2. Συστήματα Γραμμικών Συναρτήσεων

2.1 Συστημα 2x2

Όλοι έχουμε δει και λύσει με κάποιες μεθόδους ένα σύστημα 2×2

$$a_{11}x_1 + \alpha_{12}\, x_2 = b_1$$

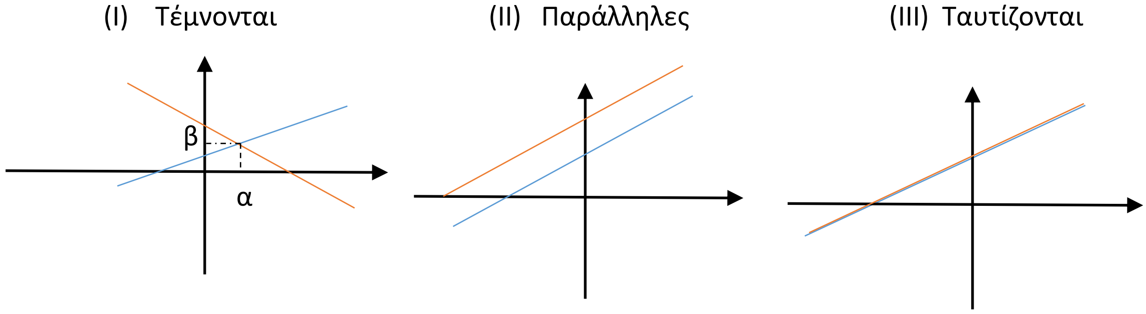
$$(2.1)$$

$$a_{21}x_1 + \alpha_{22}\, x_2 = b_2$$

Εδώ x_1, x_2 είναι οι άγνωστοι και a_{ij}, b_i είναι σταθερές στον $\mathbb{R}$. Πρόκειται για δύο γραμμικές εξισώσεις του τύπου (1). Οι πρώτοι δείκτες μας λένε σε ποιά εξίσωση αναφερόμαστε. Οι δεύτεροι δείκτες του a_{ij} (το j) αναφέρονται στους αγνώστους, π.χ. το a_{21} μας λέει ότι είναι η σταθερά που βρίσκεται στην δεύτερη εξίσωση και είναι συντελεστής του πρώτου άγνωστου δηλ. του x.

2.2 Μια γεωμετρική ερμηνεία του συστήματος 2x2

Όπως ξέρουμε κάθε γραμμική εξίσωση αναπαρίσταται με μια ευθεία. Οπότε το σύστημα αναπαρίσταται με δύο ευθείες. Υπάρχουν τρείς μόνο δυνατές θέσεις των ευθειών.



Η περίπτωση (I) σημαίνει ότι το σημείου του επιπέδου (α, β) ανήκει και στις δύο ευθείες. Ισοδύναμα αν θέσουμε $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta$ ταυτόχρονα και στις δύο εξισώσεις αυτές θα πρέπει να επαληθεύονται δηλ. $a_{11}\alpha + \alpha_{12}\,\beta = b_1$ και $a_{21}\alpha + \alpha_{22}\,\beta = b_2$. Με άλλα λόγια $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος. Η περίπτωση (II) σημαίνει ότι οι δύο ευθείες, αφού είναι παράλληλες, δεν τέμνονται οπότε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Η περίπτωση (III) σημαίνει ότι όλα τα σημεία της μίας ευθείας ανήκουν και στην άλλη ευθεία, οπότε όλες οι λύσεις της μίας εξίσωσης είναι και λύσεις της άλλης. Έτσι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αόριστο. Σε αυτήν την περίπτωση όπως έχουμε δει μπορεί οι εξισώσεις να είναι διαφορετικές και παρόλα αυτά να αναπαρίστανται με την ίδια ευθεία π.χ. $3x_1 + 7x_2 = 5$ και $6x_1 + 14\,x_2 = 10$.

2.3 Επίλυση Συστήματος 2x2

Γνωρίζετε να λύνεται τέτοια συστήματα με την μέθοδο της αντικατάστασης η οποία είναι αποτελεσματική για συστήματα 2x2. Εδώ θα συζητήσουμε μια γενικότερη μέθοδο που καταλήγει σε αλγόριθμο και σε πρόγραμμα υπολογιστή. Αυτή δουλεύει αποτελεσματικά για όλα τα συστήματα συμπεριλαμβανομένων συστημάτων με διαστάσεις διαφορετικές nxm.

Για τα συστήματα 2x2 σκοπός της μεθόδου είναι να μετασχηματίσει ένα σύστημα, σαν το (2.1) , σε ένα ισοδύναμο σύστημα (δηλ. ένα σύστημα που έχει την ίδια λύση με το (2.1)) και είναι της μορφής

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0\,x_2 &= c_1 \\ 0x_1 + 1\,x_2 &= c_2 \end{aligned}$$

Οπότε η λύση θα δίνεται αυτόματα δηλ. $x_1 = c_1$ και $x_2 = c_2$.

2.3 Μέθοδος επίλυσης συστημάτων 2x2 με την απαλοιφή Gauss-Jordan.

Ας καλέσουμε E_1 και E_2 την 1^{η} και την 2^{η} εξίσωση του συστήματος (2.1) αντίστοιχα, και ας το συμβολίζουμε σύντομα σαν $(\mathrm{E}_1 : \mathrm{E}_2)$.

Η αλγεβρική επίλυση του συστήματος $(\mathrm{E}_1 : \mathrm{E}_2)$ στηρίζεται στην αρχή:

Μπορώ να προσθέσω δύο ισότητες κατά μέλη και το αποτέλεσμα θα είναι μια νέα ισότητα. Επειδή όταν πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό προκύπτει επίσης ισότητα, μπορώ να προσθέσω σε μία ισότητα ένα πολλαπλάσιο μίας άλλης και το αποτέλεσμα θα είναι πάλι ισότητα.

Επειδή δουλεύουμε μόνο με τις σταθερές a_{ij}, b_i γράφουμε το σύστημα (2.1) σαν

$$\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & b_2 \end{array}$$

και τον καλούμε επ' αυξημένο πίνακα. Η πρώτη γραμμή αντιπροσωπεύει την E_1 και η δεύτερη την E_2.

Η επίλυση του συστήματος με τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss-Jordan προκύπτει από τα παρακάτω βήματα:

Gauss

1. Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της E_1 (πιο σύντομα την E_1) μέ τον αντίστροφο του α_{11} δηλ. $\frac{1}{\alpha_{11}}$. Τότε η εξίσωση E_1 θα γίνει $\mathrm{E}_1' = \frac{1}{\alpha_{11}}\mathrm{E}_1$. Τώρα η E_1' θα έχει στην θέση του α_{11} τον $\alpha_{11}' = \mathbf{1}$. Δηλαδή $\mathrm{E}_1' = \left(\mathbf{1} \quad \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \;\middle|\; \frac{b_1}{\alpha_{11}}\right)$. Ας την καλέσουμε $\mathrm{E}_1' = (1 \quad \alpha_{12}' \quad | \, b_1')$.

2. Πολλαπλασιάζω την E_1' (και τα δύο μέλη) με τον αντίθετο του α_{21} δηλ. τον $-\alpha_{21}$ και την προσθέτω στην E_2. Η εξίσωση E_2 θα γίνει $\mathrm{E}_2' = \mathrm{E}_2 + (-\alpha_{21})\mathrm{E}_1'$. Τώρα η E_2' θα έχει στην θέση του α_{21} τον $\alpha_{21}' = 0$. Το καινούγιο σύστημα με εξισώσεις τις $(\mathrm{E}_1'$:$\mathrm{E}_2')$ θα έχει την ίδια λύση με αυτήν του $(\mathrm{E}_1 : \mathrm{E}_2)$ (γιατί;)

3. Ας καλέσουμε την $\mathrm{E}_2' = (0 \quad \alpha_{22}' \quad | \, b_2')$. Εάν το $\alpha_{22}' = 0$ και το $b_2' = 0$ το σύστημα θα είναι αόριστο. Εάν το $\alpha_{22}' = 0$ και το $b_2' \neq 0$ το σύστημα θα είναι αδύνατο.

Jordan

4. Εάν το $\alpha_{22}' \neq 0$ κάνω τα ίδια βήματα (1-3) ξεκινώντας από την E_2'. Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της E_2' με τον αντίστροφο του α_{22}' δηλ. $\frac{1}{\alpha_{22}'}$ και την καλώ $\mathrm{E}_2'' = \frac{1}{\alpha_{22}'}\mathrm{E}_2'$. Τώρα η E_2'' θα έχει στην θέση του α_{22}' το α_{22}'' =1.

5. Κατόπιν πολλαπλασιάζω την E_2'' (και τα δύο μέλη) με τον αντίθετο του α_{12}', δηλ. $-\alpha_{12}'$, και την προσθέτω στην E_1' (κατά μέλη). Η νέα εξίσωση στη θέση της E_1' θα είναι $\mathrm{E}_1'' = \mathrm{E}_1' - \alpha_{12}'\mathrm{E}_2''$. Τώρα η E_1'' θα έχει στην θέση του α_{12}' τον αριθμό α_{12}'' = 0. Το καινούργιο σύστημα $(\mathrm{E}_1'' : \mathrm{E}_2'')$ θα έχει την ίδια λύση με αυτήν του $(\mathrm{E}_1 : \mathrm{E}_2)$ και θα είναι της μορφής

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1'' \\ 0 & 1 & b_2'' \end{array}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0\,x_2 &= b_1'' \\ 0x_1 + 1\,x_2 &= b_2'' \end{aligned}$$

Από αυτό βλέπουμε ότι η λύση του συστήματος θα είναι: $x_1 = b_1''$ και $x_2 = b_2''$.

Εφαρμογή ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ παράδειγμα 1 (κεφ. 3.1).

Το σύστημα προς επίλυση είναι

$$2\,x_1 + 5\,x_2 = 18$$

$$x_1 + 3\,x_2 = 10$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας είναι

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 18 \\ 1 & 3 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1) \\ (\mathrm{E}_2) \end{array}$$

Gauss

6. Πολλαπλασιάζω την E_1 μέ τον αντίστοφο του $\alpha_{11} = 2$, δηλ. το $\frac{1}{2}$. Οπότε

$$\mathrm{E}_1' = \left(\mathbf{1} \;\; \tfrac{5}{2} \;\middle|\; 9\right).$$

7. Πολλαπλασιάζω την E_1' με τον αντίθετο του $\alpha_{21} = 1$, δηλ. το (-1), και προσθέτω

το αποτέλεσμα στην E_2. Οπότε $\mathrm{E}_2' = E_2 + (-1)E_1' = \left(\mathbf{0} \quad \tfrac{1}{2} \;\middle|\; 1\right)$. Το νέο

σύστημα θα είναι

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 9 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1') \\ (\mathrm{E}_2') \end{array}$$

8. Συμπεραίνω ότι το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

Jordan

9. Πολλαπλασιάζω την E_2' με τον αντίστοφο του $\alpha_{22}' = 1/2$, δηλ. το 2, και την καλώ

$$\mathrm{E}_2'' = 2\mathrm{E}_2' \;=\; (\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \;\mid 2).$$

10. Πολλαπλασιάζω την E_2'' με τον αντίθετο του $\alpha_{12}' = \frac{5}{2}$ δηλ. το $\left(-\frac{5}{2}\right)$ και προσθέτω

το αποτέλεσμα στην E_1'. Οπότε $\mathrm{E}_1'' = \mathrm{E}_1' + \left(-\frac{5}{2}\right)\mathrm{E}_2'' = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \;\mid 4)$. Συνεπώς το νέο και

ισοδύναμο σύστημα θα είναι:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1') \\ (\mathrm{E}_2') \end{array}$$

και ή λύση του συστήματος θα είναι: $x_1 = 4$ και $x_2 = 2$.

2.4 Ειδικές περιπτώσεις

Προκύπτουν συχνά συστήματα 2x2 σε αρκετές εφαρμογές στα Οικονομικά.

Μία πρώτη εφαρμογή είναι το σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις της προσφοράς και ζήτησης. Συνήθως μας δίνεται ένα σύστημα της μορφής

$$P = m_1 Q + b_1$$

$$P = m_2 Q + b_2$$

και ζητιέται η τιμή του P. Αυτό το σύστημα το λύνω πολύ γρήγορα ως εξής: Αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα μπορώ να εξισώσω τα δεύτερα μέλη οπότε έχω

$$m_1 Q + b_1 = m_2 Q + b_2$$

Αυτή η εξίσωση έχει μόνο έναν άγνωστο το Q. Την γράφω ισοδύναμα σαν

$$(m_1 - m_2)Q = b_2 - b_1$$

Εάν $m_1 \neq m_2$ μπορώ να λύσω ως προς το Q διότι $m_1 - m_2 \neq 0$ οπότε παίρνουμε

$$Q = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}$$

Επιλέγω μια από τις δύο εξισώσεις του αρχικού συστήματος και θέτω την τιμή του Q που βρήκα.

Οπότε η P θα είναι

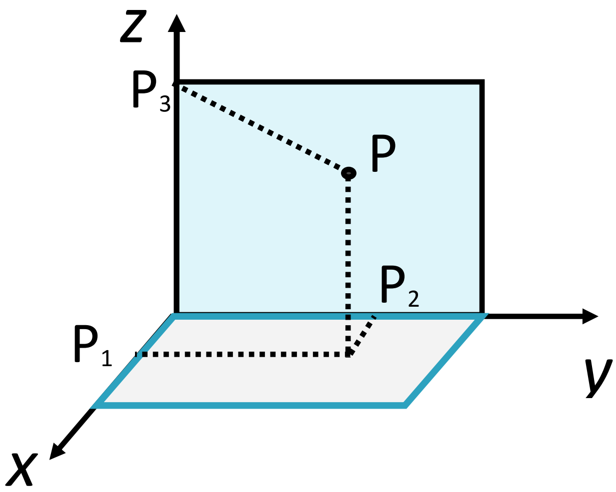
$$P = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1 \quad \text{ή} \quad P = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_2.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Εάν οι εξισώσεις της προσφοράς και της ζήτησης είναι λυμένες ως προς Q και ζητιέται η τιμή του Q, τότε κάνω τα ίδια βήματα χωρίς να τις λύσω ως προς P. Δηλαδή, αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα με Q, μπορώ να εξισώσω τα δεύτερα μέλη. Θα προκύψει έτσι μια εξίσωση με άγνωστο το P. Την λύνω και βρίσκω την τιμή του P. Κατόπιν την αντικαταστώ σε μία από τις αρχικές εξισώσεις και έχω και την τιμή του Q.

2.5 Σημεία του χώρου

Τα σημεία στον χώρο των τριών διαστάσεων συμβολίζονται με διατεταγμένες τριάδες

$$\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$$

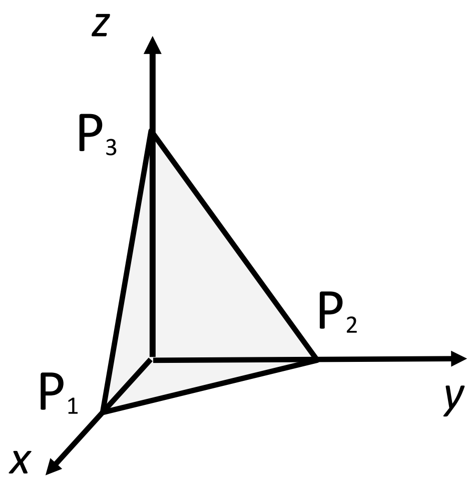


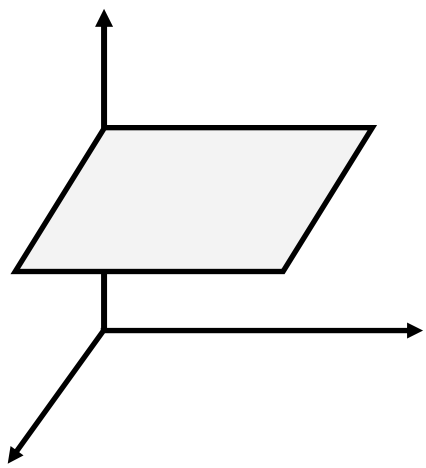
2.6 Επίπεδα στο χώρο

Μια εξίσωση της μορφής

$$ax + by + cz = d \qquad (2.2)$$

όπου a, b, c, d σταθερές και x, y, z μεταβλητές αναπαρίσταται με ένα μοναδικό επίπεδο. Δηλαδή όλες οι λύσεις της εξίσωσης (2.2) είναι τα σημεία ενός επιπέδου.





Παράδειγμα: Δίνεται η εξίσωση του επιπέδου: $2x + 5y + 6z = 30.$
Ερώτημα. Ποιο είναι το σημείο P_1 που τέμνει το πιο πάνω επίπεδο τον άξονα των *x* ;
Λύση. Το P_1 γράφεται σαν $(x, 0,0)$, διότι η συντεταγμένη του σημείου P_1 στον άξονα y είναι 0 και η συντεταγμένη του P_1 στον άξονα των z είναι επίσης $0.$ Θέτοντας αυτές τις τιμές στην εξίσωση αυτή θα πάρει την μορφή $2x = 30.$ Η λύση της θα είναι $x = 15$. Επομένως το σημείο θα είναι το: $P_1 = (15,\ 0, 0).$
Ασκηση. Να βρείτε τα σημεία που τέμνει το πιο πάνω επίπεδο τους άξονες *y* και *z*.

2.7 Γραμμικά Συστήματα 3x3

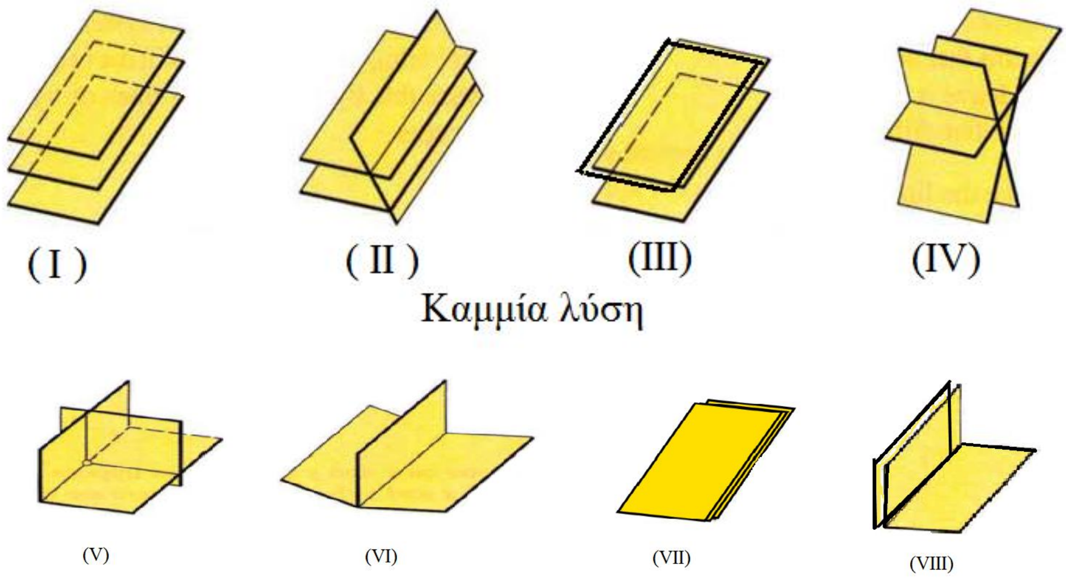
Αυτά είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 &= b_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 &= b_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι άγνωστοι και a_{ij}, b_i είναι σταθερές στον $\mathbb{R}$.

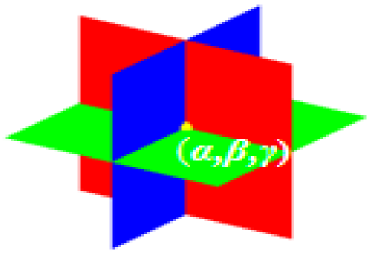
2.8 Γεωμετρική Ερμηνεία Γραμμικών Συστημάτων 3x3

Η κάθε εξίσωση του πιο πάνω συστήματος αναπαριστά ένα επίπεδο. Οι δυνατές θέσεις των επιπέδων είναι



Μία λύση Απειρες λύσεις Απειρες λύσεις Απειρες λύσεις

Η περίπτωση (V) σημαίνει ότι το σημείου του χώρου (α, β, γ) ανήκει και στα τρία επίπεδα:



Ισοδύναμα αν θέσουμε $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta, x_3 = \gamma$ και στις τρείς εξισώσεις, αυτές θα πρέπει να συναληθεύουν δηλ. $a_{11}\alpha + \alpha_{12}\,\beta + a_{13}\gamma = b_1$ και $a_{21}\alpha + \alpha_{22}\,\beta + \alpha_{23}\gamma = b_2$ και $a_{31}\alpha + \alpha_{32}\,\beta + \alpha_{33}\gamma = b_3$. Με άλλα λόγια $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta, x_3 = \gamma$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

2.9 Στρατηγική επίλυσης συστημάτων 3x3 με την απαλοιφή Gauss-Jordan.

Ας καλέσουμε E_1 , E_2 και E_3 την 1^η την 2^η και 3^η εξίσωση του συστήματος (2.3) αντίστοιχα και ας το συμβολίζουμε σύντομα σαν $(\mathrm{E}_1\!:\mathrm{E}_2\!:\mathrm{E}_3)$. Ο επ' αυξημένος πίνακας του συστήματος θα είναι:

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & b_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & b_3 \end{array}$$

Για τα συστήματα 3x3 σκοπός της μεθόδου είναι να μετασχηματίσει ένα σύστημα, σαν το (2.3) , σε ένα ισοδύναμο σύστημα, δηλ. ένα σύστημα που έχει την ίδια λύση με το (2.3) , και είναι της μορφής

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 &= b_1''' \\ 0x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3 &= b_2''' \\ 0x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3 &= b_3''' \end{aligned}$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας του τελικού συστήματος είναι

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1''' \\ 0 & 1 & 0 & b_2''' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{array}$$

Η λύση του συστήματος θα είναι η $x_1 = b_1'''$, $x_2 = b_2'''$, $x_3 = b_3'''$.

Σημείωση. Υποθέτουμε πάντα ότι κάποια γραμμή, πες η i, του (2.3) έχει ένα μη μηδενικό πρώτο στοιχείο δηλ. $\alpha_{i1} \neq 0$. Αυτό μπορούμε να το υποθέτουμε διότι αν καμία γραμμή δεν έχει κάποιο μη μηδενικό α_{i1} τότε το σύστημα θα είναι 2x3, δηλαδή θα είναι μη-τετραγωνικό που δεν εξετάζουμε εδώ. Έτσι ας υποθέσουμε, για παράδειγμα ότι $\alpha_{11} = 0$ και $\alpha_{21} \neq 0$. Τότε αντιμεταθέτουμε την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, δηλαδή στις θέσεις των α_{11}, α_{12}, α_{13}, b_1 θα μπούν τα a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2 και το αντίστοφο. Οπότε το καινούργιο μας σύστημα θα έχει $\alpha_{11} \neq 0$. Γι' αυτό πάντα στα 3x3 συστήματα θεωρούμε: $\alpha_{11} \neq 0$.

Παράδειγμα. Τα πιο κάτω συστήματα που το δεύτερο προκύπτει με αντιμετάθεση των γραμμών E_1, E_2 είναι ισοδύναμα (έχουν τις ίδιες λύσεις)

$$\begin{aligned} 0x + 4y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 7z &= 2 \\ 4x + 2y + 9z &= 10 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 2 \\ 0x + 4y + z &= 3 \\ 4x + 2y + 9z &= 10 \end{aligned}$$

Γενικότερα η αντιμετάθεση οποιονδήποτε εξισώσεων δίνει ισοδύναμα συστήματα.

2.10 Μέθοδος επίλυσης συστημάτων 3x3 με την απαλοιφή Gauss-Jordan.

1. Αφού $\alpha_{11} \neq 0$ φτιάχνουμε την

$$E_1' = \frac{1}{\alpha_{11}} E_1 = (1, \alpha_{12}', \alpha_{13}' \mid b_1').$$

Η E_1' θα είναι η γραμμή **οδηγός**. Θα την χρησιμοποιούμε για να απαλείψουμε τα στοιχεία α_{21} και α_{31} των E_2 και E_3 αντίστοιχα. Έτσι χρησιμοποιούμε την E_1' δύο φορές. Την πρώτη για να απαλοίψουμε το α_{21}, φτιάχνοντας την

$$E_2' = E_2 + (-\alpha_{21})E_1' = (0, \alpha_{22}', \alpha_{23}' \mid b_2') .$$

Την δεύτερη για να απαλείψουμε το α_{31}, φτιάχνοντας την

$$E_3' = E_3 + (-\alpha_{31})E_1' = (0, \alpha_{32}', \alpha_{33}' \mid b_3') .$$

Τότε προκύπτει ένα ισοδύναμο σύστημα το $(E_1' : E_2' : E_3')$ που ο επ' αυξημένος πίνακας του είναι:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & \alpha_{12}' & \alpha_{13}' & b_1' & (E_1') \\ 0 & \alpha_{22}' & \alpha_{23}' & b_2' & (E_2') \\ 0 & \alpha_{32}' & \alpha_{33}' & b_3' & (E_3') \end{array}$$

2. Εάν το $\alpha_{22}' \neq 0$ τότε ξεκινάμε το δεύτερο βήμα πρώτα φτιάχνοντας την

$$E_2'' = \frac{1}{\alpha_{22}'} E_2' = (0, 1, \alpha_{23}'' \mid b_2'').$$

Η E_2'' θα είναι η γραμμή **οδηγός.** Θα την χρησιμοποιούμε για να απαλείψουμε τα στοιχεία α_{12}' και α_{32}' των E_2' και E_3' αντίστοιχα. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε την E_2'' δύο φορές, την πρώτη για να φτιάξουμε την

$$E_1'' = E_1' + (-\alpha_{12}')E_2'' = (1, 0, \alpha_{13}'' \mid b_1'')$$

και την δεύτερη για να φτιάξουμε την

$$E_3'' = E_3' + (-\alpha_{32}')E_2'' = (0, 0, \alpha_{33}'' \mid b_3'').$$

Τότε θα προκύψει ένα ισοδύναμο σύστημα $(E_1'' : E_2'' : E_3'')$ που ο επ' αυξημένος πίνακας του θα είναι:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \alpha''_{13} & b''_1 & (\mathrm{E}''_1) \\ 0 & 1 & \alpha''_{23} & b''_2 & (\mathrm{E}''_2) \\ 0 & 0 & \alpha''_{33} & b''_3 & (\mathrm{E}''_3) \end{array}$$

3. Εάν το $\alpha''_{33} \neq 0$ τότε ξεκινάμε το τρίτο βήμα φτιάχνοντας την

$$\mathrm{E}'''_3 = \frac{1}{\alpha''_{33}}\mathrm{E}''_3 = (0, 0, 1 \mid b'''_3).$$

Η E'''_3 θα είναι η γραμμή **οδηγός.** Θα την χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε τα στοιχεία α''_{13} και α''_{33} των E''_1 και E''_3 αντίστοιχα. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε την E'''_3 δύο φορές την πρώτη για να φτιάξουμε την

$$\mathrm{E}'''_1 = \mathrm{E}''_1 + (-\alpha''_{13})\mathrm{E}'''_3 = (1, 0, 0 \mid b'''_1)$$

και την δεύτερη για να φτιάξουμε την

$$\mathrm{E}'''_2 = \mathrm{E}''_2 + (-\alpha''_{23})\mathrm{E}'''_3 = (0, 1, 0 \mid b'''_2)\,.$$

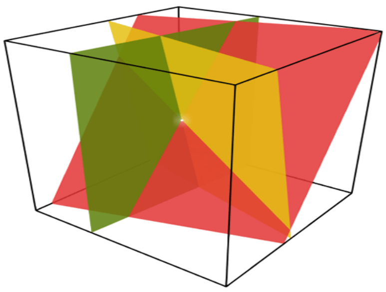
Τότε θα προκύψει ένα ισοδύναμο σύστημα το $(\mathrm{E}'''_1 : \mathrm{E}'''_2 : \mathrm{E}'''_3)$ που ο επ' αυξημένος πίνακας του θα είναι:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & b'''_1 & (\mathrm{E}'''_1) \\ 0 & 1 & 0 & b'''_2 & (\mathrm{E}'''_2) \\ 0 & 0 & 1 & b'''_3 & (\mathrm{E}'''_3) \end{array}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος θα είναι η $x_1 = b'''_1$, $x_2 = b'''_2$, $x_3 = b'''_3$.

Οι δύο περιορισμοί $\alpha'_{22} \neq 0$ και $\alpha''_{33} \neq 0$ που συναντήσαμε κατά την παρουσίαση της μεθόδου **Gauss-Jordan** και εξασφάλισαν την μοναδικότητα της λύσης, υποδηλώνουν την ανάγκη να διερευνήσουμε ξεχωριστά τις δύο περιπτώσεις. Θα το κάνουμε αυτό πιο κάτω.

2.11 Παράδειγμα: **Συστήμα με μοναδική λύση**.



Πρόβλημα (Σημειώσεων). Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{lr} 3R + 4S + T = 3.000 & (\mathrm{E}_1) \\ 2R + 3S + 5T = 2.400 & (\mathrm{E}_2) \\ 4R + 3S + T = 3.600 & (\mathrm{E}_3) \end{array}$$

Λύση.

Ο επ' αυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 3000 \\ 2 & 3 & 5 & 2400 \\ 4 & 3 & 1 & 3600 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1) \\ (\mathrm{E}_2) \\ (\mathrm{E}_3) \end{array}$$

1. Ξεκινάμε το πρώτο βήμα πολλαπλασιάζοντας την E_1 με (1/3) για να φτιάξουμε την

$$\mathrm{E}_1' = \frac{1}{3}\mathrm{E}_1 = \left(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\ \middle|\ 1000\right).$$

Η E_1' θα είναι η γραμμή οδηγός. Θα την χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε τα στοιχεία $a_{21} = 2$ και $a_{31} = 4$ των E_2 και E_3 αντίστοιχα. Για να γίνει αυτό προχωράμε με τα ακόλουθα υποβήματα:

α) Πολλαπλασιάζουμε την E_1' με (-2) και την προσθέτουμε στην E_2 οπότε

$$\mathrm{E}_2' = \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1' = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{13}{3}\ \middle|\ 400\right)$$

Αναλυτικότερα μπορούμε να βρούμε το πιο πάνω αποτέλεσμα από :

$$\begin{array}{r|ccc|c} \mathrm{E}_2 & 2 & 3 & 5 & 2400 \\ -\ 2\mathrm{E}_1' & -2 & -8/3 & -2/3 & -2000 \\ \hline \mathrm{E}_2' = \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1' & 0 & 1/3 & 13/3 & 400 \end{array}$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας θα είναι της μορφής

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 1000 \\ 0 & 1/3 & 13/3 & 400 \\ 4 & 3 & 1 & 3600 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1') \\ (\mathrm{E}_2') \\ (\mathrm{E}_3) \end{array}$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την E_1' με (-4) και την προσθέτουμε στην E_3 οπότε

$$\mathrm{E}_3' = \mathrm{E}_3 - 4\mathrm{E}_1' = \left(0,\ -\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3}\ \middle|\ -400\right).$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας του ισοδύναμου συστήματος είναι

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 1000 \\ 0 & 1/3 & 13/3 & 400 \\ 0 & -7/3 & -1/3 & -400 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1') \\ (\mathrm{E}_2') \\ (\mathrm{E}_3') \end{array}$$

2. Ξεκινάμε το δεύτερο βήμα πολλαπλασιάζοντας την E_2' με (3) φτιάχνοντας την

$$\mathrm{E}_2'' = 3\mathrm{E}_2' = (0,\ 1,\ 13\ \mid\ 1200).$$

Η E_2'' θα είναι η γραμμή οδηγός που θα την χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε τα στοιχεία $a_{12}' = \frac{4}{3}$ και $a_{32}' = -\frac{7}{3}$ των E_1' και E_3' αντίστοιχα. Προχωράμε με τα ακόλουθα υποβήματα:

α) Πολλαπλασιάζουμε την E_2'' με $(-\frac{4}{3})$ και την προσθέτουμε στην E_1' οπότε

$$\mathrm{E}_1'' = \mathrm{E}_1' - \frac{4}{3}\mathrm{E}_2'' = \left(1,\ 0, -\frac{51}{3}\ \middle|\ -600\right).$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την E_2'' με $-(-\frac{7}{3}) = \frac{7}{3}$ και την προσθέτουμε στην E_3' οπότε

$$E_3'' = E_3' + \frac{7}{3}E_2'' = \left(0,\ 0,\ \frac{90}{3}\ \middle|\ 2400\right).$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας του ισοδύναμου συστήματος είναι

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -51/3 & -600 \\ 0 & 1 & 13 & 1200 \\ 0 & 0 & 90/3 & 2400 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (E_1'') \\ (E''_2) \\ (E''_3) \end{array}$$

3. Ξεκινάμε το τρίτο βήμα πολλαπλασιάζοντας την E_3' με $\left(\frac{3}{90}\right)$ φτιάχνοντας την

$$E_3''' = \left(\frac{3}{90}\right)E_3'' = (0,0,1 \mid \mathbf{80}).$$

Η E_3''' θα είναι η γραμμή οδηγός που θα την χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε

τα στοιχεία $a_{23}'' = 13$ και $a_{13}'' = -\frac{51}{3}$ των E_2'' και E_1'' αντίστοιχα. Προχωράμε τα ακόλουθα υποβήματα:

α) Πολλαπλασιάζουμε την E_3''' με (-13) και την προσθέτουμε στην E_2'' οπότε

$$E_2''' = E_2'' - 13E_3''' = (0,\ 1,0 \mid \mathbf{160}).$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την E_3''' με $\left(\frac{51}{3}\right)$ και την προσθέτουμε στην E_1'' οπότε

$$E_1''' = E_1'' + \frac{51}{3}E_3'' = (1,0,0 \mid \mathbf{760}).$$

Συνεπώς το σύστημα έχει ισοδύναμα μετασχηματιστεί ως

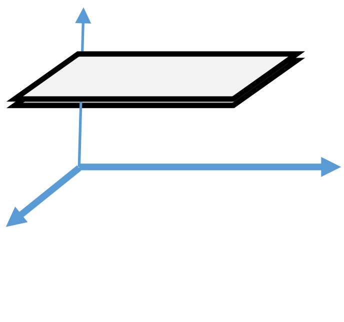
$$(E_1''' : E_2''' : E_3''') = \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathbf{760} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{160} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{80} \end{array}$$

και η λύση του συστήματος είναι : $x_1 = 760$, $x_2 = 160$, $x_3 = 80$.

Πριν προχωρήσουμε στην διερεύνηση ας δούμε την γεωμετρία του προβλήματος.

2.12 Οι θέσεις δύο επιπέδων

1) Ταύτιση Επιπέδων. Δύο επίπεδα ταυτίζονται όταν η μία γραμμή του επ' αυξημένου πίνακα είναι πολλαπλάσια της άλλης.



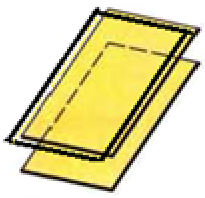
Παράδειγμα

$$2x + y - 3z = 1 \qquad (E_1)$$

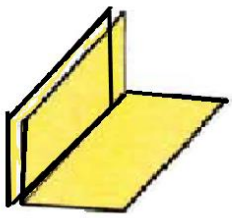
$$-4x - 2y + 6z = -2 \qquad (E_2)$$

Εάν πολλαπλασιάσω την E_1 με (-2) τότε προκύπτει η E_2 δηλ. $E_2 = -2E_1$. Το (-2) είναι ο λόγος των γραμμών E_1, E_2 του επ' αυξημένου πίνακα (ή των εξισώσεων). Αυτό είναι ισοδύναμο με $\mathrm{E}_2 + 2\mathrm{E}_1 = 0$ δηλ προσθέτω στην μια γραμμή ένα πολλαπλάσιο της άλλης το αποτέλεσμα να είναι η μηδενική γραμμή.

Γι' αυτό όταν κατά την διαδικασία απαλοιφών της **Gauss-Jordan** (σε κάποιο βήμα της) προκύπτει μια μηδενική γραμμή της μορφής $(0, 0, 0 \mid 0)$ τότε συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα που ορίζονται από τις δύο προηγούμενες γραμμές ταυτίζονται. Από εδώ δεν μπορούμε ακόμα να αποφανθούμε για το τί είναι το σύστημα. Εάν το τρίτο επίπεδο είναι παράλληλο με στα άλλα δύο που ταυτίζονται είμαστε στη περίπτωση:

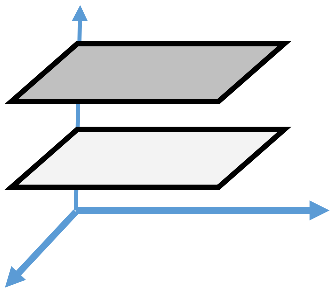


Τότε το σύστημα θα είναι αδύνατο.
Ενώ εάν το τρίτο επίπεδο τέμνει τα άλλα δύο (που ταυτίζονται) είμαστε στη περίπτωση



Τότε το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο 1-ου βαθμού) που θα βρίσκονται όλες στην ευθεία της τομής των επιπέδων.

2) Παραλληλία Επιπέδων. Δύο επίπεδα είναι παράλληλα



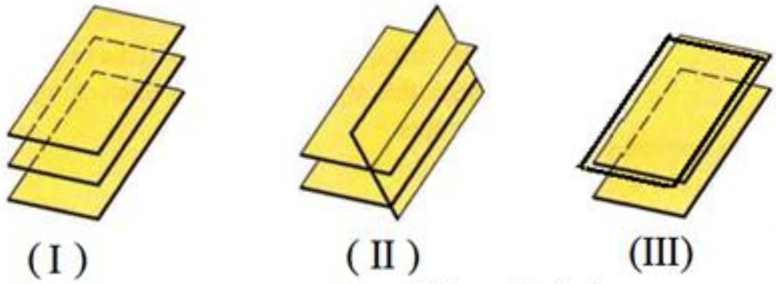
όταν το πρώτο μέλος της εξίσωσης του ενός επιπέδου είναι πολλαπλάσιο του πρώτου μέλους της εξίσωσης του άλλου, αλλά οι σταθερές στα δεύτερα μέλη δεν ακολουθούν τον ίδιο λόγο.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \qquad (E_1) \\ -4x - 2y + 6z &= -3 \qquad (E_2) \end{aligned}$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα το πρώτο μέλος της E_2 είναι πολλαπλάσιο του πρώτου μέλους της E_1 με λόγο (-2) (γιατί το κάθε στοιχείο της γραμμής του επ' αυξημένου πίνακα είναι πολλαπλάσιο του (-2)). Όμως τώρα ο λόγος των δεύτερων μελών είναι $-\frac{3}{1} = -3.$
Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα είναι παράλληλα αλλά δεν ταυτίζονται. Γι' αυτό όταν κατά την διαδικασία απαλοιφών της **Gauss-Jordan** (σε κάποιο βήμα της) προκύπτει μια γραμμή

της μορφής $(0,0,0 \mid c_3)$ με $c_3 \neq 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα με εξισώσεις $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ είναι παράλληλα και δεν ταυτίζονται.
Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι αδύνατο. Διότι είτε το τρίτο επίπεδο είναι παράλληλο προς τα άλλα δύο είτε τα τέμνει είτε ταυτίζεται με το ένα από τα άλλα δύο, τότε σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το σύστημα είναι αδύνατο όπως φαίνεται από το σχήμα:



Καμμία λύση

3) Τεμνόμενα Επίπεδα. Δύο επίπεδα τέμνονται

όταν δεν είναι παράλληλα ούτε ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι το πρώτο μέλος της εξίσωσης του ενός επιπέδου δεν είναι πολλαπλάσιο του πρώτου μέλους της εξίσωσης του δεύτερου.

Παράδειγμα.

$$x - 4y - z = 10 \qquad (\mathrm{E}_1)$$
$$y + 3z = 4 \qquad (\mathrm{E}_2)$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας των δύο εξισώσεων είναι

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} (\mathrm{E}_1) \\ (\mathrm{E}_2) \end{array}$$

Η ύπαρξη του μη μηδενικού στοιχείου $a'_{11} = 1$ στην πρώτη γραμμή και του μηδενικού $a'_{21} = 0$ στην δεύτερη σημαίνει ότι δεν μπορεί το πρώτο μέλος της πρώτης γραμμής δηλ. το $(1,4,1)$ να είναι πολλαπλάσιο του πρώτου μέλους της άλλης δηλ. του $(0,1,3)$. Διότι σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε $1 = \lambda \times 0$ για κάποιο λ, αλλά τέτοιο λ δεν υπάρχει. Συνεπώς τα επίπεδα δεν είναι ούτε παράλληλα ούτε ταυτίζονται δηλαδή τα επίπεδα πρέπει να τέμνονται.

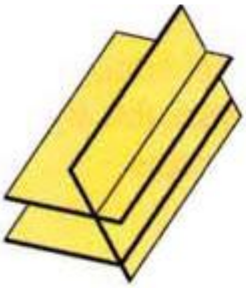
Γι αυτό όταν κατά την διαδικασία απαλοιφών της **Gauss-Jordan** (σε κάποιο βήμα της) προκύψουν δύο γραμμές στον επ' αυξημένο πίνακα της μορφής

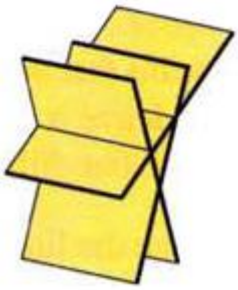
$\mathrm{E}'_1 = (1, a'_{12}, \ a'_{13} \mid b'_1)$ και $\mathrm{E}''_2 = (0, \ 1, \ a''_{23} \mid b''_2)$

ή $\mathrm{E}''_2 = (0, \ 1, \ a''_{23} \ \mid b''_2)$ και $\mathrm{E}'''_3 = (0, \ 0, \ 1 \ \mid b'''_3)$

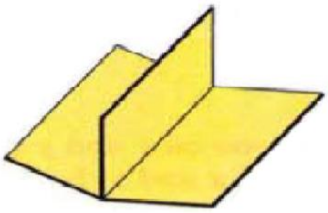
ή $\mathrm{E}'_1 = (1, a'_{12}, \ a'_{13} \mid b'_1)$ και $\mathrm{E}'''_3 = (0, \ 0, \ 1 \ \mid b'''_3)$

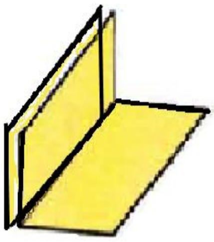
τότε συμπεραίνουμε ότι τα δύο επίπεδα που ορίζονται από το κάθε ζευγάρι τα παραπάνω ζευγάρια τέμνονται. Από εδώ δεν μπορούμε ακόμα να αποφανθούμε για το τί είναι το σύστημα. Αυτό εξαρτάται από την θέση του τρίτου επιπέδου. Θα μπορούσε το σύστημα να είναι αδύνατο όπως στις περιπτώσεις



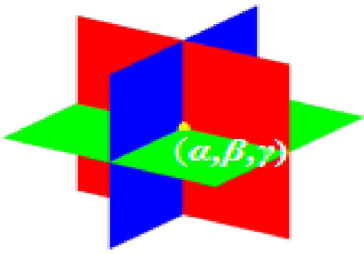


ή αόριστο όπως στις περιπτώσεις





ή ακόμα να έχει μία λύση όπως στην περίπτωση



Το ποια θα είναι η απάντηση θα εξαρτηθεί όπως βλέπουμε από την θέση του τρίτου επιπέδου.

Πιο κάτω διερευνούμε τις δύο περιπτώσεις που συναντήσαμε κατά την παρουσίαση της μεθόδου **Gauss-Jordan** δηλ. όταν $\alpha'_{22} = 0$ ή $\alpha''_{33} = 0$.

1. Έστω ότι η μέθοδος καταλήγει σε $\alpha'_{22} = 0$. Ο επ' αυξημένος πίνακας που έχουμε καταλήξει είναι

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & \alpha'_{23} & b'_2 \\ 0 & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} & b'_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (\mathrm{E}'_1) \\ (\mathrm{E}'_2) \\ (\mathrm{E}'_3) \end{array}$$

α) Εάν επιπλέον το $\alpha'_{32} \neq 0$ τότε αντιμεταθέτουμε την δεύτερη με την τρίτη γραμμή,

του $(\mathrm{E}'_1: \mathrm{E}'_2: \mathrm{E}'_3)$, δηλαδή στίς θέσεις των $\alpha'_{22} = 0$, α'_{23}, b'_2 θα μπούν τα α'_{32}, α'_{33}, b'_3

και γράφουμε $\alpha''_{22} = \alpha'_{32} (\neq 0)$, $\alpha''_{23} = \alpha'_{33}$, $b''_2 = b'_3$ και $\alpha''_{32} = 0$, $\alpha''_{33} = \alpha'_{23}$, $b''_3 = b'_2$.

Ο νέος επ' αυξημένος πίνακας μετά την αντιμετάθεση των γραμμών θα είναι της μορφής:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b'_1 & (\mathrm{E}'_1) \\ 0 & \alpha''_{22} & \alpha''_{23} & b''_2 & (\mathrm{E}''_2) \\ 0 & 0 & \alpha''_{33} & b''_3 & (\mathrm{E}''_3) \end{array}$$

οπότε έχουμε κερδίσει το δεύτερο μηδέν της τρίτης γραμμής με μια αντιμετάθεση.

Παίρνοντας υπ' όψη ότι το καινούργιο $\alpha''_{22} = \alpha'_{32} \neq 0$ ξεκινάμε το δεύτερο βήμα της μεθόδου φτιάχνοντας την

$$\mathrm{E}'''_2 = \frac{1}{\alpha''_{22}} \mathrm{E}''_2 = (0, 1, \alpha'''_{23} \mid b'''_2).$$

Η E'''_2 θα είναι η γραμμή **οδηγός.** Θα την χρησιμοποιούμε για να απαλείψουμε το στοιχείο α'_{12} της E'_1 δηλαδή

$$\mathrm{E}''_1 = \mathrm{E}'_1 + (-\alpha'_{12})\mathrm{E}'''_2 = (1, 0, \alpha''_{13} \mid b''_1)$$

Ο νέος επ' αυξημένος πίνακας θα είναι της μορφής:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \alpha''_{13} & b''_1 & (\mathrm{E}''_1) \\ 0 & 1 & \alpha'''_{23} & b'''_2 & (\mathrm{E}'''_2) \\ 0 & 0 & \alpha''_{33} & b''_3 & (\mathrm{E}''_3) \end{array}$$

Η απάντηση για το είδος του συστήματος εξαρτάται από τις σταθερές α''_{33} , b''_3.
Γι' αυτό εξετάζουμε τις υπο-περιπτώσεις:

αi) Εάν το $\alpha''_{33} \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μία λύση διότι πολλαπλασιάζοντας την E''_3 με $\frac{1}{\alpha''_{33}}$ μπορούμε να απαλοίψουμε τα α''_{13} και α'''_{23} φτιάχνοντας το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & b''_1 & (\mathrm{E}'''_1) \\ 0 & 1 & 0 & b'''_2 & (\mathrm{E}''''_2) \\ 0 & 0 & 1 & b''_3 & (\mathrm{E}'''_3) \end{array}$$

αii) Εάν $\alpha''_{33} = 0$ τότε το σύστημα θα γράφεται

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \alpha''_{13} & b''_1 & (\mathrm{E}''_1) \\ 0 & 1 & \alpha'''_{23} & b'''_2 & (\mathrm{E}'''_2) \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 & (\mathrm{E}''_3) \end{array}$$

Το σύστημα θα είναι αόριστο ή αδύνατο. Η απάντηση για το είδος του συστήματος εξαρτάται από την σταθερά b''_3.

- Εάν το $b''_3 = 0$ τότε το σύστημα θα γράφεται

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \alpha''_{13} & b''_1 & (\mathrm{E}''_1) \\ 0 & 1 & \alpha'''_{23} & b'''_2 & (\mathrm{E}'''_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mathrm{E}''_3) \end{array}$$

οπότε είναι αόριστο 1-ου βαθμού.

- Εάν το $b''_3 \neq 0$ τότε το σύστημα θα γράφεται

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & a''_{13} & b''_1 & (\mathrm{E}''_1) \\ 0 & 1 & a'''_{23} & b'''_2 & (\mathrm{E}'''_2) \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 \neq 0 & (\mathrm{E}''_3) \end{array}$$

οπότε είναι αδύνατο.

β) Εάν $\alpha'_{32} = 0$ (είμαστε στην περίπτωση $\alpha'_{22} = 0$) τότε ο επ' αυξημένος πίνακα $(\mathrm{E}'_1 \colon \mathrm{E}'_2 \colon \mathrm{E}'_3\ )$ θα είναι της μορφής:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & \alpha'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & \alpha'_{33} & b'_3 \end{array}$$

Το σύστημα θα είναι αόριστο ή αδύνατο. Η απάντηση για το είδος του συστήματος εξαρτάται από τις σταθερές α'_{23} , b'_2, α'_{33}, b'_3.

Γι αυτό εξετάζουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:

βi) Εάν $\alpha'_{23} \neq 0$ τότε το σύστημα $(\mathrm{E}'_1 \colon \mathrm{E}'_2 \colon \mathrm{E}'_3\ )$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & \alpha'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & \alpha'_{33} & b'_3 \end{array} \quad \text{(ή αν συνεχίσουμε)} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & 0 & b''_1 \\ 0 & 0 & 1 & b''_2 \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 \end{array}$$

Το είδος του συστήματος θα εξαρτηθεί από την σταθερά b''_3.

- Εάν $b'_3 = 0$ τότε το σύστημα $(\mathrm{E}'_1 \colon \mathrm{E}'_2 \colon \mathrm{E}'_3\ )$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b''_1 \\ 0 & 0 & 1 & b''_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

  Οπότε το σύστημα θα είναι αόριστο 1-ου βαθμού.

- Εάν $b''_3 \neq 0$ τότε το σύστημα $(\mathrm{E}'_1 \colon \mathrm{E}'_2 \colon \mathrm{E}'_3\ )$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & a'_{13} & b''_1 \\ 0 & 0 & 1 & b''_2 \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 \neq 0 \end{array}$$

  Οπότε είναι αδύνατο.

βii) Εάν $\alpha'_{23} = 0,$ τότε το σύστημα $(\mathrm{E}'_1 \colon \mathrm{E}'_2 \colon \mathrm{E}'_3\ )$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & b'_3 \end{array}$$

Το είδος του συστήματος εξαρτάται από τις σταθερές α'_{33}, b'_3, b'_2.

- Εάν $\alpha'_{33} \neq 0$ τότε το σύστημα $(\mathrm{E}'_1 \colon \mathrm{E}'_2 \colon \mathrm{E}'_3\ )$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & \alpha'_{33} & b'_3 \end{array} \quad (\text{ή αν συνεχίσουμε}) \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & 0 & b''_1 \\ 0 & 0 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b''_3 \end{array}$$

Με μια αντιμετάθεση της δεύτερης και της τρίτης γραμμής καταλήγουμε στην προηγούμενη περίπτωση (βi).

- Εάν $\alpha'_{33} = 0$ τότε το σύστημα $(\mathrm{E}'_1 : \mathrm{E}'_2 : \mathrm{E}'_3)$ θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & b'_1 \\ 0 & 0 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & b'_3 \end{array}$$

Το είδος του συστήματος εξαρτάται από τις σταθερές b'_2, b'_3.

Εάν $b'_2 = b'_3 = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο 2-ου βαθμού

Εάν μια από τις δύο σταθερές είναι μηδέν τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Πιο κάτω διερευνούμε την περίπτωση που το σύστημα καταλήγει σε $\alpha''_{33} = 0$.
Ο επ' αυξημένος πίνακας του συστήματος $(\mathrm{E}''_1 : \mathrm{E}''_2 : \mathrm{E}''_3)$ θα είναι

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha''_{13} & b''_1 \\ 0 & 1 & \alpha''_{23} & b''_2 \\ 0 & 0 & 0 & b''_3 \end{array}$$

α) Εάν $b''_3 \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Εάν $b''_3 = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο.

Σύνοψη. *Υποθέτουμε καταρχή ότι η πρώτη γραμμή είναι της μορφής* $(a,\ d,\ f\ |\ c)$ *με* $a \neq 0$.

i) *Εάν η **Gauss-Jordan** καταλήξει σε μία γραμμή (δεύτερη ή τρίτη γραμμή) της μορφής* $(0,0,0\ |\ c)$ *με* $c \neq 0$ *τότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση (αδύνατο).* ii) *Εάν η **Gauss-Jordan** καταλήξει σε δύο μηδενικές γραμμές (δεύτερη ή τρίτη γραμμή) της μορφής* $(0,0,0\ |\ 0)$ *τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που ορίζονται από ένα επίπεδο (αοριστία 2-ου βαθμού).* iii) *Εάν η **Gauss-Jordan** καταλήξει σε μια γραμμή (δεύτερη ή τρίτη γραμμή)* $(0,0,0\ |\ 0)$ *και σε μία άλλη της μορφής:*

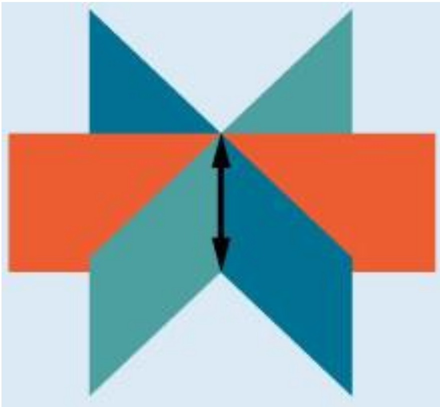
$(0,\ d,\ f\ |\ c)$ *με* $d \neq 0$ *ή της μορφής* $(0,\ 0,\ f\ |\ c)$ *με* $f \neq 0$*, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που ορίζονται από μία ευθεία (αοριστία 1-ου βαθμού).*

iv) *Εάν η **Gauss-Jordan** καταλήξει σε πίνακα της μορφής*

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}$$

το σύστημα θα έχει μία μοναδική λύση την (c_1, c_2, c_3).

2.14 Παράδειγμα: **Αόριστο Σύστημα**



Πρόβλημα. Να χρησιμοποιείσετε την μέθοδο Gauss-Jordan για να διερευνηθεί το σύστημα:

$$2x + y - 3z = 0 \qquad (E_1)$$

$$4x + 2y - 6z = 0 \qquad (E_2)$$

$$x - y + z = 0 \qquad (E_3)$$

Λύση.

Ο επ' αυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}$$

α) Διαιρούμε την E_1 με (2) : $E_1' = \frac{1}{2}E_1 = \left(1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{3}{2} \ \middle| \ 0\right)$. Πολλαπλασιάζουμε την E_1' με (-4) και την προσθέτουμε στην E_2 οπότε

$$E_2' = E_2 - 4E_1' = (0, \ 0, \ 0 \ \mid 0\,)$$

Σημείωση. Αυτό το βλέπουμε πιο εύκολα αν πολλαπλασιάσουμε την E_1 με (-2) και την προσθέσουμε στην E_2 οπότε πάλι φτάνουμε στο αποτέλεσμα (0, 0, 0 | 0). Δηλαδή $E_2 = 2E_1$. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο εξισώσεις αναπαριστούν το ίδιο επίπεδο. Άρα τα δύο επίπεδα που αναπαριστούν τις δύο εξισώσεις ταυτίζονται.

β) Πολλαπλασιάζουμε την E_1' με (-1) και την προσθέτουμε στην E_3. Συνεπώς

$$E_3' = E_3 - E_1' = \left(0, \ -\frac{3}{2}\,, \ \frac{5}{2} \ \middle| \ 0\,\right)$$

και ο επ' αυξημένος πίνακας του ισοδύναμου συστήματος είναι:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} (E_1') \\ (E_2') \\ (E_3') \end{array}$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι : Τα επίπεδα με εξισώσεις E_1' και E_3' τέμνονται, είναι παράλληλα ή ταυτίζονται. Αυτό μπορεί να μας το απαντήσει η μέθοδος Gauss-Jordan ως ακολούθως.

Αντιμεταθέτοντας την E_2' με την E_3' έχουμε

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} (E_1') \\ (E_2'') \\ (E_3'') \end{array}$$

γ) Πολλαπλασιάζουμε γραμμή E_2' με τον αντίστροφο του $(-\frac{3}{2})$ δηλ. το $-\frac{2}{3}$. Οπότε

$$E_2'' = -\tfrac{2}{3}E_2 = \left(0,\ 1\ ,-\ \tfrac{5}{3}\ \middle|\ 0\ \right)$$

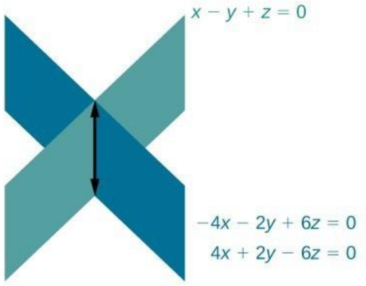
Πολλαπλασιάζουμε την E_2'' με το (-1/2) και το αποτέλεσμα το προσθέτουμε στην E_1'

$$E_1'' = E_1' - \tfrac{1}{2}E_2'' = \left(1,\ 0\ ,\ -\tfrac{11}{4}\ \middle|\ 0\ \right).$$

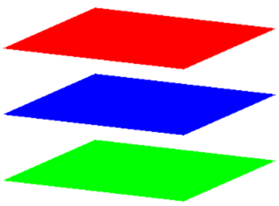
Οπότε ο επ' αυξημένος πίνακας του ισοδύναμου συστήματος είναι

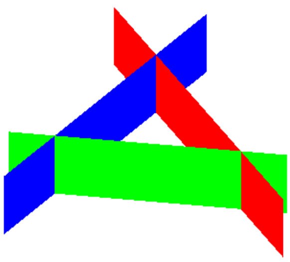
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11/4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} (E_1') \\ (E_2'') \\ (E_3'') \end{array}$$

Αφού τα πρώτα μέλη των δύο πρώτων γραμμών δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου, συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα (E_1') και (E_2'') τέμνονται. Η γραμμή E_3'' = (0, 0, 0 | 0) υποδηλώνει ότι τα επίπεδα (E_2'') και (E_3'') ταυτίζονται. Οπότε το σύστημα είναι αόριστο 1-ου βαθμού, όπως φαίνεται από το σχήμα



2.15 Παράδειγμα: **Αδύνατο Σύστημα**





Πρόβλημα. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x - 3y \quad + z \;&= \;\; 4 \qquad (E_1) \\ -x + 2y \quad - 5z \;&= 35 \qquad (E_2) \\ 5x - 13y + 13z &= \;\; 8 \qquad (E_3) \end{aligned}$$

Λύση.

Ο επ' αυξημένος πίνακας θα είναι

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 35 \\ 5 & -13 & 13 & 8 \end{array}\right)$$

1) Η E_1 είναι έτοιμη για χρήση. Την χρησιμοποιούμε για να φτιάξουμε τις E_2', E_3' :

$$E_2' = E_2 + E_1 = (0, -1, -4 \mid 39)$$

$$E_3' = E_3 - 5E_1 = (0, \; 2, \; 8 \mid -12)$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας που προκύπτει θα είναι

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 39 \\ 0 & 2 & 8 & -12 \end{array}\right)$$

2) Πολλαπλασιάζουμε την E_2' με (-1) :

$$E_2'' = -E_2' = (0, \; 1, \; 4 \mid -39)$$

και μετά την χρησιμοποιούμε για να φτιάξουμε τις E_1', E_3'' όπως ακολουθεί:

α) $$E_1'' = E_1 + 3E_2'' = (1, \; 0, \; 13 \mid -113)$$

ή μπορούμε να βρούμε το πιο πάνω από

$$\begin{array}{r|rrr|r} E_1 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 3E_2'' & 0 & 3 & 12 & -117 \\ \hline E_1' = E_2 + 3E_2'' & 1 & 0 & 13 & -113 \end{array}$$

β) $$E_3'' = E_3' + 10E_2'' = (0, \; 0, \; 52 \mid -386)$$

ή μπορούμε να βρούμε το πιο πάνω ως εξής

$$\begin{array}{r|rrr|r} E_3' & 0 & 2 & 8 & -12 \\ -2E_2'' & 0 & -2 & -8 & 78 \\ \hline E_3'' = E_3' - 2E_2'' & 0 & 0 & 0 & -66 \end{array}$$

Ο επ' αυξημένος πίνακας που προκύπτει θα είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & -113 \\ 0 & 1 & 4 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & -66 \end{array}\right)$$

Αφού η τελευταία γραμμή είναι η (0,0,0 | -66) το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει καμία λύση.