ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ορισμός της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα

Μια απλή περιγραφή της ορίζουσας είναι η εξής: η ορίζουσα ενός nxn πίνακα είναι ένα άθροισμα n! γινομένων, όπου κάθε γινόμενο περιέχει ακριβώς n όρους.

Ορίζουσα ενός πίνακα 2x2

Έστω Α ένας πίνακας 2χ2 $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

Η ορίζουσα det{A } ενός τετραγωνικού πίνακα Α (2x2) ορίζεται από την πράξη:

det(A)=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ορίζουσα ενός πίνακα 3x3 (Κανόνας του Sarrus)

Έστω ο πίνακας Α 3χ3. A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας σύμφωνα με τον κανόνα του Sarrus επαναλαμβάνουμε τις 2 πρώτες στήλες στο τέλος του πίνακα.

A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$

Η ορίζουσα προκύπτει ως γινόμενα των διαγωνίων του ως προς κάθε κατεύθυνση όπου τα γινόμενα των στοιχείων των διαγωνίων με κατεύθυνση προς τα δεξιά λαμβάνονται με θετικό πρόσημο ενώ τα γινόμενα των διαγωνίων με κατεύθυνση προς τα αριστερά με αρνητικό πρόσημο. Δηλαδή έχουμε :

det(A)= $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Παρατήρηση: Ο κανόνας του Sarrus ισχύει μόνο για πίνακες 3χ3.

Γενικός τρόπος υπολογισμού ορίζουσας πίνακα nxn

Σε κάθε στοιχείο α_{ij} ενός πίνακα Α, υπάρχει ένας αντίστοιχος υποπίνακας A_{ij} οποίος προκύπτει από τον αρχικό πίνακα διαγράφοντας την i γραμμή και την j στήλη και ονομάζεται συμπαράγοντας υποπίνακας. Συνεπώς για έναν nxn πίνακα υπάρχουν nxn συμπαράγοντες υποπίνακες.

Η ορίζουσα βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία σε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη με τους αντίστοιχους συμπαράγοντες τους και στην συνέχεια προσθέτοντας τα αφού προηγουμένως η τιμή της ορίζουσας του κάθε συμπαράγοντα υποπίνακα πολλαπλασιαστεί με $(-1)^{i+j}$. Δεν έχει σημασία ποια γραμμή ή στήλη θα επιλέξετε επειδή η απάντηση είναι η ίδια σε κάθε περίπτωση. Ας αναπτυχθούμε κατά μήκος της πρώτης γραμμής.

A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Έχουμε det(A)=$a_{11}((-1)^{1+1})\det(A_{11}) + a_{12}((-1)^{1+2})\det(A_{12}) + \dots \dots a_{1n}(-1)^{1+n})\det(A_{1n})$

Παρομοίως εάν αναπτυχθούμε στην δεύτερη στήλη, έχουμε:

det(A)=$a_{12}((-1)^{1+2})\det(A_{12}) + a_{22}((-1)^{2+2})\det(A_{22}) + \cdots \dots . a_{n2}((-1)^{n+2})\det(A_{n2})$

Παράδειγμα γενικευμένης μεθόδου υπολογισμού ορίζουσας ενός πίνακα 3x3

Έστω ο πίνακας Α 3χ3. A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Σε κάθε στοιχείο $α_{ij}$ ενός πίνακα Α, υπάρχει ένας αντίστοιχος υποπίνακας A_{ij} οποίος προκύπτει από τον αρχικό πίνακα διαγράφοντας την i γραμμή και την j στήλη και ονομάζεται συμπαράγοντας υποπίνακας. Συνεπώς για έναν 3χ3 πίνακα υπάρχουν 9 συμπαράγοντες υποπίνακες.

Διαγράφοντας μία γραμμή και μία στήλη ενός πίνακα 3χ3 οι προκύπτοντες 9 συμπαράγοντες υποπίνακες είναι 2χ2 οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ορίζουσες ως ορίζουσες πίνακα 2χ2 με την μόνη διαφορά ότι θα έχουν ένα προκαθορισμένο πρόσημο (+) ή (-) το οποίο προσδιορίζεται από την τιμή του αθροίσματος των δεικτών i,j ως (+) εάν το άθροισμα των δεικτών είναι άρτιος αριθμός και ως πλην ένα το άθροισμα των δεικτών είναι περιττός αριθμός. Για τον πίνακα 3χ3 το αντίστοιχο πρόσημο δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Είμαστε σε θέση τώρα να περιγράψουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 3χ3. Η ορίζουσα βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία σε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη με τους αντίστοιχους συμπαράγοντες τους και στην συνέχεια προσθέτοντας τα. Δεν έχει σημασία ποια γραμμή ή στήλη θα επιλέξετε επειδή η απάντηση είναι η ίδια σε κάθε περίπτωση. Ας αναπτυχθούμε κατά μήκος της πρώτης γραμμής.

A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Έχουμε det(A)=$a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})$

Παρομοίως εάν αναπτυχθούμε στην δεύτερη στήλη, έχουμε:

det(A)=$-a_{12}\det(A_{12}) + a_{22}\det(A_{22}) - a_{32}\det(A_{32})$

Παράδειγμα

α) Υπολογισμός με τον κανόνα του Sarrus

A=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

det(A)=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2x3x3 + 4x7x2 + 1x4x1 - 4x4x3 - 2x7x1 - 1x3x2 = 18 + 56 + 4 - 48 - 14 - 6 = 78 - 68 = 10$

β) Με χρήση συμπαραγόντων υποπινάκων και ανάπτυξη με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής

det(A)=2$\left((-1)^{(1+1)}\right)det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\left((-1)^{(1+2)}\right)det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1\left((-1)^{(1+3)}\right)det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(3x3 - 7x1) - 4(4x3 - 7x2) + 1(4x1 - 2x3) = 2(9 - 7) - 4(12 - 14) + 1(9 - 7) = 2x2 - 4x(-2) + 1x(-2) = 4 + 8 - 2 = 10$

Παρατήρηση: Επειδή δεν παίζει ρόλο ποια σειρά ή στήλη θα επιλέξουμε κερδίζουμε χρόνο επιλέγοντας την κατάλληλη γραμμή ή στήλη.

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας B= $\begin{pmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Προφανώς εδώ συμφέρει να επιλέξουμε την δεύτερη γραμμή διότι έχουμε

det(B)=$-0 * det\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + 2 * det\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 0 * det\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 2 * (10x3 - 5x2) = 2x20 = 40$

Γενικά το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας ενός nxn πίνακα δίνεται από την σχέση

$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}.\, a_{kj}.\det(A_{kj})$ όπου A_{kj} είναι ο αντίστοιχος συμπαράγοντας πίνακας του στοιχείου α_{kj}.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Λύση

Θα υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας αναπτύσσοντας κατά μήκος της 1ης γραμμής.

det(A)=$1*\left((-1)^{(1+1)}\right)*\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 7 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}+0*\left((-1)^{(1+2)}\right)*\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}+2*\left((-1)^{(1+3)}\right)*\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}+3*\left((-1)^{(1+4)}\right)*\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1*(-50)+0*(-87)+2*63+3*(-1)*(-133)=-50+126+399=475$

Ιδιότητες Οριζουσών

- Εάν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή (ή στήλη), τότε det(A)=0

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

Λύση

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Sarrus έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =1*0*6+0*5*4+(-3)*2*0-0*2*6-1*5*0-(-3)*0*4=0$$

Επίσης το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε εάν υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας παίρνοντας το ανάπτυγμα κατά μία γραμμή ή κατά μία στήλη.

- Εάν ο πίνακας A έχει δύο ίσες γραμμές (ή στήλες), τότε det(A)=0

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

Λύση

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{1 * 3 * (-3) + 4 * 5 * 1 + (-3) * 2 * 4 - 4 * 2 * (-3) - 1 * 5 * 4 - (-3) * 3 * 1 = -9 + 20 - 24 + 24 - 20 + 9 = 0}$$

- Εάν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός (ή κάτω τριγωνικός), τότε η ορίζουσα του A ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων. Ιδιαίτερα, η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι ίση με την μονάδα.

Παράδειγμα

$$\textbf{Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix}$$

Λύση:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{adf + be0 + c00 - b0f - ae0 - cd0 = adf}$$

- Εάν ο πίνακας B προκύπτει από τον A:
  - Με αναλλαγή δύο γραμμών (ή στηλών) τότε ισχύει: det(B)=-det(A)

    Παράδειγμα

    Αν $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 * 2 - 4 * 1 = 2$, τότε η αντιμετάθεση των 2 στηλών του A αλλάζει το πρόσημο της αρχικής ορίζουσας. Θα έχουμε:

    $$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 * 1 - 2 * 3 = -2$$

  - Με πολλαπλασιασμό μίας γραμμής (ή στήλης) με ένα k∈ R τότε ισχύει det(B)=kdet(A)

    Παράδειγμα

    Έστω ο πίνακας A=$\begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Παρατηρούμε ότι η πρώτη γραμμή μπορεί να γραφεί ως 3*(6, 3 , 1). Θα δείξουμε ότι η ορίζουσα του det(A)= 3*$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$=3*det(B) όπου B=$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

    Λύση

det(A)= $\begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 0 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 18*(-6)*2+9*8*6+3*0*3-9*0*2-18*8*3-3*(-6)*6=-108=3*(-36)$

det(B)= $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 6*(-6)*2+3*8*6+1*0*3-3*0*2-6*8*3-1*(-6)*6=-72+144+0-0-144+36=-36$

- o Με πρόσθεση σε μία γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασίου άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε ισχύει: det(B)=det(A)

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας A= $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ και ο πίνακας B= $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ο οποίος προέκυψε από τον A προσθέτοντας στην 1η γραμμή την 3η γραμμή του.

Θα δείξουμε ότι det(A)=det(B)

Λύση

Από το παραπάνω παράδειγμα det(A)=-36

det(B)= $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 0 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 12*(-6)*2+6*8*6+3*0*3-6*0*2-12*8*3-3*(-6)*6=-144+288-288+108=-36$

- Ισχύει det(A)=det(A^T) για κάθε τετραγωνικό πίνακα

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας A= $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ και έστω ο πίνακας A^T= $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

Θα δείξουμε ότι det(A)=det(A^T)

Λύση

Από τα παραδείγματα παραπάνω έχουμε βρει ότι det(A)=-36

det(A^T)= $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 6*(-6)*2+0*3*1+6*3*8-0*3*2-6*3*8-6*(-6)*1=-72+0+144-0-144+36=-36$

- Ισχύει det(AB)=(det(A)(det(B) για κάθε τετραγωνικούς πίνακες των ιδίων διαστάσεων.

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και ο πίνακας B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Θα δείξουμε ότι det(AB)=det(A)*det(B)

Λύση

det(A)=2*3-1*1=5, det(B)=1*0-2*1=-2 και det(A)*det(B)=5*(-2)=-10

A*B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1+1*2 & 2*1+1*0 \\ 1*1+3*2 & 1*1+3*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

και det(AB)=4*1-2*7=-10

- Αν δύο ή περισσότερες στήλες (ή γραμμές) σε έναν πίνακα Α είναι γραμμικά εξαρτημένες (δηλαδή όταν η μία στήλη (ή γραμμή) είναι πολλαπλάσιο μιας άλλης τότε η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το μηδέν.

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας A=$\begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Παρατηρούμε ότι η 1^{η} γραμμή είναι πολλαπλάσιο της 3^{ης} γραμμής. Θα δείξουμε ότι det(A)=0

Λύση

det(A)=$\begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 13 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 0 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 18*(-4)*1+9*13*6+3*0*3-9*0*1-18*13*3-3*(-4)*6 = -72+702+0-0-702+72 = 0$

- Αν κάθε στοιχείο ενός πίνακα τάξης n πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό κ ∈ R, τότε η αντίστοιχη ορίζουσα ισούται με $k^n|A|$, δηλαδή det(k*A)=k^{n}*det(A). Όταν k=-1, τότε θα ισχύει:

det(-1)A)=det(-A)=$\begin{cases} \det(A) & όταν\ ο\ n\ είναι\ άρτιο \\ -\det(A) & όταν\ ο\ n\ είναι\ περιττός \end{cases}$

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας Α=$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 12 & -3 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix} = 3 * \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ Θα δείξουμε ότι det(A)=$3^3 \det(B)$ όπου Β=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Λύση

det(A)=$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 12 & -3 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 12 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = 6 * 12 * (-9) + 3 * (-3) * 6 + 9 * 3 * 15 - 3 * 3 * (-9) - 6 * (-3) * 15 - 9 * 12 * 6 = -648 - 54 + 405 + 81 + 270 - 648 = -594$

det(B)=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2 * 4 * (-3) + 1 * (-1) * 2 + 3 * 1 * 5 - 1 * 1 * (-3) - 2 * (-1) * 5 - 3 * 4 * 2 = -24 - 2 + 15 + 3 + 10 - 24 = -22$

3^3*(-22)=-594 Άρα ισχύει det(A)=$3^3 \det(B)$.

Άσκηση

Με χρήση ιδιοτήτων να αποδειχθεί η σχέση:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\alpha + \alpha^2 & 2\beta + \beta^2 & 2\gamma + \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$$

Λύση

Χρήση ιδιότητας (εάν μία γραμμή ή στήλη μιας ορίζουσας πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό κ τότε η τιμή της ορίζουσας πολλαπλασιάζεται επί κ.

Παρατηρούμε ότι η $1^η$ στήλη μπορεί να γραφεί ως α$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$ Ομοίως η $2^η$ στήλη μπορεί να γραφεί ως β$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$ και η $3^η$ στήλη ως γ$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$

Άρα έχουμε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\alpha + \alpha^2 & 2\beta + \beta^2 & 2\gamma + \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} =$

$\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 + \alpha & 2 + \beta & 2 + \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$=αβγ(det(A)) όπου det(A)=$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 + \alpha & 2 + \beta & 2 + \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$

Χρήση ιδιότητας: Με πρόσθεση σε μία γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασίου άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε ισχύει: det(B)=det(A

Πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή επί 2 και την αφαιρούμε από την $2^η$ γραμμή και έχουμε:

det(A)= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$

Από την $2^η$ στήλη αφαιρούμε την $1^η$ στήλη και από την $3^η$ στήλη αφαιρούμε την $1^η$ στήλη και έχουμε:

det(A)= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$

Η $2^η$ στήλη μπορεί να γραφεί ως (β-α)$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta+\alpha \end{pmatrix}$ Ομοίως η $3^η$ στήλη μπορεί να γραφεί ως (γ-α)$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \gamma+\alpha \end{pmatrix}$ οπότε η

det(A)=(β-α)(γ-α) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & (\beta+\alpha) & (\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$ Στην συνέχεια από την $3^η$ στήλη αφαιρούμε την $2^η$ στήλη και έχουμε:

det(A)= (β-α)(γ-α)) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & (\beta+\alpha) & (\gamma-\beta) \end{vmatrix}$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: Εάν ο πίνακας είναι άνω ή κάτω τριγωνικός η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

det(A)=(β-α)(γ-α)(γ-β) οπότε τελικά έχουμε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\alpha+\alpha^2 & 2\beta+\beta^2 & 2\gamma+\gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

Άσκηση

Με χρήση ιδιοτήτων οριζουσών να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας

A= $\begin{vmatrix} 1+\chi & 1 & 1 \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\chi \end{vmatrix}$

Λύση

det(A)= $\begin{vmatrix} 1+\chi & 1 & 1 \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\chi \end{vmatrix} =$

$\pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \tau\eta\nu\ 2\eta\ \kappa\alpha\iota\ 3\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ \sigma\tau\eta\nu\ 1\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} = \begin{vmatrix} 3+\chi & 3+\chi & 3+\chi \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\chi \end{vmatrix} =$

$(3+\chi)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1+\chi \end{vmatrix} =$

$\alpha\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ 1\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\nu\ 2\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\nu\ 3\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} =$

$(3+\chi)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi \end{vmatrix} = \kappa\acute{\alpha}\tau\omega\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma = (3+\chi)\chi^2$