Ασκήσεις

1. Ένας κατασκευαστής καφέ ενδιαφέρεται να αναμείξει τρία είδη καφέ για να πάρει ένα τελικό μείγμα 8.000 κιλών. Ο κατασκευαστής χρειάζεται γι' αυτό να αγοράσει 8.600 κιλά μή επεξεργασμένου καφέ έχοντας συνολικό κόστος 60.000 ευρώ. Το κάθε είδος καφέ κοστίζει 7, 7,2 και 6,6 ευρώ ανά κιλό, αντίστοιχα. Στην ανάμειξη του καφέ, ένας περιορισμός είναι ότι το ποσο των κόκκων του πρώτου είδους είναι το μισό του δεύτερου. Να βρείτε αν υπάρχει ένας συνδυασμός των τριών ειδών κόκκων που θα οδηγήσει σ' ένα τελικό μείγμα των 8.000 κιλών και θα ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις.
   Απάντηση $x = 2025 \quad y = 4050 \quad z = 2525.$

2. Δίνονται οι εξισώσεις δύο ευθειών στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   Διερευνήστε την θέση των ευθειών στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτές τέμνονται βρείτε το σημείο τομής τους.

3. Δίνονται οι εξισώσεις δύο ευθειών στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Διερευνήστε την θέση των ευθειών στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτές τέμνονται βρείτε το σημείο τομής τους.

4. Δίνονται οι εξισώσεις δύο επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 4x + y - 7z &= 10 \qquad (E_1) \\ x + 4y - z &= 3 \qquad (E_2) \end{aligned}$$

   Διερευνήστε την θέση των επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

5. Δίνονται οι εξισώσεις ενός επιπέδου και μιας ευθείας στον $\mathbb{R}^3$

$$4x + y - 7z = 10$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Διερευνήστε την θέση του επιπέδου και της ευθείας στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

6. Δίνονται οι εξισώσεις ενός επιπέδου και μιας ευθείας στον $\mathbb{R}^3$

$$4x + 3y - 5z = 11$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Διερευνήστε την θέση του επιπέδου και της ευθείας στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

7. Δίνονται οι εξισώσεις ενός επιπέδου και μιας ευθείας στον $\mathbb{R}^3$

$$2x + 3y - 2z = 5$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Διερευνήστε την θέση του επιπέδου και της ευθείας στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

8. Δίνονται οι εξισώσεις δύο επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 14z &= 10 \qquad (E_1) \\ x + 2y - 7z &= 3 \qquad (E_2) \end{aligned}$$

   Διερευνήστε την θέση των επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

9. Δίνονται οι εξισώσεις δύο επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 2x + 6y - 10z &= 20 \qquad (E_1) \\ x + 3y - 5z &= 10 \qquad (E_2) \end{aligned}$$

   Διερευνήστε την θέση των επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

Η Λύση της Άσκησης 4

Δίνονται οι εξισώσεις δύο επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{lr} 4x + \ \ y - 7z = 10 & (E_1) \\ x + 4y - \ z = 3 & (E_2) \end{array}$$

Διερευνήστε την θέση των επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$. Εάν αυτά τέμνονται βρείτε την τομής τους.

Λύση

Έλέγχουμε τους λόγους των συντελεστών των x και των y. Αφού $\frac{4}{1} \neq \frac{1}{4}$ τα επίπεδα πρέπει να τέμνονται. Για να βρώ την ευθεία τομής τους εφαρμόζω την μέθοδο **Gauss-Jordan.**

Ο επ' αυξημένος πίνακα θα είναι

$$\begin{array}{ccc|c l} 4 & 1 & -7 & 10 & (\mathrm{E}_1) \\ 1 & 4 & -1 & 3 & (\mathrm{E}_2) \end{array}$$

Αντιμεταθέτω τις δύο γραμμές και έχω ισοδύναμα

$$\begin{array}{ccc|c l} 1 & 4 & -1 & 3 & (\mathrm{E}_1') \\ 4 & 1 & -7 & 10 & (\mathrm{E}_2') \end{array}$$

Gauss: Η γραμμή οδηγός θα είναι: (E_1'). Πολλαπλασιάζω την (E_1') με (-4) και την προσθέτω στην (E_2') για να απαλείψω το 4 στην (E_2'). Οπότε

$$\begin{array}{ccc|c l} 1 & 4 & -1 & 3 & (\mathrm{E}_1') \\ 0 & -15 & -3 & -2 & (\mathrm{E}_2'') \end{array}$$

ή ισοδύναμα (πολλαπλασιάζοντας με (-1) την (E_2''))

$$\begin{array}{ccc|c l} 1 & 4 & -1 & 3 & (\mathrm{E}_1') \\ 0 & 15 & 3 & 2 & (\mathrm{E}_2''') \end{array}$$

Jordan: Πολλαπλασιάζω την (E_2''') με $\frac{1}{15}$ για να φτιάξω τον οδηγό της δεύτερης γραμμής. Οπότε

$$\begin{array}{ccc|c l} 1 & 4 & -1 & 3 & (E_1') \\ 0 & 1 & 3/15 & 2/15 & (E_2'''') \end{array}$$

Απλοποιώ το $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ και έχω

$$\begin{array}{ccc|c l} 1 & 4 & -1 & 3 & (\mathrm{E}_1') \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/15 & (\mathrm{E}_2'''') \end{array}$$

Με οδηγό την (E_2'''') φτιάχνω την καινούργια (E_1') : Γι'αυτό πολλαπλασιάζω την (E_2'''') με (-4) και την προσθέτω στην (E_1'). Οπότε

$$\begin{array}{ccc|c l} 1 & 0 & -9/5 & 37/15 & (\mathrm{E}_1'') \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/15 & (\mathrm{E}_2'''') \end{array}$$

Το σύστημα που δημιουργείται είναι:

$$\left.\begin{aligned} x-\frac{9}{5}z &= \frac{37}{15} \\ y+\frac{1}{5}z &= \frac{2}{15} \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{37}{15}+\frac{9}{5}t \\ y &= \frac{2}{15}-\frac{1}{5}t \\ z &= t \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= \frac{37}{15}+t\cdot\frac{9}{5} \\ y &= \frac{2}{15}+t\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \\ z &= 0+t\cdot 1 \end{aligned}\right\}$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{15} \\ \frac{2}{15} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{t} \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ΝΕΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. 1) Με τα δεδομένα της Άσκησης 4 , διερευνήστε άν υπάρχει σημείο που τέμνει η ευθεία των λύσεων το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες $\boldsymbol{x,y}$. Αν υπάρχει τέτοιο σημείο βρείτε το.
    2) Διερευνήστε άν υπάρχει σημείο που τέμνει η ευθεία των λύσεων το επίπεδο των αξόνων $\boldsymbol{x,z}$. Αν υπάρχει τέτοιο σημείο βρείτε το.

Λύση

1) Τα σημεία του επιπέδου που ορίζουν οι άξονες $\boldsymbol{x,y}$ θα είναι της μορφής $(x,y,0)$. Οπότε θα πρέπει να βρω κάποιο t ώστε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{15} \\ \frac{2}{15} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μπορώ να βρώ το t λύνοντας το σύστημα που προκύπτει. Επειδή η τελευταία εξίσωση θά δώσει $0=0+t$, δηλαδή $t=0$, προκύπτει ότι το σημείο που τέμνει η ευθεία των λύσεων το επίπεδο των αξόνων $\boldsymbol{x,y}$ θα είναι το $\left(\frac{37}{15}, \frac{2}{15}, 0\right)$.

2) Τα σημεία του επιπέδου που ορίζουν οι άξονες $\boldsymbol{x,z}$ θα είναι της μορφής $(x,0,z)$. Οπότε θα πρέπει να βρω κάποιο t ώστε

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{5} \\ \frac{2}{15} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα που προκύπτει είναι

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{37}{15} + t\frac{9}{5} \\ 0 &= \frac{2}{15} - t\frac{1}{5} \\ z &= t \end{aligned}\right\}$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $t = \frac{2}{3}$. Συνεπώς το σημείο θα είναι το: $\left(\frac{91}{15},\ 0,\ \frac{2}{3}\right) = \left(18.2,\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$.

11. Με τα δεδομένα της Άσκησης 4 , διερευνήστε άν υπάρχει σημείο που τέμνει η ευθεία των λύσεων το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες $\boldsymbol{y, z}$. Αν υπάρχει τέτοιο σημείο βρείτε το.

Απάντηση.

Υπάρχει τέτοιο σημείο και είναι το $\left(0,\ \frac{11}{27}, -\frac{37}{27}\right)$.