Πράξεις Πινάκων

Ορισμός Πίνακας $m \times n$ ονομάζεται μια διάταξη στοιχείων σε m γραμμές και n στήλες

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$, είναι πίνακας 2×3,

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, είναι πίνακας 4×4

Οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα λέγονται διαστάσεις του πίνακα. Κάθε στοιχείο έχει συγκεκριμένη θέση μέσα στον πίνακα η οποία υποδηλώνεται με δύο δείκτες που αντιστοιχούν στη γραμμή και τη στήλη στην οποία βρίσκεται το στοιχείο. Συνήθως οι πίνακες συμβολίζονται μέ ένα κεφαλαίο γράμμα και τα στοιχεία ενός πίνακα συμβολίζονται με το αντίστοιχο μικρό και τους δείκτες της θέσης τους. Δηλαδή $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$ κ.ο.κ.

Διαγώνιος του πίνακα αποκαλούνται τα στοιχεία στις θέσεις $(1,1)\,,(2,2)\,,...,(k,k)$

Πρόσθεση Πινάκων Η πρόσθεση γίνεται μεταξύ πινάκων που έχουν ακριβώς τις ίδιες διαστάσεις. Προσθέτουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια θέση

π.χ. αν έχουμε τους 3×2 πίνακες$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 1+-1 & 0-1 \\ -2+1 & 0+2 \\ 0+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Είναι προφανές ότι στην πρόσθεση πινάκων ισχύει η *αντιμεταθετική ιδιότητα*, δηλαδή

$A + B = B + A$

όπως και η *προσεταιριστική ιδιότητα*

$(A + B) + C = A + (B + C)$

Πολλαπλασιασμός Βαθμωτού με Πίνακα Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με ένα πίνακα πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό με κάθε στοιχείο του πίνακα. Δηλαδή

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

πχ $(-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -22 \end{bmatrix}$

Ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού με πίνακα προηγείται της πρόσθεσης των πινάκων έτσι έχουμε

$$2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -6 \\ -9 & -8 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Για τον πολλαπλασιασμό βαθμωτού με πίνακα ισχύουν οι *επιμεριστικές ιδιότητες*

$k\,(A+B) = kA + kB$

$(k+m)\,A = kA + mA$

και η *"προσεταιριστική"*

$(km)\,A = k\,(mA)$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Το γινόμενο δύο πινάκων $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ διαστάσεων $m \times k$ και $k \times n$ αντίστοιχα είναι ο $m \times n$ πίνακας$C = [c_{ij}]$ του οποίου το στοιχείο που βρίσκεται στην (i, j) θέση προέρχεται από το "εσωτερικό γινόμενο" της i γραμμής του A επί την j στήλη του B. Δηλαδή:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} = \sum_{g=1}^{k} a_{ig}b_{gj}$$

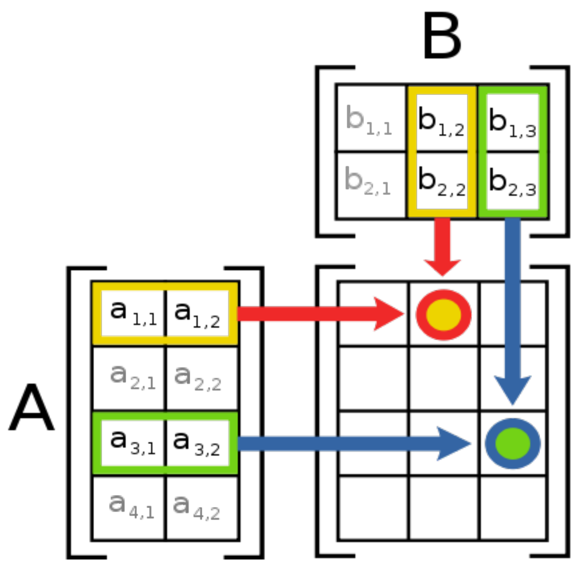
Πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές του πρώτου πίνακα A με τις στήλες του δευτέρου B γίνεται κατανοητό ότι οι γραμμές του A θα πρέπει να έχουν τόσα στοιχεία όσα οι στήλες του B. Με άλλα λόγια οA να έχει τόσες στήλες όσες είναι οι γραμμές του B .

*Παράδειγμα*1: Έστω ο 4×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ και ο 2×3 πίνακας $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Το γινόμενο $C = AB$ ορίζεται επειδή ο πρώτος πίνακας A έχει τόσες στήλες όσες γραμμές ο δεύτερος B. Το αποτέλεσμα προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε γραμμή του πρώτου με κάθε στήλη του δευτέρου. Έτσι έχουμε

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + (-1)(-2) & 1\cdot 0 + (-1)(-3) & 1\cdot 2 + (-1)\,1 \\ 0\cdot 3 + 2\,(-2) & 0\cdot 0 + 2\,(-3) & 0\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ (-2)\cdot 3 + 0\,(-2) & (-2)\cdot 0 + 0\,(-3) & (-2)\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3 + 1\,(-2) & (-1)\cdot 0 + 1\,(-3) & (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & 2 \\ -6 & 0 & 4 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$



(Πηγή διαγράμματος: wikimedia)
Στο παραπάνω παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός BA δεν ορίζεται γιατί οι στήλες του B δεν ταιριάζουν με το πλήθος των γραμμών του A. Ακόμα όμως κι όταν ορίζονται και οι δύο πολλαπλασιασμοί, δεν έχουν το ίδιο αποτέλεσμα

Παράδειγμα 2:

έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ενώ $BA = \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

ο πίνακας $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ο 2×2 *μηδενικός πίνακας*.

Μηδενικός $m \times n$ **πίνακας** καλείται ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία σε κάθε θέση ισούται με μηδέν. Για τον μηδενικό πίνακα ισχύουν

$A + O = A$

$AO = O$

όπου οι παραπάνω πράξεις ορίζονται

Όπως είδαμε και στο παραπάνω παράδειγμα δύο μή μηδενικοί πίνακες μπορεί να έχουν γινόμενο τον μηδενικό πίνακα.

Τριγωνικός Άνω (ή Κάτω) καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω (ή πάνω) από τη διαγώνιο, ισούνται με το μηδέν

πχ ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι άνω τριγωνικός ενώ ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$είναι κάτω τριγωνικός

Διαγώνιος πίνακας καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας που κάθε στοιχείο του εκτός της διαγωνίου, ισούται με 0.

πχ. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Μοναδιαίος $n \times n$ **πίνακας,** I_n καλείται ένας διαγώνιος πίνακας ο οποίος έχει μονάδες στη διαγώνιο:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, κοκ

Για τον μοναδιαίο είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ισχύει

$I_n A = A I_m = A$

για κάθε A $m \times n$. Δηλαδή ο μοναδιαίος πίνακας είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Ανάστροφος του πίνακα A Συμβολίζουμε με A^T και καλούμε ανάστροφο τον πίνακα που οι στήλες του είναι οι γραμμές του A.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Για τον ανάστροφο ισχύουν:

$\left(A^T\right)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$