Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Γραμμική εξίσωση n μεταβλητών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

όπου τα $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ είναι σταθερές και τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ δεν είναι όλα ίσα με το μηδέν.

Ομογενής γραμμική εξίσωση όταν το b=0: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$

Σε μια γραμμική εξίσωση οι μεταβλητές εμφανίζονται ΜΟΝΟ υψωμένες στην πρώτη δύναμη.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$
$$\sqrt{2}x_2 + x_1 = x_3$$

Γραμμικές εξισώσεις

$$\sqrt{x_1} - 5x_2 = 2$$
$$sinx_1 - x_2 = x_3$$

Μη γραμμικές εξισώσεις

Οι μεταβλητές (άγνωστοι) μπορούν να συμβολιστούν και με άλλους τρόπους (π.χ. x, y, z).
Συνήθως με τα πρώτα γράμματα του αλφαβήτου συμβολίζουμε σταθερές (π.χ. a, b, c) και με τα τελευταία μεταβλητές.

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Μια ομάδα γραμμικών εξισώσεων με τις ίδιες μεταβλητές (ίδιους αγνώστους) ονομάζεται σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

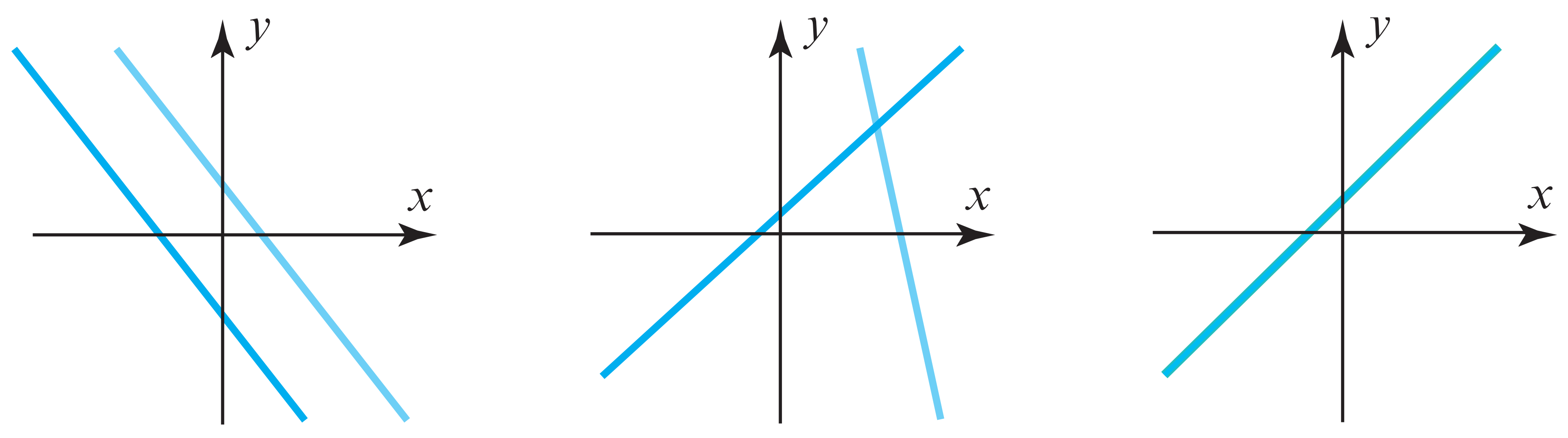
Σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους.

Η λύση του συστήματος είναι ένα σύνολο n αριθμών $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ που ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Γραμμικά συστήματα δύο ή τριών μεταβλητών

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Οι δύο γραμμικές εξισώσεις είναι εξισώσεις ευθειών στο χώρο, πιο συγκεκριμένα στο επίπεδο xy. Κάθε λύση (x,y) του συστήματος είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.



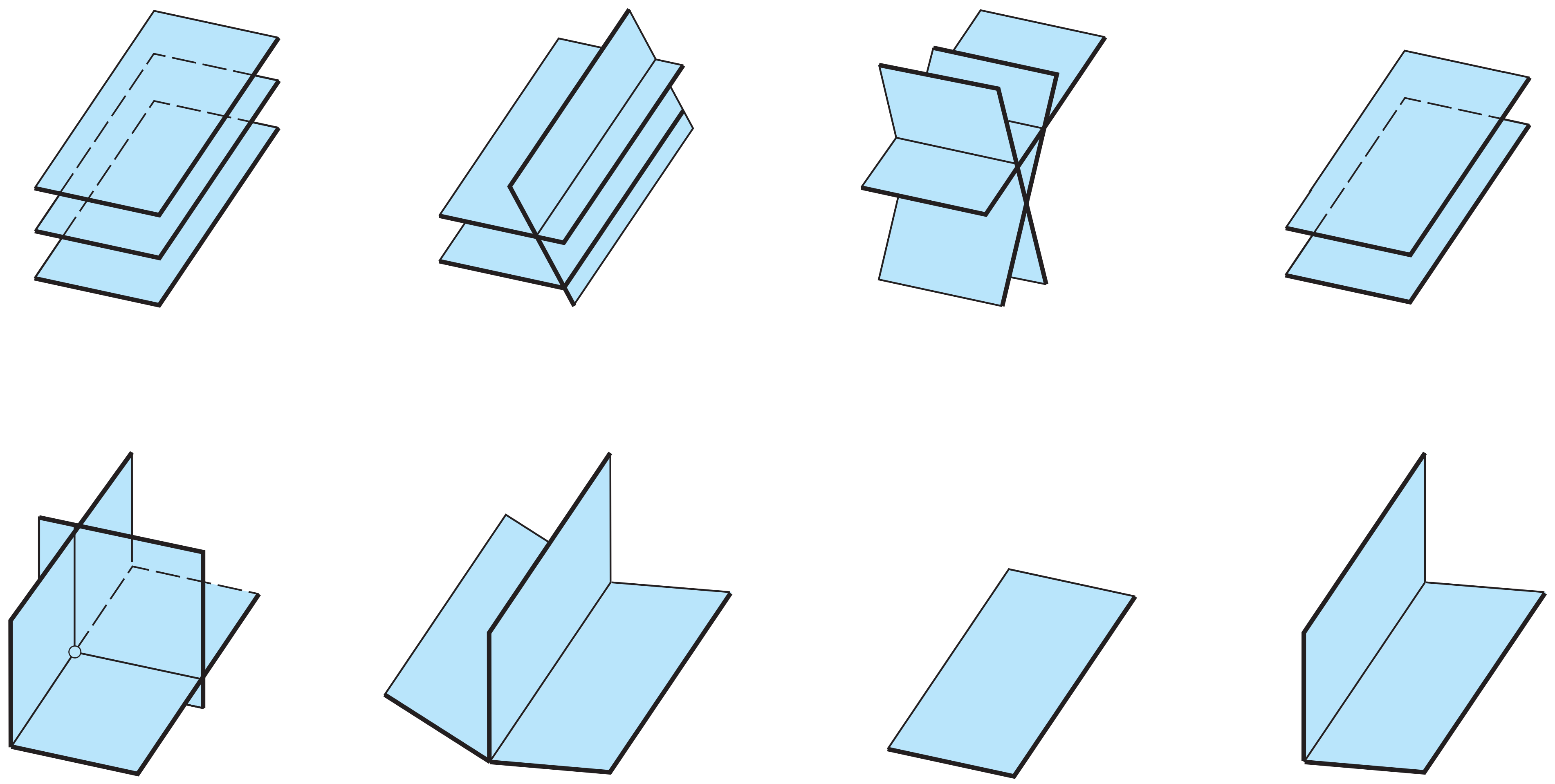
Καμία λύση Μία λύση Άπειρες λύσεις

Συμβατό σύστημα εξισώσεων: έχει τουλάχιστον μια λύση.
Ασύμβατο σύστημα εξισώσεων: δεν έχει καμία λύση.

Γραμμικά συστήματα δύο ή τριών μεταβλητών

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1\\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2\\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

Οι τρεις γραμμικές εξισώσεις είναι εξισώσεις επιπέδων στο χώρο.



Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει καμία, μία ή άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

$$x - y + (2x + y) = 1 + 6 <=> x = 7/3, y = 4/3$$

Λύση του συστήματος: $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

$$3x + 3y - 3(x + y) = 6 - 3 \cdot 4 <=> 0 = -6$$

Καμία λύση, ασύμβατο σύστημα

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

$$16x - 8y - 4(4x - 2y) = 4 - 4 \cdot 1 <=> 0 = 0$$

Άπειρες λύσεις. Μπορούν να εκφραστούν με παραμετρικό τρόπο.

Εάν $y = t$ τότε $x = \frac{1}{4} + \frac{t}{2}$

Λύση του συστήματος: $(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}, t)$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

Άπειρες λύσεις. Μπορούν να εκφραστούν με παραμετρικό τρόπο.

Εάν $y = r$ και $z = s$ τότε $x = 5 + r - 2s$

Λύση του συστήματος: $(5 + r - 2s, r, s)$

Επαυξημένος πίνακας συστήματος

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&...\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}
$$

Ο επαυξημένος πίνακας περιέχει μόνο τις σταθερές του συστήματος.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\
4x_1 - x_2 &= 3 \\
x_2 + 6x_3 &= 7
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & -3 & 1 & 0 \\
4 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 6 & 7
\end{bmatrix}
$$

Λύση του συστήματος με αντικατάσταση: Αντικατάσταση με ισοδύναμο σύστημα (που έχει τις ίδιες λύσεις) απλούστερο, που μπορεί να λυθεί ευκολότερα.

Κατά την επίλυση συστήματος μπορούμε να:

- Πολλαπλασιάσουμε μια εξίσωση με αριθμό διάφορο του μηδέν.
- Αλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων.
- Προσθέσουμε το πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης σε άλλη.

Κατ’αντιστοιχία στον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος επιτρέπονται οι παρακάτω στοιχειώδεις γραμμοπράξεις ώστε να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο ισοδύναμο σύστημα:

- Πολλαπλασιασμός γραμμής του πίνακα με αριθμό διάφορο του μηδέν.
- Αλλαγή της σειράς των γραμμών.
- Πρόσθεση του πολλαπλάσιου μιας γραμμής σε άλλη.

Οι πίνακες που προκύπτουν από τις στοιχειώδεις γραμμοπράξεις είναι **γραμμικά ισοδύναμοι**.

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 7 \\ -2x_1 - 7x_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= -3 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 10 \end{aligned}$$