}^{n} a_i \bar v_i = \bar 0\} = \{\bar 0_F\},$$

δηλ. όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί πεπερασμένου πλήθους στοιχείων που μηδενίζονται προκύπτουν μόνο από μηδενικούς συντελεστές. Άρα, όταν ισχύει
$a_1\bar v_1 + a_2\bar v_2 + \dots + a_n\bar v_n = \bar 0$, τότε $a_i = 0_F$, $i = 1,2,\dots,n$, ή το n-διάνυσμα $(a_i)_{i=1}^{n} \in F^n$ των συντελεστών είναι το μηδενικό n-διάνυσμα $\bar 0$.

Το σύνολο $\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset V$ καλείται σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων όταν

$$\{(a_i) \in F^n / \sum a_i \bar v_i = \bar 0_F\} \neq \{\bar 0_F\},$$

δηλ. εάν ένας γραμμικός συνδυασμός των $\{\bar v_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ μηδενίζεται τότε κάποιος συντελεστής αυτού, π.χ. ο $a_k \neq 0_F$.

Στην περίπτωση των ν-διανυσμάτων (διατεταγμένων ν-άδων), εάν $\{\bar{a}_i\}_{i=1,2,\dots,\nu} \subset F^{\nu}$ είναι σύνολο γραμμικών ανεξάρτητων ν-διανυσμάτων του F^{ν}, και

$$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \bar{a}_i = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_\nu \bar{a}_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i (a_{ij}) = \bar{0}_F \quad j=1,2,\dots,\nu, \text{ τότε } \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_\nu=0_F.$$

και εάν $\{\bar{a}_i\}_{i=1,2,\dots,\nu} \subset F^{\nu}$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων ν-διανυσμάτων, και

$$\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i (a_{ij}) = \bar{0}_F, \; j=1,2,\dots,\nu, \text{ τότε } \exists k \in \{1,2,\dots,\nu\} \text{ με } \lambda_k \neq 0_F.$$

Άμεσο αποτέλεσμα της γραμμικής εξάρτησης είναι το γεγονός ότι εάν $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,\nu} \subset V$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων του F-δ.χ. V, τότε $\exists k \in \{1,2,\dots,\nu\}$ με $\bar{v}_k \in L(\{v_i\}_{i=1,\dots,\nu})$ δηλ. υπάρχει διάνυσμα του συνόλου $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,\nu}$ που γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλ. $\exists k \in \mathbb{N}_1^{\nu}$, έτσι

$$\bar{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \bar{v}_i + \sum_{i=k+1}^{\nu} a_i v_i = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} + a_{k+1} \bar{v}_{k+1} + \dots + a_\nu \bar{v}_\nu$$

όπου $a_i \in F$, $i=1,2,\dots,\nu$.

Αντίστοιχα για την γραμμική ανεξαρτησία, ισχύει ότι εάν $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^{\nu}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, τότε κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός των άλλων, δηλ. $\bar{v}_i \notin L(\{v_i\}_{i=1,2,\dots,\nu})$, $i=1,2,\dots,\nu$.

Άμεσα ισχύει ότι $\{\bar{v} \neq \bar{0}\}$, $\bar{v} \in V$, V F-δ.χ. είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V, δηλ. ένα μη-μηδενικό διάνυσμα του U F-δ.χ. είναι ανεξάρτητο, καθώς εάν $a\bar{v} = \bar{0}_F$, τότε $a=0$ καθώς $\bar{v} \neq \bar{0}$.

Επίσης $\{\bar{0}_F\} \subset V$ F-δ.χ. είναι σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων του V δηλ. το μηδενικό διάνυσμα ενός F-δ.χ. είναι γραμμικά εξαρτημένο, καθώς $\bar{0}_F = a.\bar{0}_F$, $a \in F$.

Άρα το $\{\bar{v} \neq \bar{0}_F\}$ και το $\{\bar{0}_F\}$ είναι τα μικρότερα γραμμικά ανεξάρτητα και εξαρτημένα διανύσματα ενός F-δ.χ.

Πόρισμα. Έστω $\{v_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset V$, V F-δ.χ.

Τότε $L(\{v_i\}_{i=1,2,\dots,n})$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων.

Πόρισμα. Έστω $\bar{x}_i \in V$, $i=1,2,\dots,n$.

Έστω $\bar{x}_k = \bar{0}$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$, τότε $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διαν.

Πόρισμα. Έστω $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διαν.

Τότε $\{v_i\}_{i\in K}$, $K \subset \{1,2,\dots,n\}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.

Δηλ. οποιοδήποτε υπο-σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διαν. είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων.

Πόρισμα. Έστω $v_i \in V$, $i=1,2,\dots,n$, V F-δ.χ.

$\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διαν. $\Leftrightarrow$

$\bar{v}_k \in L(\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n})$

Δηλ. γραμμικά εξαρτημένα διαν, πεπερασμένου πλήθους, είναι εκείνα αν και μόνο αν ένα (τουλάχιστον) από αυτά γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Πόρισμα. Έστω $v_i \in V$, $i=1,2,\dots,n$, V F-δ.χ.

Έστω $\{v_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διαν. $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Τότε $\{v_i\}_{i=1,2,\dots,k+1}$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διαν.

Δηλ. οποιοδήποτε υπερ-σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Πόρισμα. Έστω $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ σύνολο γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων. Τότε για $\bar{v} \in V$.

$$\{(\lambda_i)_{i=1,2,\dots,n} \in F^n / \bar{v} = \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \dots + \lambda_n\bar{v}_n\} = \{(\lambda_i^*)_{i=1,2,\dots,n}\},\ \lambda_i^* \in F \quad i=1,2,\dots,n.$$

Δηλ. έχουμε μοναδικότητα των συντελεστών γραμμικής ανεξαρτησίας.

Άρα ένα διάνυσμα αντιστοιχίζεται μοναδικά με ένα n-διάνυσμα του F^n.

Ορισμός. Έστω $\bar{v} \in V$ F-δ.χ., έστω $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ V-βάση, $\dim V = n$.

$$\bar{v}_B \in F^n \ B\text{-συντεταγμένη (ως προς } B\text{-βάση)} \overset{\text{ορ.}}{\iff} \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{v}_i,\ (\bar{v}_B) = (\bar{v}_i)_n.$$

Πόρισμα. Έστω $\bar{v} \in F^n$. Έστω $B = \{\bar{e}_i\}$, $\bar{e}_i = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{i-1}, 1, \underbrace{0,0,\dots,0}_{i+1})$ $\mathbb{R}^n$-βάση

τότε, $\bar{v}_B = \bar{v}$.

π.χ. $\bar{v} = (1,2,3)^T \in F^{n\times 1}$, τότε $\bar{v}_B = (1,2,3) \in F^{1\times n} = F^n$.

Ισχύει άμεσα ότι $\bar{0}_F \notin L\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,...,n}$ όπου $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,...,n}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, διότι $L(\{\bar{0}_F, \bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\})$ θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητο, καθώς εάν $a \cdot \bar{0}_F + a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_F$, τότε $a \neq 0$, δηλ. $L(\{\bar{0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}) = L\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,...,n}$). Επειδή όμως $\bar{0}_F \in V$, τότε $V = L\{\bar{v}_i\}$) δηλ. ένας F-δ.χ. είναι "παράγεται" πάντα από ένα σύνολο $n \in \mathbb{N}^*$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V (με $V = \{\bar{0}_F\}$ ο μικρότερος δ.χ.

Σαν άμεσο αποτέλεσμα, κάθε διάνυσμα ενός F-δ.χ. εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, όταν ο F-δ.χ. είναι πεπερασμένος.

Ένα (πεπερασμένο) σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός V F-δ.χ. το οποίο "παράγει" τον χώρο V, δηλ. $V = L\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,...,n}$) καλείται V-βάση (διανυσματική βάση ή γραμμική βάση του V). Διάσταση του χώρου V καλείται ο $\dim(V) \in \mathbb{N}^* = n$, δηλ. $\dim V$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμ. ανεξ. διανυσμάτων που "παράγουν" τον F-δ.χ. V.

Άρα εάν $U \subset V$ V-υπόχωρος, όπου V F-δ.χ., είναι ο γραμμικός συνδυασμός ενός συνόλου γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V, δηλ. $U = L\{\bar{u}_i\}_{i=1,2,...,k}$), τότε η διάσταση $\dim U = k \leq \dim(V)$. Άρα $\{\bar{u}_i\}_{i=1,2,...,k}$ είναι U-βάση.

Το σημαντικό είναι ότι εάν έχουμε ένα n-διάστατο F-δ.χ. και μια βάση $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ δηλ. ένα σύνολο $n \in \mathbb{N}^*$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V, τότε οποιοδήποτε $\bar{v} \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\bar{e}_i$, $i = 1,2,...,n$. Πράγματι, εάν $\bar{v} \in V$, τότε $\bar{v} \in L(B)$, δηλ.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \dots + a_n\bar{e}_n, \quad a_i \in F, \ i = 1,2,...,n,$$

και εάν $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{e}_i$, τότε $\bar{0}_F \;\; \bar{v} - \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\bar{e}_i$,

οπότε $a_i = b_i$, $i = 1,2,...,n$ καθώς $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,...,n}$ V-βάση, δηλ. B σύνολο γραμμ. ανεξ. διαν.

Παράδειγμα.

Το σύνολο $\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\bar{e}_i = (\delta_{ij})_{1\times n} = (0,0,\dots,\overset{(i\ \text{θέση})}{1},0,0,\dots,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο καθώς εάν

$$\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\dots+\lambda_n\bar{e}_n=\bar{0} \Rightarrow (\lambda_1,0,0,\dots,0)+(0,\lambda_2,0,0,\dots,0)+\dots+(0,0,\dots,0,\lambda_n)=\bar{0}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\bar{0} \Rightarrow \lambda_i=0,\ i=1,2,\dots,n.$$

Παράδειγμα. Έστω $\bar{x}_1=(2,-1,0)^T$, $\bar{x}_2=(-5,2,2)^T$, $\bar{x}_3=(-1,0,2)^T$. Τότε $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων, καθώς

$$-2\bar{x}_1-\bar{x}_2+\bar{x}_3=0.$$

Παράδειγμα. Έστω $\bar{x}_1=(2,-1,0)^T$, $\bar{x}_2=(1,3,1)^T$, $\bar{x}_3=(-1,0,2)^T$. Έστω

$$\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\lambda_3\bar{x}_3=\bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1(2,-1,0)^T+\lambda_2(1,3,1)^T+\lambda_3(-1,0,2)^T=\bar{0}$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda_1,-\lambda_1,0)^T+(\lambda_2,3\lambda_2,\lambda_2)^T+(-\lambda_3,0,2\lambda_3)=\bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\ -\lambda_1+3\lambda_2=0\\ \lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

(μηδενική ορίζουσα ΣΓΕ)

Σημείωση.

(α) Έστω $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \in V$, V F-δ.χ., τότε

$\{\bar{0}, \bar{x}_1, x_2, \dots, \bar{x}_n\} \subset V$ σύνολο γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων

(β) Έστω $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\} \subset V$ σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε

$W \subset \{\bar{x}_1, x_2, \dots, \bar{x}_n\}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.

Πρόταση. Έστω $(V,+,\cdot)$ πραγματικός Δ.Χ.

Οι συντελεστές ενός $\bar{v}$ γραμμικού συνδυασμού γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων είναι μοναδικοί.

Αντίστοιχα, οι συντελεστές ενός γραμμικού συνδυασμού εξαρτημένων διανυσμ. δεν είναι μοναδικοί.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{x}_1=(0,1,-3)$, $\bar{x}_2=(-2,1,2)$, $\bar{x}_3=(4,1,0)$

Έστω $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$, $\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\lambda_3\bar{x}_3=\bar{0}$. Τότε

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=\lambda_1(0,1,-3)+\lambda_2(-2,1,2)+\lambda_3(4,1,0)=\bar{0}$$

$\Leftrightarrow (-2\lambda_2+4\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ -3\lambda_1+2\lambda_2)=(0,0,0)$, δηλ.

$$\left\{\begin{array}{l} -2\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3\lambda_1+2\lambda_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}\ ,\ |A|=0\ ,$$ δηλαδή $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ (τετριμμένη λύση).

Άρα $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{x}_1=(2,1,-1)$, $\bar{x}_2=(-1,2,3)$, $\bar{x}_3=(4,7,3)$

Έστω $\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\lambda_3\bar{x}_3=\bar{0}$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$\lambda_1(1,2,-1)+\lambda_2(-1,2,3)+\lambda_3(4,7,0)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1,2\lambda_1,-\lambda_1)+(-\lambda_2,2\lambda_2,3\lambda_2)+(4\lambda_3,7\lambda_3,0)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3,\ \lambda_1+2\lambda_2+7\lambda_3,\ -\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+7\lambda_3=0\\ -\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\right\}\Rightarrow A\bar{x}=\bar{0},\ \bar{x}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&2&7\\-1&3&3\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έχουμε $D=|A|=0$. (Άρα $A\bar{x}=\bar{0}$ αόριστο ΣΓΕ). Επίλυση ειδικής λύσης για $\lambda_3:=1$ και το ΣΓΕ γίνεται

$$\left.\begin{cases} 2\lambda_1-\lambda_2=-4\\ \lambda_1+2\lambda_2=-7\\ -\lambda_1+3\lambda_2=-3\end{cases}\right\}\Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}',\ \bar{x}':=(\lambda_1,\lambda_2),\ \bar{b}':=(-4,-7)^T$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1',\bar{a}_2')$$

Έχουμε $D':=|A'|=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=4-(-1)=5\neq 0.$

$$D_1'=|\bar{b}',\bar{a}_2|=\begin{vmatrix}-4&-1\\-7&2\end{vmatrix}=-8-7=-15.$$

$$D_2':=|\bar{a}_1',\bar{b}'|=\begin{vmatrix}2&-4\\1&-7\end{vmatrix}=-14+4=-10$$

Άρα $\lambda_1:=D_1'/D'=-15/5=-3$, $\lambda_2:=D_2'/D'=-10/5=-2$

οπότε $\bar{x}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\alpha(-3,-2,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (απειρία συνδυασμών γρ. εξάρτησης).

Παράδειγμα. Έστω $\bar{v}_1=(1,2,3)$, $\bar{v}_2=(0,1,2)$ και $\bar{v}_3=(4,1,2)$.

Έστω $\lambda_1\bar{v}_1+\lambda_2\bar{v}_2+\lambda_3\bar{v}_3=\bar{0}$, δηλ.

$$\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(0,1,2)+\lambda_3(4,1,2)=\bar{0}, \text{ ή}$$

$$(\lambda_1+4\lambda_3,\ 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ 3\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0), \text{ ή}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1+4\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0\end{array}\right\}^{(*)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1+4\lambda_3=0\\ \lambda_2-7\lambda_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1+4\lambda_3=0\\ \lambda_2-7\lambda_3=0\\ 4\lambda_3=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \quad (\text{τετριμμένη λύση}).$$

Άρα $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.

Εναλλακτικά, η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του ΟΣΓΕ $(*)$ είναι μη-μηδενική, οπότε λαμβάνουμε την τετριμμένη μηδενική λύση $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{x}_1=(1,2,-1,0)$, $\bar{x}_2=(1,0,-1,3)$, $\bar{x}_3=(0,-1,1,1)$

Έστω $\bar{x}=(-1,0,5,a)\in L(\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\})$, $a\in\mathbb{R}$.

Άρα $\bar{x}=\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\lambda_3\bar{x}_3 \Leftrightarrow (-1,0,5,a)=\lambda_1(1,2,-1,0)+\lambda_2(1,0,-1,3)$

$+\lambda_3(0,-1,1,1)$

οπότε $(-1,0,5,a)=(\lambda_1+\lambda_2,\ 2\lambda_1-\lambda_3,\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3,\ 3\lambda_2+\lambda_3)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2=-1 \\ 2\lambda_1-\lambda_3=0 \\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=5 \\ 3\lambda_2+\lambda_3=a \quad (*) \end{array}\right. \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=4$$

Άρα από $(*)$ έχουμε $a=3\lambda_2+\lambda_3=-5$.

Παράδειγμα. Έστω $V=\{(x,y,z)^T \,/\, 2x+2y+z=0\}\subset\mathbb{R}^3$, και $W=\{(x,y,z)^T / \, x+2y+z=0\}\subset\mathbb{R}^3$.

Έχουμε $V=\{(x,y,z)^T \,/\, z=-2x-2y\} = \{(x,y,-2x-2y)^T\}_{x,y\in\mathbb{R}}$.

Ισχύει
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ x,y\in\mathbb{R}$$

Άρα $V=L(\{(1,0,-2)^T,(0,1,-2)^T\})$.

Το σύνολο $\{(1,0,-2)^T,(0,1,2)^T\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, καθώς ο πίνακας των στηλών

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3:=r_3+2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3:=r_3+2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα 1η και 2η στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα $B=\{(1,0,2)^T,(0,1,2)\}$ V-βάση με $\dim V=2$.

Έχουμε $W=\{(x,y,z)^T / \, z=-x-2y\}=\{(x,y,-x,-2y)\}_{x,y\in\mathbb{R}}$.

Ισχύει
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ x,y\in\mathbb{R}$$

Άρα $W=L(\{(1,0,-1)^T,(0,1,-2)^T\})$.

Το σύνολο $\{(1,0,-1)^T, (0,1,-2)^T\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο καθώς ο πίνακας των στηλών που είναι γραμμο-ισοδύναμος με ένα κλιμακωτό έχει μη-μηδενικά κύρια στοιχεία στις 2 στήλες του, δηλ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 + r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 + 2r_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}_{ref}$$

Άρα οι 2 στήλες του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε $B = \{(1,0,-1)^T, (0,1,-2)^T\}$ V-βάση με $\dim V = 2$.

Έχουμε $V \cap W = \{(x,y,z)^T \,/\, 2x + 2y + z = 0 \text{ και } x + 2y + z = 0\}$, δηλ.

$$V \cap W = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, A\bar{x} = \bar{0}\}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3},$$

και με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα Gauss, παίρνουμε

$$(A \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{r_1 := r_2 \\ r_2 := r_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{r_2 := r_2 - 2r_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{οπότε}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0,\ z = -2y,\ y \in \mathbb{R}, \text{ και άρα}$$

$$V \cap W = \{(x,y,z)^T = (0,y,-2y)^T\}_{y \in \mathbb{R}} = \{y(0,1,-2)^T\}_{y \in \mathbb{R}}$$

$$= L(\{(0,1,-2)^T\}) \text{ με } \dim(V \cap W) = 1.$$

Σημείωση. Θυμίζουμε ότι πάντα μπορούμε να εξετάσουμε την ανεξαρτησία διανυσμάτων με τη χρήση του ορισμού, δηλ. εάν ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων μηδενίζεται μόνο για μηδενικούς συντελεστές.

π.χ. για $\{(1,0,-1)^T, (0,1,-2)^T\}$, θέτουμε

$$\lambda_1(1,0,-1)+\lambda_2(0,1,-2) = \bar{0}, \quad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{ ή}$$

$$(\lambda_1, 0, -\lambda_1) + (0, \lambda_2, -2\lambda_2) = (0,0,0), \text{ ή}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - 2\lambda_2) = (0,0,0), \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

οπότε $\{(1,0,-1),(0,1,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{u} = (1,0,2)^T$, $\bar{v} = (3,-2,5)^T$, $\bar{w} = (1,-2,1)^T$.

Ο πίνακας $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ είναι γραμμο-ισοδύναμος με ένα κλιμακωτό, δηλ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 := -r_2/2 \\ r_3 := r_3 - 2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 := r_3 + r_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 := r_1 - 3r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{ref}$$

Άρα $\{\bar{u}, \bar{v}, w\} \subset \mathbb{R}^3$ σύνολο γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων και $\{\bar{u}, \bar{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων με

$$\bar{w} = -2\bar{v} + \bar{u} \quad \text{(γραμμική εξάρτηση)}$$

Εναλλακτικά, έστω $\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v} + \lambda_3 \bar{w} = \bar{0}$, ή

$$(\lambda_1 \ 0 \ 2\lambda_1)^T + (3\lambda_2 \ -2\lambda_2 \ 5\lambda_2)^T + (\lambda_3 \ -2\lambda_3 \ \lambda_3)^T = (0,0,0), \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (*) \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

και για $\lambda_3 := 1$ επιλύουμε το υπο-σύστημα 2×2, δηλ.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_2 = 2 \end{cases}$$

οπότε $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq \bar{0}$. Εξάλλου η ορίζουσα του (*) είναι μηδέν

Εναλλακτικά, $|\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}| = 0$, δηλ. έχουμε γραμμική εξάρτηση των $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, καθώς η ορίζουσα $|\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}| = A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{ref}$.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{u} = (1,-1,1)^T$, $\bar{v} = (2,1,2)^T$, $\bar{w} = (3,1,0)^T$.

Για τον πίνακα $(\bar{v}, \bar{v}, \bar{w})$ των στηλών $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 := r_2 + r_1 \\ r_3 := r_3 - r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Επειδή οι 3 στήλες έχουν μη μηδενικά κύρια στοιχεία τότε και οι 3 στήλες του $(u, \bar{v}, \bar{w})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλ. $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} \subset \mathbb{R}^3$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, δηλ. $\mathbb{R}^3$-βάση.

Εναλλακτικά $|u, \bar{v}, \bar{w}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$

Έστω $\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 v + \lambda_3 \bar{w} = (17, 5, 5)$, δηλ. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_B$, $B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$
εύρεση συντεταγμένων του $(17, 5, 5)$ ως προς βάση B. Έχουμε,

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 17 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b} := (17,5,5)^T, \ \bar{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)_{3\times3}$$

Έχουμε $D = |A| = -9 \neq 0$. Άρα $\bar{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ με $\lambda_1 = D_1/D$, $\lambda_2 = D_2/D$ και $\lambda_3 = D_3/D$

$$D_1 = |\bar{b}\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3|, \quad D_2 = |\bar{a}_1\ \bar{b}\ \bar{a}_2|, \quad D_3 = |\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}|$$

και έχουμε τελικά $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. (μέθοδος Cramer)

Εναλλακτικά με τη μέθοδο Gauss,

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 17 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 := r_2 + r_1 \\ r_3 := r_3 - r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) r_2 := r_2/3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4/3 & 22/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 := r_1 - 3r_3 \\ r_2 := r_2 - \frac{3}{4}r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) r_1 := r_1 - 2r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Άρα $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Επίσης, με προς-τα-πίσω αντικατάσταση από το ΣΓΕ (*).

Παράδειγμα. Έστω $\bar{u}=(1,1,a)^T$, $\bar{v}=(2,0,1)^T$, $w=(3,-1,1)$, $a\in\mathbb{R}$

Έστω $B=\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}$ $\mathbb{R}^3$-βάση.

Επειδή $\dim\mathbb{R}^3=3$, τότε πρέπει B σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, δηλ $|\bar{u},v,\bar{w}|\neq 0$, ή

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\a&-1&1\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{ή} \quad 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&3\\a&1\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\a&-1\end{vmatrix}\neq 0$$

δηλ. $2-2a\neq 0$, ή $a\neq 1$.

Εναλλακτικά με γραμμο-ισοδύναμους πίνακες παίρνουμε

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\a&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}r_2:=r_2-r_1\\r_3:=r_3-\frac{1}{a}r_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&1-2a&3a-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&3a-1-2(2a-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&-a+1\end{pmatrix}.$$

Άρα όλες οι στήλες έχουν μη-μηδενικά κύρια στοιχεία, οπότε $\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.

(A) Οπότε, για $a\neq 1$ το B είναι μια $\mathbb{R}^3$-βάση

(B) Εύρεση $(1,0,0)^T_B$, δηλ τις συντεταγμένες του $(1,0,0)^T$ ως προς βάση B, δηλ $(1,0,0)^T=x\bar{u}+y\bar{v}+z\bar{w}$.

Έχουμε λοιπόν,

$$(1,0,0)^T = x(1,1,a)^T + y(2,0,1)^T + z(3,-1,1)^T$$

$$= (x+2y+3z,\ a+2y-z,\ a+y+z)^T, \text{ δηλ.}$$

$$A\bar{x} = (1,0,0)^T,\quad \bar{x}=(x,y,z),\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Επειδή $D=|A|=2(1-a)$, με $a\neq 1$, δηλ. $D\neq 0$, οπότε
$\bar{x}=(x,y,z)^T$ μοναδική λύση με $x=Dx/D$, $y=Dy/D$ και $z=Dz/D$, όπου

$$Dx = |\bar{b}, \bar{a}_2\, \bar{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Dy = |\bar{a}_1, \bar{b}\, \bar{a}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(a+1)$$

$$Dz = |\bar{a}_1, \bar{a}_2\, \bar{b} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{(2+1)}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T = \dfrac{1}{2(1-a)}(1, -a-1, 1)^T$, $a\in\mathbb{R}-\{1\}$

(Γ) Έστω $(1,2,b)^T \in L\{(x,1,1)^T, (3,2,1)^T\}$, $b \in \mathbb{R}$. Τότε

$$x(1,1,1)^T + y(3,2,1)^T = (1,2,b)^T \quad , \quad ή$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} \quad , \text{ δηλ.}$$

$$\left.\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}' = \bar{b}' := (1,2)^T, \ \bar{x}' = (x,y)^T$$

$$x + y = b \ ^{(*)} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Έχουμε $D' = |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$. Άρα $\bar{x}' = (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ έχει μοναδική λύση

$$x = D'_x / D' \quad \text{και} \quad y = D'_y / D', \ \text{όπου}$$

$$D'_x = |\bar{b}' \ \bar{a}_2'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$D'_y = |\bar{a}_1, \bar{b}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Οπότε $x = 4$ και $y = -1$, και από την $(*)$ έχουμε $b = 3$.

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Έχουμε $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 - 3r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -14 & 8 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 + 7r_2}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Επειδή υπάρχουν 3 στήλες με μη-μηδενικά κύρια στοιχεία, τότε οι στήλες του A^T είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλ. οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Για τα διανύσματα-στήλες του A, έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}_{r_2 := r_2 - 5r_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}_{r_3 := r_3 - 1/2\, r_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα καθώς ο κλιμακωτός πίνακας στο τέλος έχει 3 κύρια στοιχεία.

Έχουμε επίσης $\text{rank}(A) = 3$, οπότε αντιστρέφεται καθώς $\text{rank}(A) = n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Παράδειγμα. Έστω

$$W_1 = \{(x_i) \in \mathbb{R}^4 / \ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\} \quad \mathbb{R}^4\text{-υπόχωρος},$$

$$W_2 := \{(x_i) \in \mathbb{R}^4 / \ 2x_3 + x_4 = 0\} \quad \mathbb{R}^4\text{-υπόχωρος}.$$

Για τον υπόχωρο W_1, έχουμε $W_1 \ni (x_i)^T = (x_1, 2x_3 - 2x_4, x_3, x_4)^T$, ή

$$(x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

οπότε $W_1 = L(\{(1,0,0,0)^T, (0,2,1,0)^T, (0,-2,0,1)^T\})$ και

$\dim W_1 = 3$, καθώς $\{(1,0,0)^T, (0,2,1,0)^T, (0,-2,0,1)^T\}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, επειδή για

$$\lambda_1(1,0,0,0)^T + \lambda_2(1,0,2,1)^T + \lambda_3(0,-2,0,1) = \bar{0}$$

έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (τετριμμένη λύση)

Για τον υποχώρο W_2 έχουμε $W_2 \ni (x_i)^T = (x_1, x_2, x_3, -2x_3)^T$, ή

$$(x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

οπότε $W_2 = L(\{(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,-2)^T\})$ με $\dim(W_2) = 3$ καθώς $\{(1,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,-2)^T\} \subset \mathbb{R}^4$ σύνολο γραμμικά ανεξ., όταν δηλαδή $\mathbb{R}^3$- βάση.

Για τον υποχώρο $W_1 \cap W_2$: $x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0$ και $2x_3 + x_4 = 0$ οπότε $W_1 \cap W_2$: $x_2 = 6x_3$ και $x_4 = -2x_3$ και έχουμε

$$W_1 \cap W_2 \ni (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 6x_3 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

και άρα $W_1 \cap W_2 = L(\{(1,0,0,0)^T, (0,6,1,-2)\})$ με $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ καθώς $B = \{(1,0,0,0)^T, (0,6,-2)\}^T$ $\mathbb{R}^4$- βάση, επειδή για

$$\lambda_1 (1,0,0,0)^T + \lambda_2 (0,6,1,-2)^T = \bar{0}$$

έχουμε την τετριμμένη λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Για τον υπόχωρο W_1+W_2 έχουμε

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2) = 3+3-2=4.$$

Επίσης $W_1+W_2 \subset W_1\cap W_2$ με κοινό διάνυσμα το $(1,0,0,0)^T$.
Ο πίνακας λοιπόν των στηλών που παράγουν τους W_1 και W_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{r_4:=r_4+2r_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα οι πρώτες 4 στήλες του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες οπότε $W_1+W_2=\mathbb{R}^4$ (καθώς $\dim\mathbb{R}^4=4$), ωστόσο $W_1\oplus W_2 \subset \mathbb{R}^4$ καθώς $W_1\cap W_2 \neq \{\bar{0}\}$

Έστω $\Delta = L\{(0,0,0,1)^T\}$, όπου $(0,0,1)^T \notin W_2$ καθώς τότε εάν $(0,0,0,1)\in W$, δηλ. εάν $\lambda_1(1,0,0,0)^T+\lambda_2(0,1,0,0)^T+\lambda_3(0,0,1,-2)^T=(0,0,0,1)^T$ ή $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,-2\lambda_3)^T=(0,0,0,1)^T$, τότε $0=-1/2$ (άτοπο). Άρα

$$W_2\cap\Delta=\{\bar{0}\}, \text{ δηλ. } \mathbb{R}^4 = W_2\oplus\Delta.$$

Άρα τα παραπάνω 4 διανύσματα είναι μια $\mathbb{R}^4$ βάση
Εναλλακτικά ο πίνακας των πρώτων 4 διανυσμάτων του αρχικού πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{r_4:=r_4+2r_3} \sim I_4$$

οπότε αυτές οι 4 στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{u}=(1,1,1)^T$, $\bar{v}=(2,1,1)^T$, $\bar{w}=(1,a,2)^T$, $a\in\mathbb{R}$.

(A) Έστω $B=\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}$ $\mathbb{R}^3$-βάση.

Έστω $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}+\nu\bar{w}=\bar{0}$, $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$\lambda(1,1,1)^T+\mu(2,1,1)^T+\nu(1,a,2)=\bar{0}$, δηλ. $A\bar{x}=\bar{0}$, $\bar{x}=(\lambda,\mu,\nu)$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&a\\1&1&2\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}$$

και για να είναι $\bar{x}=(0,0,0)$ θα πρέπει $|A|\neq 0$, δηλ.

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc}1&2&1\\1&1&a\\1&1&2\end{array}\right|\begin{array}{cc}1&2\\1&1\\1&1\end{array}=2-a\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 2.$$

(B) Έστω $\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}+\nu\bar{w}=(0,1,1)^T$, $a\in\mathbb{R}$, δηλ. $A\bar{x}=(0,1,1)^T:=\bar{b}$ με $\bar{x}=(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$. Για να είναι το σύστημα συμβιβαστό θα πρέπει $|A|\neq 0$ ή $D_\lambda=D_\mu=D_\nu=D=0$.

$$D_\lambda=|\bar{b}\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3|=\left|\begin{array}{ccc}0&2&1\\1&1&a\\1&1&2\end{array}\right|\begin{array}{cc}0&2\\1&1\\1&1\end{array}=2a-4$$

$$D_\mu=|\bar{a}_1,\bar{b},\bar{a}_3|=\left|\begin{array}{ccc}1&0&1\\1&1&a\\1&1&2\end{array}\right|\begin{array}{cc}1&0\\1&1\\1&1\end{array}=2-a$$

$$D_\nu = |\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2 - a$$

Άρα εάν $a \neq 2$ έχουμε μια $\bar{x} = (\lambda, \mu, \nu)$ για μοναδική λύση, δηλ.

$$\lambda = D_\lambda / D, \quad \mu = D_\mu / D \text{ και } \nu = D_\nu / D.$$

ενώ εάν $a = 2$ έχουμε $D = D_\lambda = D_\mu = D_\nu = 0$, δηλ. άπειρες λύσεις λ, μ, ν.
οπότε πάντοτε για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε λύσεις λ, μ, ν, δηλ.
$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} + \nu \bar{w} = (0,1,1)^T$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, δηλ. $(0,1,1) \in L(\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\})$.

Επομένως κάθε διάνυσμα $\bar{v} \in V$, V F-δ.χ. χαρακτηρίζεται από $n \in \mathbb{N}^*$ αριθμούς για κάθε αριθμημένη βάση $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ V-βάσης, και οι οποίοι είναι απλά οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}_i = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \dots + a_n\bar{e}_n$ με τους οποίους μπορεί να γραφεί μοναδικά ως προς την V-βάση B. Το μοναδικό αυτό n-διάνυσμα $(a_i) \in F^n$ (διατεταγμένη n-άδα) των (μοναδικών) συντελεστών $a_i \in F$, $i=1,2,\dots,n$, καλείται V-συντεταγμένες ως προς B-βάση ή διάνυσμα συντεταγμένων του $\bar{v} \in V$ ως προς βάση B και το συμβολίζουμε με $\bar{v}_B \in F^n$. (B-συντεταγμένες ή B-συνιστώσες).

Αν έχουμε λοιπόν μια B V-βάση $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset V$ και αναφερόμαστε στο $\bar{v}_B = (a_i) \in F^n$ τότε σημαίνει ότι $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{e}_i \in V$ και $(a_i) \in F^n$ είναι το n-διάνυσμα των συντεταγμένων του $\bar{v} \in V$. Κάθε (μοναδική) συνιστώσα $a_i \in F$ του $\bar{v}_B$ καλείται i-συντεταγμένη του $\bar{v} \in V$ ως προς βάση B.

Μια βάση V-βάσης $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n} \subset V$ ενός F-δ.χ. V καλείται V-ορθοκανονική βάση όταν $(\bar{e}_i)_B = (\delta_{ij}) \in F^n$, όπου $\{\delta_{ij}\} \subset F$ το δ του Kronecker, δηλ. $\delta_{ii} = 1$ και $\delta_{ij} = 0$ για $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n$. δηλ.

$$(\bar{e}_1)_B = (1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ στοιχεία}}), \quad (\bar{e}_2)_B = (0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ στοιχεία}}),$$

$$(\bar{e}_i)_B = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ στοιχεία}}), \text{ και } (\bar{e}_n)_B = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ στοιχεία}}, 1), \text{ με } 1 = 1_F, 0 = 0_F.$$

Ο τετραγωνικός πίνακας $(a_{ij}) \in F^{n \times n}$ καλείται B-πίνακας συντεταγμένων, όταν $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ μια V-βάση του F-δ.χ. V, και οι στήλες του $(a_{ij})_{n \times n}$ αποτελούνται από τα n-διανύσματα συντεταγμένων των n διανυσμάτων $\bar{e}_i$, $i=1,2,\dots,n$ της V-βάσης B, δηλ.

$(a_{ij}) = ((\bar{e}_1)_B \ (\bar{e}_2)_B \ \cdots \ (\bar{e}_n)_B) \in F^{n \times n}$

Αν για παράδειγμα ο πίνακας $E = (e_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ είναι ένας B-πίνακας συντεταγμένων (δηλ. ο πίνακας με στήλες τις n $(\bar{e}_i)_B \in F^n$, $i=1,2,\dots,n$) όπου $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, τότε

$$(\bar{e}_1)_B = (1,2)^T \in F^{2\times 1} \cong F^2, \quad (\bar{e}_2)_B = (-1,0) \in F^{2\times 1} \cong F^2.$$

Ο B-πίνακας μιας V-βάσης B ενός F-δ.χ. V, μας καθορίζει άμεσα από ποια διανύσματα $\bar{e}_i \in V, i=1,2,\dots,n$ αποτελείται η V-βάση $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, καθώς ο B-πίνακας συγκροτείται από τις στήλες $(\bar{e}_i)_B \in F^n$ των συντεταγμένων n-διανυσμάτων των διαν. $\bar{e}_i \in V, i=1,2,\dots,n$ της V-βάσης $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$. Προφανώς για άλλη V-βάση $B^*=\{\bar{e}_i^*\}_{i=1,2,\dots,n}$ θα έχουμε και άλλους B^*-πίνακες συντεταγμένων.

Παρατηρούμε ότι εάν $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ είναι μια V-ορθοκανονική βάση του F-δ.χ. V, τότε ο B-πίνακας συντεταγμένων αυτής $E=(e_{ij})\in F^{n\times n}$ θα είναι ο μοναδιαίος $I_n=(\delta_{ij})\in F^n$, όπου $\{\delta_{ij}\}_{i=1,2,\dots,n,\,j=1,2,\dots,n}$ το δ του Kronecker, δηλ. $e_{ij}=\delta_{ij}$, με $\delta_{ii}=1$ και $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots,n$.

Σαν αποτέλεσμα, για τον F-δ.χ. F^n (δηλ. το σύνολο των n-διανυσμάτων με στοιχεία του F), εάν μια F^n-βάση είναι ορθοκανονική, οπότε $I_n\in F^{n\times n}$ είναι ο B-πίνακας συντεταγμένων, τότε για $\bar{a}=(a_i)=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in F^n$, θα έχουμε

$$(\bar{a})=(a_1,a_2,\dots,a_n)=a_1(1,\underbrace{0,\dots}_{n-1})+a_2(0,1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-2})+\dots$$

$$+\,a_i(\underbrace{0,0,\dots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-i})+\dots$$

$$+\,a_n(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n-1},1)$$

δηλ. $\bar{a}_B=(a_1,a_2,\dots,a_n)_B=(a_1,a_2,\dots,a_n)=\bar{a}$, καθώς $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ με $\bar{e}_i=(\delta_{ij})=(\delta_{i1},\delta_{i2},\dots,\delta_{in})\in F^n$, $i=1,2,\dots,n$), όπου $I_n=(\delta_{ij})\in F^{n\times n}$.

Π.χ. εάν $\bar{a}=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3$, με $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,3}$ μια $\mathbb{R}^3$-ορθοκανονική βάση, τότε

$$\bar{a}=(1,2,3)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1),$$

δηλ. $(\bar{a})_B=(1,2,3)_B=(1,2,3)=\bar{a}$, καθώς ο B-πίνακας συντεταγμένων είναι ο I_3.

Γενικά, για τον F-δ.χ. F^n με F^n-βάση $B=\{\bar e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ και B-πίνακα συντεταγμένων $(e_{ij})\in F^{n\times n}$ το n-διάνυσμα $\bar\alpha=(\alpha_i)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in F^n$ γράφεται ως προς τη F^n-βάση B ως

$$\bar\alpha = \lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2+\dots+\lambda_n \bar e_n = \lambda_1(e_{11},e_{12},\dots,e_{1n})+\lambda_2(e_{21},e_{22},\dots,e_{2n}) + \dots + \lambda_n(e_{n1},e_{n2},\dots,e_{nn}),$$ οπότε

Εάν $\bar\alpha\in F^{n\times 1}\cong F^n$, με $\bar\alpha_B=(\lambda_1,\lambda_2)^T$, τότε

$$\bar\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^T=\lambda_1(e_1,e_{12},\dots,e_{1n})^T+\dots+\lambda_n(e_{n1},e_{n2},\dots,e_{nn})^T,$$ δηλ.

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\lambda_j,\quad i=1,2,\dots,n,$$ δηλ.

$$\bar\alpha=(e_{ij})\cdot(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)^T=(e_{ij})\cdot(\bar\alpha)_B^T,$$

όπου $E=(e_{ij})\in F^{n\times n}$ ο B-πίνακας των συντεταγμένων, οπότε $\bar\alpha_B=E^{-1}\cdot\bar\alpha$.

Π.χ. εάν $\bar\alpha=(1,2)$ με $E=(\bar e_1\ \bar e_2)=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}_{2\times 2}$ B-πίνακας συντεταγμένων της $\mathbb{R}^2$-βάσης $B=\{\bar e_1^T,\bar e_2^T\}$, $\bar e_1=(1,2)^T$, $\bar e_2=(0,1)^T$, τότε

$$\mathbb{R}^{2\times 1}\ni\bar\alpha=(1,2)^T=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$ όπου $(x,y)^T=(\bar\alpha)_B$.

άρα $$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+0y\\2x+y\end{pmatrix},$$ ή

$$\left\{\begin{array}{l}1=-x\\2=2x+y\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=2-2x=2-2(-1)=4\end{array}\right.,$$ οπότε

$$(1,2)_B^T=(x,y)^T=(-1,4)^T.$$

Εναλλακτικά, $$(1,2)_B^T=E^{-1}\cdot(1,2)^T=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{(-1)\cdot 1-2\cdot 0}\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

δηλ. $(1,2)_B^T=(-1,4)^T$.

Σημείωση. Έστω $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων του F-δ.χ. V. Έστω $E = \left((\bar{v}_1)_B^T \ (\bar{v}_2)_B^T \cdots (\bar{v}_k)_B^T \right) \in F^{n\times n}$ ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες $(v_i)_B$, $i=1,2,\dots,k$ ως προς μια V-βάση. Τότε $B_k = \{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ είναι μια $L(\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots,n})$-βάση. Τότε εάν $\bar{x} \in \bar{V}_k$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$, τότε

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{e}_i, \quad \text{οπότε } b_i = a_i, \ i=1,2,\dots,k, \ \text{όπου } B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$$

Αλλαγή Διανυσματικής Βάσης

Έστω V F-δ.χ. με B μια V-ορθογώνια βάση αυτού, δηλ. με διανύσματα βάσης $B=\{\bar e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ όπου $(\bar e_i)_B = (\delta_{ij})_{j=1}^{n} \in F^n$, δηλ. ο B-πίνακας συντεταγμένων E_B της βάσης B είναι $E_B = ((\bar e_1)_B^T\ (\bar e_2)_B^T \cdots (\bar e_n)_B^T) = ((\delta_{1j})^T\ (\delta_{2j})^T \cdots (\delta_{nj})^T) = (\delta_{ij})_{n\times n} = I_n$

Αν λοιπόν $\bar v \in V$, τότε στην ορθ. βάση B, γράφεται ως

$$\bar v = v_1\bar e_1 + v_2\bar e_2 + \dots + v_n\bar e_n, \text{ δηλ. } \bar v_B = (v_i)_{i=1}^{n} \in F^n, \text{ ή}$$

$$\bar v = \sum_{i=1}^{n} v_i\bar e_i, \text{ με, δηλ. } (v_i)_{n\times 1} = E_B\cdot(\bar v)_B = I_n\cdot(\bar v_B) = (\bar v)_B.$$

Εάν $B'=\{\bar e_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$ μια άλλη V-βάση με $B'\neq B$, τότε έστω $(\bar v)_{B'} = (v_i')\in F^{n\times 1}$, δηλ. $(v_i')_{n\times 1}$ η στήλη των νέων συντεταγμένων της $\bar v\in V$ ως προς τη βάση B'.

Εάν $E_{B'} = (e_{ij}')_{n\times n}$ ο πίνακας συντεταγμένων της βάσης B' ως προς μια ορθ. βάση (την B), δηλ. $E_{B'} = ((\bar e_1')_B^T\ (\bar e_2')_B^T \cdots (\bar e_n')_B^T)_{n\times n}$, και καθώς $E_{B'} = (e_{ij}')\in F^{n\times n}$

$$\bar e_i' = e_{i1}\bar e_1 + e_{i2}\bar e_2 + \dots + e_{in}\bar e_n = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\bar e_j, \quad i=1,2,\dots,n,$$

οπότε για $(\bar v)_B = (v_i')_{n\times 1}$ (στήλη των συντεταγμένων ως προς τη νέα βάση B'), έχουμε

$$\bar v = v_1'\bar e_1' + v_2'\bar e_2' + \dots + v_n\bar e_n' = \sum_{i=1}^{n} v_i'\bar e_i' = \sum_{i=1}^{n} v_i'\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\bar e_j = \sum_{i,j=1}^{n}(v_i'\cdot e_{ij})\bar e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i' e_{ij}\Big)\bar e_j, \text{ δηλ.}$$

$(\bar v_B) = (v_i)_{n\times 1}$, $v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i' e_{ij}$, $i=1,2,\dots,n$, οπότε $(v_i)_{n\times 1} = E_{B'}\cdot(v_i')_{n\times 1}$.

Επομένως, εάν $(\bar v)_B = (v_i)_{n\times 1}$ και $(\bar v_{B'}) = (v_i')_{n\times 1}$ οι στήλες των συντεταγμένων του $\bar v\in V$ ως προς βάσεις B (ορθ.) και B', τότε $(\bar v)_B = E\cdot(\bar v)_{B'}$, όπου ο $E=(e_{ij})_{n\times n}$ αποτελείται από στήλες των συντεταγμένων των διανυσμάτων της νέας βάσης $B'=\{\bar e_i'\}$ ως προς την αρχική (ορθ.) βάση.

Άρα $(\bar v)_B = E^{-1}(\bar v)_B\cdot(\bar v)_B$, με $E^{-1}\in F^{n\times n}$ καθώς $B'=\{\bar e_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$ V-βάση.

Σημείωση. Κατά την αλλαγή (διανυσματικών) βάσεων από $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ (αρχική) σε $B'=\{\bar{e}'_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ δεν είναι απαραίτητο η (αρχική) βάση B να είναι ορθοκανονική αρκεί να γνωρίζουμε τον πίνακα $E_{B'}$, δηλ. τις στήλες $(\bar{e}'_i)_B$, $i=1,2,\dots,n$, δηλ. τις στήλες των συντεταγμένων των διανυσμάτων $\bar{e}'_i$, $i=1,2,\dots,n$ της νέας βάσης B' ως προς την (αρχική) βάση B.

Σημείωση. Έστω B V-βάση του F-δ.χ. V. Ο πίνακας E_B των συντεταγμένων (ως στήλες) των διανυσμάτων $\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ της βάσης $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ ως προς τη βάση B, δηλ. ο $E_B=((\bar{e}_1)_B\ (\bar{e}_2)_B \cdots (\bar{e}_n)_B)=(e_{ij})\in F^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος, καθώς για δεδομένη βάση $B=\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, ο E_B είναι δεδομένος ο οποίος εν γένει είναι διαφορετικός από τον $E_{B'}$, όπου B V-βάση, $B'\neq B$. Επειδή λοιπόν $(\bar{v})_{B'}\in F^{n\times 1}$ είναι μοναδικό για τη βάση B' και $(\bar{v})_B$ μοναδικό για τη βάση B, και καθώς $(\bar{v})_B = E_{B'}\cdot(\bar{v})_{B'}$, το $E_{B'}$ είναι αντιστρέψιμος γιατί $(\bar{v})_B\in F^{n\times 1}$ (πάντα υπάρχει το διάνυσμα των συντεταγμένων $(\bar{v})_B$ του $\bar{v}\in V$ ως προς βάση B, οπότε E_B είναι προφανώς και αυτός αντιστρέψιμος καθώς $(\bar{v})_B = E_B\cdot(\bar{v})_B\cdot(\bar{v})_{B'}$ όπου $(\bar{v})_B, (\bar{v})_{B'}\in F^{n\times 1}$ (υπάρχουν πάντα και είναι μοναδικά).

Γενικότερα, εάν $A_k=\{\bar{a}_i\}_{i=1,2,\dots,k}\subset V$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων με $\dim(L\{\bar{a}_i\}_{i=1,2,\dots,k})=k\le\dim(V)$, τότε A_k είναι βάση του υποχώρου $L\{\bar{a}_i\}_{i=1,2,\dots,n})\subset V$, οπότε $E_{A_k}=((\bar{a}_1)_{A_k}\ (\bar{a}_2)_{A_k}\cdots(\bar{a}_k)_{A_k})=(a_{ij})$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε A_k, $k\in\mathbb{N}_1^{\dim(V)}$. Άρα, οι πίνακες με στήλες τις συντεταγμένες γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων A_k με $\dim(A_k)=k\le\dim(V)$, τότε αυτοί είναι αντιστρέψιμοι.

Στην ειδική περίπτωση του $V=F^k$ δ.χ., τότε οι πίνακες με στήλες $k\le\dim(V)$ γραμμικά ανεξάρτητα k-διανύσματα $\bar{a}_i=(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{ki})\in F^{k\times 1}$, $i=1,2,\dots,k$, του F^k, είναι αντιστρέψιμοι, καθώς $(\bar{a}_i)_{A_k}=(a_i)^T$, όπου $A_k:=\{\bar{a}_i\}_{i=1,2,\dots,k}$.

Παράδειγμα. Έστω $\bar{u}_B=(2,1)$ και $\bar{v}_B=(0,3)$, όπου B V-βάση, $\dim(V)=2$

Εφόσον $\dim V=2$, τότε $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων
Άρα $\bar{u}=2\bar{e}_1+1\bar{e}_2=2\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{v}=0\cdot\bar{e}_1+3\bar{e}_2=3\bar{e}_2$
Έλεγχος ανεξαρτησίας $\{\bar{u},\bar{v}\}$. Έστω

$$a\bar{u}+b\bar{v}=\bar{0}, \quad \text{ή} \quad a(2\bar{e}_1+\bar{e}_2)+b(3\bar{e}_2)=\bar{0}, \quad \text{ή}$$

$$(2a)\bar{e}_1+(a+3b)\bar{e}_2=0, \quad \text{δηλ.}$$

$$\begin{cases} 2a=0, \\ a+3b=0, \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0, \end{cases}$$

καθώς $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων, οπότε έχουμε ότι $\{\bar{u},\bar{v}\}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, δηλ. $\{\bar{u},\bar{v}\}$ V-βάση

Έστω λοιπόν $B'=\{\bar{u},\bar{v}\}$ μια νέα V-βάση. Τότε ο πίνακας των συντεταγμένων των $\{\bar{u},\bar{v}\}$ είναι $E_B=(\bar{u}_B\ \bar{v}_B)=\begin{vmatrix}2&0\\1&3\end{vmatrix}$ (πίνακας αλλαγής βάσης). Τότε, οι συντεταγμένες των $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ ως προς την νέα βάση B' θα είναι

$$(\bar{e}_i)_B=E_B\cdot(\bar{e}_i)_{B'},\ i=1,2, \quad \text{ή} \quad (\bar{e}_i)_{B'}=E_B^{-1}(\bar{e}_i)_B,\ i=1,2,$$

και καθώς $E_B^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=1/(2\cdot3-1\cdot0)\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}=1/6\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}$ με $(\bar{e}_1)_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $(\bar{e}_2)_B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, τότε

$$(\bar{e}_1)_{B'}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (\bar{e}_2)_{B'}=1/6\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1/6\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

και άρα $\bar{e}_1=\frac{1}{2}\bar{u}-\frac{1}{6}\bar{v}$ και $\bar{e}_2=0\cdot\bar{u}+\frac{1}{3}\bar{v}=\frac{\bar{v}}{3}$

Εναλλακτικά, $\bar{e}_1=a\bar{u}+b\bar{v}$ και $\bar{e}_2=\gamma\bar{u}+\delta\bar{v}$, $a,b,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, δηλ.

$$\bar{e}_1=a(2\bar{e}_1+\bar{e}_2)+b(3\bar{e}_2) \quad \text{και} \quad \bar{e}_2=\gamma(2\bar{e}_1+\bar{e}_2)+\delta(3\bar{e}_2),$$

οπότε, καθώς $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ γραμμικά ανεξάρτητα οι συντελεστές στα δύο μέλη εξισώνονται, δηλ.

$$\begin{cases} 1 = 2a \\ 0 = a + 3b \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 0 = 2\gamma \\ 1 = \gamma + 3\delta \end{cases}, \text{ δηλ. } a = 1/2,\ b = -1/6,\ \gamma = 0,\ \delta = -1/3.$$

Άρα $\bar{e}_1 = a\bar{u} + b\bar{v} = \frac{1}{2}\bar{u} - \frac{1}{6}v$ και $\bar{e}_2 = \gamma\bar{u} + \delta\bar{v} = 0 \cdot \bar{u} - \frac{1}{3}\bar{v}$.

Παράδειγμα. Έστω $\{\bar{u},\bar{v}\}$ V-βάση από V F-δ.χ. με $\bar{u}_B=(2,1)$, $\bar{v}_B=(0,3)$ με $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ V-βάση.

Ο πίνακας των αναστραμμένων στηλών $\hat{E}_B$ των διανυσμάτων $\{\bar{u},\bar{v}\}$ είναι
$\hat{E}_B = (\bar{u}_B \ \bar{v}_B) = ((2,1)^T \ (0,3)^T)$.

Από το προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η $B':=\{\bar{u},\bar{v}\}$ είναι όντως V-βάση. Έστω $\bar{a}\in V$, με $(\bar{a})_B=(1,1)$. Για την εύρεση των $\bar{a}_{B'}$, ισχύει ότι

$$\bar{a}_B = \hat{E}_B\cdot\bar{a}_{B'}, \quad \text{δηλ.} \quad \bar{a}_{B'} = \hat{E}_B^{-1}\cdot\bar{a}_B, \quad \text{οπότε}$$

$$\bar{a}_{B'} = \begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1/6\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1/6\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Εναλλακτικά, $\bar{a} = 1\cdot\bar{e}_1 + 1\cdot\bar{e}_2 = \kappa\bar{u} + \lambda\bar{v} = \kappa(2\bar{e}_1+\bar{e}_2) + \lambda(0\bar{e}_1+3\bar{e}_2)$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές από τα δύο μέλη των $\bar{e}_1$ και $\bar{e}_2$ (καθώς $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ είναι V-βάση), έχουμε τα εξής

$$\begin{cases}1 = 2\kappa\\ 1 = \kappa+3\lambda\end{cases} \quad \text{δηλ.} \quad \begin{cases}\kappa = 1/2\\ \lambda = 1/6\end{cases}, \quad \text{οπότε}$$

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{6}\bar{v}$$

Έστω $\bar{a}_{B'} := (1,1)$. Για να υπολογιστεί το $\bar{a}_B$ (ως προς την αρχ. βάση B), ισχύει ότι
$\bar{a}_B = \hat{E}_B\cdot\bar{a}_B = \begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (2,4)^T$

Εναλλακτικά, $\bar{a} = 1\cdot\bar{u} + 1\cdot\bar{v} = \bar{u}+\bar{v} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + (3\bar{e}_2) = \kappa\bar{e}_1 + \lambda\bar{e}_2$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και εξισώνοντας κατά μέλη τους συντελεστές των $\bar{e}_1$ και $\bar{e}_2$ (καθώς B V-βάση).

$$\begin{cases}\kappa = 2\\ \lambda = 1+3 = 4\end{cases}, \quad \text{οπότε} \quad \bar{a}_B = (2,4).$$

Σημείωση. Στην περίπτωση $V = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^{2\times 1}$, τότε έστω $\bar{u} := (2,1)^T$, $\bar{v} = (0,3)^T$.
Θεωρώντας την συν. βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\bar{e}_1 = (1,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1)$ (οπότε και $(\bar{e}_i)_B = \bar{e}_i$, $i=1,2$), τότε $B' := \{\bar{u}, \bar{v}\}$ $\mathbb{R}^2$-βάση καθώς εάν

$a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$, δηλ. $a(2,1)^T + b(0,3)^T = (0,0)^T$, ή

$(2a, a)^T + (0, 3b)^T = (0,0)^T$, ή $(2a, a+3b) = (0,0)^T$, δηλ.

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}, \text{ δηλ. } a = b = 0.$$

Άρα $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ σύνολο γραμμ. ανεξάρτ. διαν. και καθώς $\dim(L(B')) = 2 = \dim V$, τότε B' V-βάση.

Εάν $\bar{a} \in V$, τότε $\bar{a}_B = E_B \cdot \bar{a}_{B'}$, όπου $E_B := (\bar{u}\ \ \bar{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ο πίνακας των συντεταγμένων των $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ (πίνακας αλλαγής βάσης).

Εάν $\bar{a} = (1,1)^T = (\bar{a})_B$, τότε $(1,1)^T = E_B\, \bar{a}_{B'}$, δηλ.

$$\bar{a}_{B'} = E_B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/6 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix}.$$

Εναλλακτικά, $\bar{a} = (1,1) = \kappa \cdot \bar{u} + \lambda \bar{v} = \kappa(2,1)^T + \lambda(0,3) = (2\kappa, \kappa + 3\lambda)$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε $1 = 2\kappa$ και $1 = \kappa + 3\lambda$, $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$, ή $\kappa = 1/2$, $\lambda = -1/6$

Εάν $\bar{a}_{B'} = (1,1)^T$, τότε $\bar{a}_B := E_B \cdot \bar{a}_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,4)^T$

Εναλλακτικά, $\bar{a} = 1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} = (2,1)^T + (0,3)^T = (2,4)^T$.

Παράδειγμα. Έστω $(\bar{u}_1)_B = (3,0,-6)$, $(\bar{u}_2)_B = (-4,1,7)$, $(\bar{u}_3)_B = (-2,1,5)$, όπου B V-βάση, με $\dim V = 3$, με $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \in V$.

Έστω $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,3}$, καθώς $\dim V = 3$.
Έστω $a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3 = \bar{0}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,3$, δηλ.

$$a_1(3\bar{e}_1 - 6\bar{e}_3) + a_2(-4\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 7\bar{e}_3) + a_3(-2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 5e_3) = \bar{0} \quad , \text{ ή}$$

$$(3a_1 - 4a_2 - 2a_3)\,\bar{e}_1 + (a_2 + 2a_3)\,\bar{e}_2 + (-6a_1 + 7a_2 + 5a_3)\,\bar{e}_3 = \bar{0},$$

και καθώς $\{\bar{e}_i\}_{i=1,2,3}$ V-βάση, θα πρέπει

$$\left.\begin{cases} 3a_1 - 4a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \quad (2) \\ -6a_1 + 7a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3a_1 - 4a_2 + 2a_2 = 0 \\ -6a_1 + 7a_2 - 5a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 - 2a_2 = 0 \\ -6a_1 + 2a_2 = 0, \end{cases}$$

οπότε $a_1 = a_2 = 0$ και λόγω (2), έπεται $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Άρα $B = \{\bar{e}_i\}_{i=1,2,3}$ V-βάση καθώς $\dim V = 3$.

Εναλλακτικά, θεωρώντας $E_B = \left((\bar{u}_1)_B^T \;\; (\bar{u}_2)_B^T \;\; (\bar{u}_3)^T \right) = (B)_{B_0}$, B_0 $\mathbb{R}^3$ καν. βάση.

$$E_B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

οπότε το ΣΓΕ $(*)$ έχει τη μορφή $E_B\,\bar{a} = \bar{0}$, $a = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ (ομογενές ΣΓΕ). Για να έχει το σύστημα αυτό την τετριμμένη (μηδενική) λύση, δηλ. για να είναι το $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων, θα πρέπει $|E_B| \neq 0$.

Άρα, εάν έχουμε $\bar{x} = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3$ (συμβολισμένο ως προς την βάση B), δηλ. $(\bar{x})_B = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ τότε $\bar{x}_{B_0} = E_B \cdot (x,y,z)^T$, όπου B_0 μια (αρχική) βάση της V, συνήθως η κανονική βάση της V. Προφανώς, $(\bar{x})_{B_0} = E_{B_0} \cdot (x)_{B_0}$, καθώς $E_{B_0} = I_3$. Γενικά $(\bar{x})_B = (B')_B \cdot (\bar{x})_{B'}$.

Το διάνυσμα $\bar{x}$ είναι το $x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3 = x(3,0,-6) + y(-4,1,7) + z(-2,1,5)$
$= (3x-4y-2z,\ y+z,\ -6x+7y+5z) \in \mathbb{R}^3$ εκφραζόμενο ως προς την κανονική βάση B_0,

$$\bar{x} = (3x-4y-2z)\cdot(1,0,0) + (y+z)(0,1,0) + (-6x+7y+5z)(0,0,1)$$
$$= (3x-4y-2z)\bar{e}_1 + (y+z)\bar{e}_2 + (-6x+7y+5z)\bar{e}_3$$

όπου $B_0 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ κανονική βάση, οπότε

$$(\bar{x})_{B_0} = (3x-4y-2z,\ y+z,\ -6x+7y+5z),$$

επαληθεύοντας ότι $(\bar{x})_{B_0} = E_B \cdot (\bar{x})_B = E_B \cdot (x,y,z)^T$!

Εάν τώρα $\bar{x} = (x,y,z) = \alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2 + \gamma\bar{u}_3 = \alpha(3,0,-6) + \beta(-4,1,7) + \gamma(-2,1,7)$
$= (3\alpha - 4\beta - 2\gamma,\ \beta+\gamma,\ -6\alpha + 7\beta + 5\gamma)$, δηλ.

$$\bar{x} = E_B \cdot (\alpha,\beta,\gamma)^T,$$

ή αναλυτικά $\bar{x} = (x,y,z) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 = (\bar{x})_{B_0} = E_B \cdot (\bar{x})_B = E_B \cdot (\alpha,\beta,\gamma)$, οπότε

$$(\alpha,\beta,\gamma)^T = E_B^{-1} \cdot (x,y,z)^T$$

είναι οι συντεταγμένες ως προς τη βάση $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, οι οποίες υπάρχουν πάντα καθώς $|E_B| \neq 0$ λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων της B (που ισοδυναμεί με την γραμμική ανεξαρτησία των συντεταγμένων διανυσμάτων των διανυσμάτων της βάσης B).

Έστω B, B' V-βάσεις, V F-δ.χ., $\dim V = n \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $B=\{\bar e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $B'=\{\bar e_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\bar e_i, \bar e_i' \in V$, $i=1,2,\dots,n$. με πίνακες συντεταγμένων E_B και $E_{B'}$ εκφρασμένων ως προς μία κοινή βάση $B_0 \subset V$ π.χ. η κανονική βάση του V
δηλ. $E_B = (B)_{B_0} = ((\bar e_1)^T_{B_0} (\bar e_2)^T_{B_0}, \dots (\bar e_n)^T_{B_0})$, $E_{B'} = (B')_{B_0} = ((\bar e_1')^T_{B_0} (\bar e_2')^T_{B_0} \cdots (\bar e_n')^T_{B_0})$ με $|E_B|, |E_{B'}| \neq 0$.

Έστω $\bar x \in V$. Τότε, $(x_i)_{i=1}^n = (\bar x)_{B_0} = E_B \cdot \bar x_B$ και $(x_i)_{i=1}^n = \bar x_{B_0} = E_{B'} \cdot \bar x_{B'}$, οπότε
οπότε $\bar x_{B'} = (E_{B'})^{-1} \cdot \bar x_{B_0}$ και επειδή $\bar x_{B_0} = E_B \cdot \bar x_B$, έχουμε τελικά,

$$\bar x_{B'} = (E_{B'})^{-1} \cdot (E_B \cdot \bar x_B) = (E_{B'}^{-1} \cdot E_B) \cdot \bar x_B$$

δηλ. εάν $\bar x_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\bar x_B = (x_1', x_2', \dots, x_n') \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$(x_1', x_2', \dots, x_n')^T = (E_{B'}^{-1} \cdot E_B) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Παράδειγμα. Έστω $B = \{\bar u, \bar v\}$, $B' = \{\bar u', \bar v'\}$ με $\bar u = \bar e_1 + 2\bar e_2$, $\bar v = \bar e_1 - \bar e_2$ και
όπου $u' = \bar e_1 + \bar e_2$ και $\bar v' = 3\bar e_2$, όπου $B_0 = \{\bar e_1, \bar e_2\}$ V-βάση.

Άρα, $\bar u_{B_0} = (1,2)$, $\bar v_{B_0} = (1,-2)$ και $u'_{B_0} = (1,1)$, $v'_{B_0} = (0,3)$
Έστω $\bar x_B = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $\bar x_{B'} = (x',y') \in \mathbb{R}^2$.
Τότε $(x',y')^T = (E_{B'}^{-1} \cdot E_B) \cdot (x,y)^T$, όπου $E_B = (\bar u_{B_0}\ \ \bar v_{B_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
και $E_{B'} = (\bar u'_{B_0}, \bar v'_{B_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, με $|E_B| = -1-2 = -3 \neq 0$ και $|E_{B'}| = 3-0 = 3 \neq 0$.

Έχουμε, $(E_{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = 1/|E_{B'}| \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, οπότε

$$E_{B'}^{-1} \cdot E_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & -1 \cdot 1 + (-1)(-1) \\ (-2) \cdot 1 + 1(-1) & -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Άρα, $(x',y')^T = -\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -\begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$

π.χ. εάν $(x,y) = (1,1)$ είναι οι συντεταγμένες του $\bar x$ ως προς τη βάση B
τότε $(x',y')^T = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = (-1,-2)^T$ είναι οι συντεταγμένες του $\bar x$ ως προς τη βάση B'.

Παράδειγμα. Έστω $\bar u, \bar v \in \mathbb{R}^2$, $\bar u = (1,2)$, $\bar v = (1,-1)$ και $u', v' \in \mathbb{R}^2$, $u' = (1,1)$, $v' = (0,3)$

Έστω $B = \{\bar u, \bar v\}$ με $E_B = (\bar u^T\ \bar v^T) = (\bar u_{B_0}^T\ \bar v_{B_0}^T) = \begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ με $|E_B| = -1-2 = -3 \neq 0$
και $B' = \{\bar u', \bar v'\}$ με $E_{B'} = (\bar u'^T\ \bar v'^T) = (\bar u'^T_{B_0}\ \bar v'^T_{B_0}) = \begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}$ με $|E_{B'}| = 3 \neq 0$
όπου B_0 $\mathbb{R}^2$-κανονική βάση δηλ. $B_0 = \{\bar e_1, \bar e_2\}$, $\bar e_1 = (1,0)$ και $\bar e_2 = (0,1)$.

Έστω $\bar x \in \mathbb{R}^2$, με $\bar x_B = (x,y) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $\bar x_{B'} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.
Άρα $(x', y')^T = (E_{B'}^{-1} \cdot E_B) \cdot (x,y)^T$.

Π.χ. Εάν $\bar x_B = (2,3)$, τότε $\bar x_{B'} = (x', y')^T = (E_{B'}^{-1} \cdot E_B)\cdot(x,y)^T = -\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
δηλ. $(x', y')^T = \begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = (-1\cdot 2 + 0\cdot 3,\ 1\cdot 2 + 1\cdot 3)^T = (-2, 5)^T$.

Τότε, το $\bar x = E_B \cdot (2,3)^T$, καθώς $\bar x = (x,y) = \bar x_{B_0}$ με B_0 $\mathbb{R}^2$-κανονική βάση
και $\bar x = E_{B'} \cdot (a,b)^T$, εάν $\bar x_{B'} = (a,b)^T$, $a,b \in \mathbb{R}$, δηλ. $(a,b)^T = E_{B'}^{-1} \cdot \bar x^T$ για $\bar x \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση. Έστω $\bar u, \bar v, \bar w \in \mathbb{R}^3$, με $\bar u = (1,0,3)$, $\bar v = (0,-1,3)$ και $\bar w = (1,1,\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Έστω $\bar u', \bar v', \bar w' \in \mathbb{R}^3$, με $\bar u = (0,2,3)$, $\bar v = (1,0,2)$ και $\bar w = (\alpha,1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(α) Βρείτε τις $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $B = \{\bar u, \bar v, \bar w\}$ και $B' = \{\bar u', \bar v', \bar w'\}$
να είναι δύο $\mathbb{R}^3$-βάσεις με $B \neq B'$.

(β) Έστω B και B' δύο συγκεκριμένες βάσεις με $B \neq B'$.
Εάν $\bar x_B = (1,4,3)$ το διάνυσμα των συντεταγμένων ως προς τη βάση B,
τότε ποιο το διάνυσμα των συντεταγμένων, $\bar x_{B'}$, της $\bar x$ ως προς τη βάση B'.

(γ) Ποιο το $\bar x \in \mathbb{R}^3$ με $\bar x_B = (1,4,3)$.

(δ) Ποιο το $\bar x_{B'}$ εάν $\bar x = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$.