1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Γραμμική Άλγεβρα

Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών – Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα γινόμενα πινάκων:

α) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

β) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

γ) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

δ) $\begin{pmatrix} 2019 & 2020 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2019 \\ 2020 \end{pmatrix}$

ε) $\begin{pmatrix} 2019 \\ 2020 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2019 & 2020 \end{pmatrix}$

στ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{11}{12} \\ \frac{13}{14} & \frac{15}{16} \end{pmatrix}$

ζ) $\begin{pmatrix} 1.23 & 4.56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.89 \\ 10.11 \end{pmatrix}$

η) $\begin{pmatrix} 7.89 \\ 10.11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.23 & 4.56 \end{pmatrix}$

(Υπόδειξη: Επιτρέπεται και το κομπιουτεράκι!)

2. Μια εταιρεία παράγει δύο ειδών κονσέρβες: τοματάκια και τοματοχυμό, και τα συσκευάζει σε κονσέρβες τεσσάρων μεγεθών: small, medium, large και x-large. Στον πίνακα A δίνονται σε kg τα τέσσερα μεγέθη.

$$\begin{array}{cc} \text{Κονσέρβες} & \begin{array}{cccc} \text{Small} & \text{Medium} & \text{Large} & \text{X-Large} \end{array} \\ \text{kg} & \begin{pmatrix} 0.17 & 0.25 & 0.50 & 0.75 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Ο πίνακας B μας δίνει πληροφορίες για την ημερήσια παραγωγή κονσερβών

$$\begin{array}{cc} \text{Κονσέρβες} & \begin{array}{cc} \text{τοματάκια} & \text{τοματοχυμός} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Small} \\ \text{Medium} \\ \text{Large} \\ \text{X-large} \end{array} & \begin{pmatrix} 2000 & 2500 \\ 3000 & 1500 \\ 2500 & 1000 \\ 1000 & 500 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

(i) Υπολογίστε το γινόμενο AB.

(ii) Τι εκφράζουν τα στοιχεία του πίνακα AB;

3. Να υπολογίσετε τις τάξεις των παρακάτω πινάκων:

α) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ β) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -7 & 9 \end{pmatrix}$

γ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ δ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

ε) $\begin{pmatrix} 1.12 & 3.14 \\ 5.67 & 8.91 \end{pmatrix}$ στ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 5.67 & 8.91 \end{pmatrix}$

ζ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} \\ 7.89 & 10.11 & 12.13 \end{pmatrix}$

4. Θεωρήστε τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τους ακόλουθους πίνακες (όπου αυτό είναι δυνατό).

(i) $D+E$, (ii) AB, (iii) $2C$, (iv) BA, (v) $A(BC)$, (vi) CAB .

5. Λύστε την εξίσωση πινάκων με αγνώστους τα a, b, c, d:

$$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ c+3d & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Βρείτε α και β έτσι ώστε να ισχύει:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

α) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{8} \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 5.67 & 8.91 \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} 1.23 & 4.56 \\ 7.89 & 10.11 \end{vmatrix}$

ε) $\begin{vmatrix} 2018 & 2019 \\ 2020 & 2021 \end{vmatrix}$ στ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

ζ) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -6 & 4 & 1 \\ 4 & 12 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

8. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

α) $\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{R}$. β) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

9. Λύστε τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα:

α)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{array} \right. .$$

β)

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x - 5y = 2 \\ 3x - 4y = 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right. .$$

γ)

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - 3z + 2w = 5 \\ 3x - 3y - 5z - 2w = 2 \end{array} \right. .$$

δ)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{array} \right. .$$

ε)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

στ)

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = \frac{7}{8} \\ \frac{9}{10}x - \frac{11}{12}y = \frac{13}{14} \end{cases}.$$

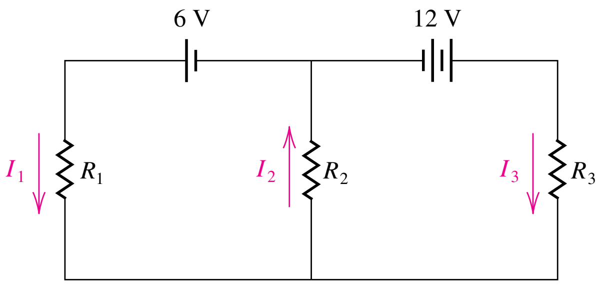
ζ)

$$\begin{cases} 4.21x - 5.62y = 3.89 \\ 7.34x - 3.91y = 4.87 \end{cases}.$$

η)

$$\begin{cases} \frac{5}{6}x - 7.83y = 11.24 \\ \frac{7}{8}x - 3.21y = 4.56 \end{cases}.$$

10. Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με τρεις αντιστάσεις, μια μπαταρία 6 V, και μια μπαταρία 12 V.



Χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kirchhoff μπορεί να αποδειχθεί ότι τα τρία ρεύματα I_1, I_2 και I_3 είναι λύσεις του ακόλουθου συστήματος:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = 6 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = 12 \end{cases}.$$

Να υπολογίσετε τα τρία ρεύματα αν

(i) $R_1 = R_2 = R_3 = 3$ ohms.

(ii) $R_1 = 4$ ohms, $R_2 = 1$ ohm, και $R_3 = 4$ ohms.[1]

11. Βρείτε την εξίσωση του κυβικού πολυωνύμου $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ που διέρχεται από τα ακόλουθα 4 σημεία:

$$P(0, -6), \quad Q(1, -11), \quad R(-1, -5), \quad S(2, -14).$$

[1] Η άσκηση αυτή είναι από το βιβλίο: Swokowski & Cole, Algebra and Trigonometry (with Analytic Geometry).

12. Να βρείτε τον αντίστροφο του παρακάτω πίνακα, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

13. Να λύσετε τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων κ και λ:

α)
$$\begin{cases} \kappa x + \lambda y + z = 1 \\ x + \kappa\lambda y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \kappa z = 1 \end{cases}.$$

β)
$$\begin{cases} \kappa x + \lambda w = 3 \\ \kappa x + \kappa y + 6w = 6 \\ \kappa y + 3w = \lambda \end{cases}.$$

γ)
$$\begin{cases} \kappa x + \lambda y + z = 1 \\ x + \kappa\lambda y + z = 1 \\ x + \lambda y + \kappa z = 1 \end{cases}.$$

14. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \end{cases},$$
για τις διάφορες τιμές του λ.

15. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι αντίστροφοι των ακόλουθων πινάκων:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, (ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, (iii) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

16. Χωρίς να υπολογίσετε τις ορίζουσες εξηγήστε γιατί ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

(α′) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, (β′) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

(γ′) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 6 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, (δ′) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

17. Υπολογίστε το x αναπτύσσοντας τις ακόλουθες ορίζουσες:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} x & 12 & 13 \\ 0 & x-1 & 23 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(ii)} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(iii)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν 66 οχήματα (επιβατικά Ι.Χ., φορτηγά, μηχανές και ποδήλατα). Τα επιβατικά Ι.Χ. είναι τετραπλάσια από τα φορτηγά. Ο συνολικός αριθμός ελαστικών (4 για κάθε επιβατικό Ι.Χ. και για κάθε φορτηγό, και 2 για κάθε μηχανή και ποδήλατο) είναι 252. Πόσα είναι τα επιβατικά; Πόσα είναι τα ποδήλατα;

19. Ο Γιώργος και η Μαίρη έχουν και οι δύο μαζί 20 ευρώ. Η Μαίρη και ο Πέτρος έχουν και οι δύο μαζί 15 ευρώ. Πόσα χρήματα έχουν και οι τρεις μαζί;