Σώμα.

Έστω F σύνολο εφοδιασμένο με δύο "πράξεις", δηλ. δύο απεικονίσεις $f, g : F \times F \to F$ όπου η f καλείται προσθετική πράξη και η εικόνα $f(a,b)$ δύο $a, b \in F$ συμβολίζεται με $a+b \in F$ και καλείται άθροισμα των $a, b \in F$, για τα οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

(α) $a+b = b+a$, $a, b \in F$ (αντιμεταθετικότητα αθροίσματος)

(β) $(a+b)+\gamma = a+(b+\gamma) = a+b+\gamma$, $a, b, \gamma \in F$ (προσεταιριστικότητα αθροίσματος)

ενώ η g καλείται πολλαπλασιαστική πράξη και η εικόνα $g(a,b)$ δύο $a, b \in F$ συμβολίζεται με $a \cdot b \in F$ και καλείται γινόμενο των $a, b \in F$, για τα οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

(γ) $a \cdot b = b \cdot a$, $a, b \in F$ (αντιμεταθετικότητα)

(δ) $(a \cdot b) \cdot \gamma = a \cdot (b \cdot \gamma) = a \cdot b \cdot \gamma$, $a, b, \gamma \in F$ (προσεταιριστικότητα γινομένου)

(ε) $a \cdot (b+\gamma = a \cdot b + a \cdot \gamma = (a+\gamma) \cdot a$ (επιμεριστικότητα γινομένου και αθροίσματος).

Το στοιχείο $0_F \in F$ (ή απλά 0) καλείται μηδενικό στοιχείο του σώματος F, όταν

$$0+a = a+0 = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{(ουδέτερο στοιχείο της αθροιστικής πράξης)}$$

Το στοιχείο $-a \in F$ καλείται αντίθετο του στοιχείου $a \in F$, όταν

$$(-a)+a = a+(-a) = 0_F.$$

Ισχύει ότι,

$$(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = (-1+1) \cdot a = 0 \cdot a = 0, \quad a \in F, \text{ και}$$
$$a(-1) + a = a \cdot (-1) + a \cdot 1 = a(-1+1) = a \cdot 0 = 0, \quad a \in F,$$

οπότε το $(-1)a = -a$, $a \in \mathbb{R}$.

Το στοιχείο 1_F (ή απλά 1) καλείται μοναδιαίο στοιχείο του σώματος F, όταν

$$1\cdot a = a\cdot 1 = a,\ a\in F$$ (ουδέτερο στοιχείο της πολλαπλασιαστικής πράξης)

Το στοιχείο $a^{-1}\in F$ (ή $\frac{1}{a}$ ή $1/a$) καλείται αντίστροφο του $a\in F^{*} := F-\{0_F\}$, όταν

$$a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = 1_F.$$

Επειδή $\frac{1}{a}\cdot b = b\cdot \frac{1}{a}$, $a\in F^{*}$, $b\in F$, τότε $\frac{b}{a} := b\cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot b$.

Ορισμός. n-διάνυσμα. Έστω $[n] = \mathbb{R}_n^* := \{1,2,3,\dots,n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\Sigma \neq \emptyset$
$\mathbf{a} = \bar{a} = \vec{a}$ n-διάνυσμα (ή διάνυσμα n-στοιχείων) $\iff$

$$\bar{a} = a([n]),\ \text{όπου}\ a : [n] \to \Sigma,\ \text{με}$$

$$[n] \ni i \xmapsto{a} a_i := a(i).$$

Άρα $\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_i\}_{i\in[n]}$ διατάξιμο σύνολο καθώς $\bar{a} \cong [n] \subset \mathbb{N}^*$ διατάξιμο.

Δηλ. $\bar{a} = \{\underset{\substack{\downarrow\\1}}{a_1}, \underset{\substack{\downarrow\\2}}{a_2}, \dots \underset{\substack{\downarrow\\i}}{a_i}, \dots, \underset{\substack{\downarrow\\n}}{a_n}\}.$

Συμβολίζουμε τότε $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_i, \dots, a_n) = (a_i)_n = (a_i)_{i=1}^n$, $\Sigma^n = \{(a_i) / a_i \in \Sigma\ i\in[n]\}$.

$[n] \subset \mathbb{N}^*$ καλείται σύνολο δεικτών του $\bar{a}$ και το στοιχείο a_i καλείται i-συνιστώσα (component) του n-διανύσματος $\bar{a}$.

Από την ισοδυναμία $\bar{a} \cong [n]$ έχουμε την ισότητα των n-διανυσμάτων, δηλ.
Έστω $\bar{a} = (a_i)$, $\bar{b} = (b_i) \in \Sigma^n$. Τότε,

$$(a_i)_n = (b_i)_n \iff a_i = b_i,\ i\in[n].$$

Π.χ. $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ τότε $x,y,z\in\mathbb{R}$ και εάν $\bar{a} = (x,y,z)$ τότε $x,y,z\in\mathbb{R}$ και $a(1) = x$, $a(2) = y$, $a(3) = z$.

Π.χ. $\bar{x} = (5,4,0,1)\in\mathbb{R}^4$. Τότε $x_1 = x(1) = 5$, $x_2 = x(2) = 4$, $x_3 = x(3) = 0$, $x_4 = x(4) = 1$, όπου $\bar{x} = (x_i)_4$.

Π.χ. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} / x,y\in\mathbb{R}\}$ και $(a,b) = (1,4) \Rightarrow a = 1, b = 4$.

Ορισμός. Πίνακας. Έστω $(F,+,\cdot)$ σώμα.

$A = A$ F-πίνακας $(m\times n)$-διάστασης (ή $m\times n$ τύπου ή m-γραμμών n-στηλών) $\Leftrightarrow$

$$A = \alpha([m]\times[n]), \text{ όπου } \alpha : [m]\times[n] \to F \text{ με}$$
$$[m]\times[n] \ni (i,j) \xmapsto{\alpha} a_{ij} := \alpha(i,j) \in F$$

Άρα $A = \{a_{ij}\}_{i\in[m],\, j\in[n]}$ διατεταγμένο σύνολο ως προς δείκτες i και j καθώς $A \cong [m]\times[n]$ όπου $[m]$ και $[n]$ διατεταγμένα σύνολα.

Συμβολίζουμε τότε $A = (a_{ij})_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ (σύνολο F-πινάκων διάστασης $m\times n$), και a_{ij} (i,j)-συνιστώσα του A (ή a_{ij} συνιστώσα i-γραμμής j-στήλης).

Επίσης έχουμε τον αναλυτικό συμβολισμό (ορθογώνια διάταξη πίνακα)

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Πχ. $A = (a_{ij})_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$. Τότε $a_{11} = a(1,1) = 1$, $a_{12} = a(1,2) = -2$, $a_{13} = a(1,3) = 1$ κλπ. $a_{23} = a(2,3) = 4$.

Από την ισοδυναμία $A = (a_{ij})_{m\times n} \cong [m]\times[n]$ έχουμε την ισότητα πινάκων

$$(a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij},\ i\in[m] \text{ και } j\in[n].$$

Εάν $A\in F^{1\times n}$ τότε A πίνακας-γραμμή (n-στηλών). Ισχύει $F^{1\times n} \cong F^n$ (n-διάνυσμα)
Εάν $A\in F^{m\times 1}$ τότε A πίνακας-στήλη (m-γραμμών). Ισχύει $F^{m\times 1} \cong F^m$ (-"-)
Εάν $A\in F^{1\times 1}$ τότε A πίνακας-στοιχείο. Ισχύει $F^{1\times 1} \cong F$.

• Συμβολικά: Έστω $A=(a_{ij})\in F^{m\times n} \Rightarrow$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ (ορθογώνια διάταξη πίνακα)

(α) Εάν $A\in F^{1\times n} \Rightarrow A=(a_i)_{i=1}^{n} = (a_1,a_2,\dots a_n) \simeq (a_1,a_2,\dots,a_n)\in F^n$
(ταύτιση πινάκων-γραμμών με διανύσματα)

(β) Εάν $A\in F^{m\times 1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ πίνακας στήλη (n στοιχείων)

Ορισμός. Ανάστροφος πίνακας (transpose). Έστω $A=(a_{ij})\in F^{m\times n}$
A^T A-ανάστροφος $\overset{ορ.}{\iff} A^T=(a_{ji})\in F^{n\times m}$

Ιδιότητες.

(α) $(A^T)^T = A$, $A\in F^{m\times n}$

(β) $\bar{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)\in F^n \simeq F^{1\times n}$ (διάνυσμα) $= \begin{cases} \bar{a} = (a_1\ a_2 \cdots a_n)\in F^{1\times n} & \text{(πίνακας-γραμμή)} \\ \bar{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^{n\times 1} \end{cases}$

Σημείωση. Πολλές φορές στις τεχνολογικές εφαρμογές ταυτίζουμε το διάνυσμα $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ με τον πίνακα-στήλη, δηλ. $\bar{a}\in F^{n\times 1}$
π.χ. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$
οπότε $\bar{a} = (1,2,3)^T$

Πρόταση. (Ισότητα πινάκων). Έστω $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in F^{m\times n}$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n.$$

Παράδειγμα. • Έστω $\bar{a} = (1,2,3)$, $\bar{b} = (0,1,5)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = (\bar{a}^T \ \bar{b}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

• Έστω $\bar{a} = (1,2,4)^T$, $\bar{b} = (0,1,7)$ $\Rightarrow$

$$A = (\bar{a} \ \bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

• Έστω $A = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n)$ με $\bar{a}_i := (a_{ij}) \in F^{m\times 1}$, $i = 1,2,\dots,n$

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & & \bar{a}_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ορισμός Γραμμικές πράξεις πινάκων.

(α) Έστω $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in F^{m\times n}$

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) \in F^{m\times n}$$

(β) $$\lambda A := \lambda \cdot A := A\cdot \lambda = (\lambda a_{ij}) \in F^{m\times n}, \quad \lambda \in F$$

Πρόταση. $(F^{m\times n}, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος.

Ορισμός. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Έστω $\bar{a}=(a_i)_{i=1}^{n}$, $\bar{b}=(b_i)_{i=1}^{n}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in F$$

Παράδειγμα. Έστω $\bar{a}=(1,3,-1)^T$, $\bar{b}=(3,0,4)^T$

(α) $$\bar{a}\cdot\bar{b} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = 1\cdot 3+3\cdot 0+(-1)\cdot 4 = 3+0-4 = -1$$

(στήλη) (στήλη)

(β) $$\bar{a}^T\cdot\bar{b} = (1\ 3\ -1)\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = 1\cdot 3+3\cdot 0+(-1)4 = -1$$

(γραμμή) (στήλη)

Ιδιότητες.

(α) $A+B = B+A$, $A,B \in F^{m\times n}$ (αντιμεταθετικότητα

(β) $A+(B+\Gamma) = (A+B)+\Gamma$, $A,B,\Gamma \in F^{m\times n}$ (προσεταιριστικότητα)

$(= A+B+C)$

(γ) $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$, $A \in F^{m\times n}$

(μηδενικός πίνακας ως ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πινάκων)

(δ) $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$, $A \in F^{m\times n}$

($-A := (-1)\cdot A$ ως αντίθετο στοιχείο του A)

Πολλαπλασιασμός πινάκων Έστω $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times r}$

$$A\cdot B := C = (c_{ij})_{m\times r} \quad \text{όπου } c_{ij} := \bar{a}_i^T\cdot \bar{b}_j, \quad i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,r$$

$$= (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$(\underset{\text{του } A}{i\text{-γραμμή}} \times \underset{\text{του } B}{j\text{-στήλη}})$$

$$= a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,r$$

- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων παρέχει τον πίνακα όλων των εσωτερικών γινομένων των γραμμών του πρώτου επί των στηλών του δευτέρου.

Είναι ουσιαστικά η "επέκταση" του εσωτερικού γινομένου επάνω σε πίνακες.

Παράδειγμα

(α) Έστω $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)\in F^{1\times n}$, $B=(b_1\ b_2 \dots b_n)^T \in F^{n\times 1}$

$\Rightarrow A\cdot B = \bar{a}^T\cdot \bar{b}$, όπου $\bar{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in F^{1\times n}$

(πίνακας στοιχείο) $\quad \bar{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T\in F^{n\times 1}$

(β) Έστω $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T\in F^{n\times 1}$, $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)\in F^{1\times n}$

$\Rightarrow A\cdot B = (c_{ij})\in F^{n\times n}$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $i,j\in \mathbb{N}_n^*$

Παράδειγμα:

$$\text{Έστω } A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$\text{Άρα } \underset{(2\times 3)}{A} \cdot \underset{(3\times 3)}{B} = \underset{(2\times 3)}{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \end{pmatrix} \text{ όπου}$$

$$\gamma_{11} = \bar{a}_1^T \cdot \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\times 1 + (-2)\times 7 + 6\times 1) = 4$$

$$\gamma_{12} = \bar{a}_1^T \cdot \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 + (-2)\times 0 + 6\times 1 = 2$$

$$\gamma_{13} = \bar{a}_1^T \cdot \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 4\times 3 + (-2)\times 6 + 6\times 5)$$

$$\gamma_{21} = \bar{a}_2^T \times \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\times(-1) + 7\times 0 + 1\times 1$$

$$\gamma_{22} = \bar{a}_2^T \cdot \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\times(-1) + 9\times 0 + 0\times 1$$

$$\gamma_{23} = \bar{a}_2^T \cdot \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\times 3 + 9\times 6 + 0\cdot 5)$$

$$\text{ή } \Gamma = \begin{pmatrix} \overset{(1,1)}{4\times 1 + (-2)\times 7 + 6\times 1} & \overset{(1,2)}{4\times(-1)} & \overset{(1,3)}{4\times 3 + (-2)\times 6\times 5} \\ \overset{(2,1)}{1\times 1 + 9\cdot 7 + 0\times 1} & \overset{(2,2)}{1\times(-1) + 9\cdot 0 + 0\times 1)} & \overset{(2,3)}{1\times 1 + 6 + 0\times 5} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 \end{pmatrix}_{1\times 1} = 11$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{3\times 1} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y & \alpha z \\ \beta x & \beta y & \beta z \\ \gamma x & \gamma y & \gamma z \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z & z \end{pmatrix}$$

• Δύναμη Πίνακα

$$A^{k} := \begin{cases} \underbrace{A\cdots A}_{k\text{-φορές}} = \prod_{i=1}^{k} A, & k\in \mathbb{N}^{*},\ A\in F^{n\times n} \\ A^{0} := I_n & F\text{-μοναδιαίος πίνακας} \end{cases}$$

• Μοναδιαίος πίνακας

$I_n \in F^{n}$ F-μοναδιαίος πίνακας $\Leftrightarrow$ $I_n := (\delta_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$ $(1 := 1_F, 0 := 0_F)$

Ισχύει

(α) $I_n \cdot A = A\cdot I_n = A$, $A\in F^{n\times n}$ (μοναδιαίο στοιχείο)

(β) $I_m \cdot A = A\cdot I_n$, $A\in F^{m\times n}$ (μον. στοιχείο από αριστερά και από δεξιά)

• Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

(α) $A\cdot B \neq B\cdot A$, $A,B\in F^{n\times n} - \{I_n\}$ (μη-αντιμεταθετικότητα)

(β) $A\cdot (B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C =: A\cdot B\cdot C$ (προσεταιριστικότητα)

(γ_1) $A\cdot (B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ (επιμεριστικότητα από δεξιά)

(γ_2) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ (επιμεριστικότητα από αριστερά)

(ε) $\kappa (A\cdot B) = (\kappa A)\cdot B = A\cdot (\kappa B)$, $\kappa, \lambda \in F$, $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times r}$

• Ορθογώνιος πίνακας

$A \in F^{n\times n}$ F-ορθ. πίνακας $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $A^T \cdot A = A \cdot A^T$

$F^{n\times n}_{norm} := \{A \in F^{n\times n} / A \text{ ορθ. πίνακας}\}$

• Συμμετρικός πίνακας

$A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ F-συμμετρικός πίνακας $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $a_{ij} = a_{ji}$ $(A = A^T)$

$F^{n\times n}_{sym} := \{A \in F^{n\times n} / A^T = A\}$ (σύνολο συμμετρικών πινάκων)

• Διαγώνιος πίνακας

$A \in F^{n\times n}$ F-διαγ. πίνακας $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 0$ $i \neq j \in \mathbb{N}_1^n$

$F^{n\times n}_{diag} := \{A \in F^{n\times n} / A \text{ F-διαγώνιος πίνακας}\}$ (σύνολο διαγ. πιν.)

• Πίνακας Διαγωνίων στοιχείων

$diag(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$, $a_{ii} := \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ισχύει $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}_{diag} \Rightarrow A = diag(a_{11}, a_{22}, \dots a_{33})$.

• Ίχνος (Trace)

$tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$

• Αντίστροφος πίνακα

$A^{-1} \in F^{n\times n}$ Α-αντίστροφος $\overset{\text{ορ.}}{\iff} A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_n$

• Αντιστρέψιμος ή μη-ιδιάζον πίνακας

$A \in F^{n\times n}$ αντιστρέψιμος (μη-ιδιάζον) $\overset{\text{ορ.}}{\iff} A^{-1} \notin \emptyset$

• Μη-αντιστρέψιμος ή ιδιάζον πίνακας

$A \in F^{n\times n}$ μη-αντιστρέψιμος (ιδιάζον) $\overset{\text{ορ.}}{\iff} A^{-1} = \emptyset$

$\iff \{B \in F^{n\times n} \mid A\cdot B = B\cdot A = I_n\} = \emptyset$

Πόρισμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

(έστω $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $A^{-1}\cdot A = I_2 = A\cdot A^{-1}$)

Σημείωση. Εξ ορισμού λοιπόν ο A^{-1} (όταν υπάρχει)

είναι το αντίστροφο στοιχείο του A

για πολλαπλασιασμό πινάκων.

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$

Έστω $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, όπου $A \cdot A^{-1} = I_2$ (ορισμός),

οπότε $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-2z & y-2w \\ 2x-z & 2y-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-2w=1 \\ y-2w=0 \\ 2x-w=0 \\ 2y-w=1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1/3 \\ y=2/3 \\ z=-2/3 \\ w=1/3 \end{array} \right.$$

Άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ μη-ιδιάζων)

Επαληθεύοντας έχουμε $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$.

• Ιδιότητες

(α) $(A^T)^T = A$, $A \in F^{m\times n}$

(β) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $A, B \in F^{m\times n}$

(γ) $(kA)^T = kA^T$, $k \in F$, $A \in F^{m\times n}$

(δ) $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times r}$

• Ιδιότητες

(α) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, $A, B \in F^{m\times n}$

(β) $tr(kA) = k\,tr(A)$, $k \in F$, $A \in F^{m\times n}$

(γ) $tr(A^T) = tr(A)$, $A \in F^{m\times n}$

(δ) $t(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$, $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times r}$

• Ιδιότητες

(α) $(A^{-1})^{-1} = A$, $A \in F^{n\times n}$

(β) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$, $A, B \in F^{n\times n}$

(γ) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(δ) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

(ε) $diag(a_{ii})^{-1} = diag(a_{ii}^{-1})$, $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$

(στ) $(I^n)^{-1} = I^n$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Άσκηση.

$$\begin{pmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$$

Λόγω της ισότητας πινάκων πρέπει να συναληθεύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} x(3x+5) = 2 \quad (1) \\ 1 = 1 \\ 3x-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/3 \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} 0=0. \quad \text{Άρα } x = 1/3 \\ 16x = 3x^2+5 \quad (3) \end{cases}$$

Άσκηση. $$\begin{pmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}$$

Λόγω της ισότητας πινάκων, ισχύει ότι

$$\begin{cases} 3x-5 = -11 \\ 2y+6 = x+4 \quad \Rightarrow \quad x-2y = 2 \\ 6 = x-2y \quad \Rightarrow \quad x-2y = 6 \\ 7 = 7 \end{cases} \quad \left.\right\} \; x,y \in \emptyset$$

Άσκηση. $A=\begin{pmatrix}3 & a\\ y & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^{-1}=? \\ A \text{ αντιστρέψιμος (??)}\end{cases}$ $\left(A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1}=I_2,\ A^{-1}:=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\right)$

Άσκηση. Να δειχθεί ότι $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$, όταν $\alpha\delta\neq\beta\gamma$

Άσκηση. Έστω $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11 & 3\\ 22 & 1\end{pmatrix}$

$A\cdot X = B \Rightarrow X=?$

Έχουμε $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, $X\in\mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow m=n=2$ (καθώς $A_{2\times 2}\cdot X_{m\times n}$)

Άρα $A\cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$, $A^{-1} = \dfrac{1}{2\cdot 4-3(-1)}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

Άρα $X = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & 3\\ 22 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Άσκηση. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1/4 & -3/4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$3(X+B) = 2\left(A+\frac{1}{2}X\right)-5B \Rightarrow X=?$

Άσκηση. Έστω $A=A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} A(x)\cdot A(y) = A(x+y) \\ A^{y} = A^{-1}(x) \quad A=? \end{cases}$

Άσκηση. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=?$

(α) $A\cdot X = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow X=?$

(β) $A\cdot X\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow X=?$ (γ) $A\cdot X = A^2+2A \Rightarrow X=?$

Άσκηση.

$$2\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 3X = 5\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad X\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

Επιλύοντας ως προς $3X$, έχουμε

$$3X = -5\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15 & -5\\ 10 & 0\\ -20 & 5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 10 & -14\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-14 & -1\\ 6 & -14\\ -20 & 2\end{pmatrix},$$

και άρα $X = \begin{pmatrix}-17/3 & -1/3\\ 0 & -14/3\\ -20/3 & 2/3\end{pmatrix}$.

Άσκηση. $\begin{pmatrix}1 & \ln^2 x - 1\\ \ln^2 x - \ln x & 2\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}^*_+$ όπου $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}_{diag}$

Πρέπει $\ln^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{cases}\ln^2 x = 1 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e\\ \ln^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = \sqrt{2} \Rightarrow x = e^{\sqrt{2}} \neq e\end{cases}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists\, x\in\mathbb{R}^*_+$ (ή $x\in\emptyset$)

Άσκηση. Επιλύσατε εξίσωσης $3(X+B)+2(A+\frac{1}{2}X)-5B$, όπου $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3}$ και $B=\begin{pmatrix}2 & 1/4 & -3/4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3}$

Υπόδειξη. $3\cdot X + 3B = 2A + X - 5B \Rightarrow 3X + 8X = 2A + X.$ $\quad B.$

Άσκηση. Έστω $A = A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$

(α) $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

(β) $A_x^{-1} = A_y$, $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D = ?$

Άσκηση. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (α) $A^{-1} = ?$

(β) $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ?$, $a \in \mathbb{R}$

($γ_1$) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = ?$

($γ_2$) $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = ?$

($γ_2$) $AX = A^2 + 2A \Rightarrow X = ?$

Άσκηση. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A \cdot X - A^2 = 2I_2 + 2X \Rightarrow X = ?$

Άσκηση. Έστω $A(XB - I_n) = (I_n - AX)B$, $A, B, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη-ιδιάζον
$\Rightarrow X = f(A^{-1}, B^{-1}) = ?$

Άσκηση. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη-ιδιάζουσες.

$I_n - AB$ ιδιάζον $\Rightarrow$ $I_n - BA$ ιδιάζον με

$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1} \cdot A$

Άσκηση. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Τότε $\begin{cases} (A - I_3)^3 = O_{3\times3} \\ A^{-1} = ? \end{cases}$

Άσκηση. Ισχύει, $A^2 = (trA)A$, $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ιδιάζον. Υπόδειξη. Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ γ & δ \end{pmatrix}$.

Άσκηση Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Δείξτε ότι:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -8 & 8 & -16 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \beta & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \end{pmatrix}^T \Rightarrow \begin{cases} A \cdot \bar{b} = ? \\ \bar{b} \cdot \bar{b}^T = ? \end{cases}$ $A \cdot A^T = ?$