Ορισμός.

$A x = \bar{b}$ ομογενές ΣΓΕ $\Leftrightarrow$ $b = \bar{0}$

(Α) Έστω $|A| \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (τετριμμένη μοναδική λύση).

(Β) Έστω $|A| \neq 0 \Rightarrow Ax = \bar{0}$ αόριστο ή αδύνατο ΣΓΕ

Ισχύει $Ax = \bar{0} \Rightarrow A a x = \bar{0}$ $\quad a\bar{x}$ λύση, $a \in \mathbb{R}^*$ εάν $\bar{x}$ λύση.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{0}, \quad \bar{x} = (x,y)^T \quad (\text{ΟΣΓΕ})$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Έχουμε $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

(Α) Επίλυση ΟΣΓΕ με αντικατάσταση. Έχουμε,

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \Rightarrow x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x(y) = -2y, \ y \in \mathbb{R}^*, \text{ οπότε } \bar{x} = (-2y, y)^T = y(-2,1)^T, \ y \in \mathbb{R}^*$$

(Β) Επίλυση με αντικατάσταση για $y := 1$, ή $x = 1$ (ΟΣΓΕ $2\times 2$)

Έχουμε $A\bar{x} = \bar{0}$, $y := 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 4 = 0 \\ 3x + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \end{array}\right.$ .

Άρα $\bar{x} = (x,y)^T = (-2,-1)^T$ λύση ΟΣΓΕ, οπότε $\bar{x} = a(-2,1)$, $a \in \mathbb{R}$

(παραμετρική λύση αόριστου ΟΣΓΕ)

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+ay=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}, \quad \bar{x}=(x,y)^T, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \quad a\in\mathbb{R} \ (\text{ΟΣΓΕ}).$$

Έχουμε $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-3a, \ a\in\mathbb{R}$

(Α) Έστω $|A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1/3$, οπότε $\bar{x}=\bar{0}$ (τετριμμένη λύση).

(Β) Έστω $|A|=0 \Leftrightarrow a=1/3$.

Τότε $\left\{\begin{array}{l} x+\frac{1}{3}y=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+y=\bar{0} \Leftrightarrow y=y(x)=-3x$, οπότε

$$\bar{x}=(x,y)^T=(x,-3x)^T=x(1,-3)^T, \quad x\in\mathbb{R}^*.$$

Σημείωση. Εάν $|A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1/3$, τότε

$$A\bar{x}=\bar{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+ay=0 \Rightarrow 3x+3ay=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+3ay=0 \Rightarrow (3a-1)y=0 \Rightarrow y=0 \quad (a\neq 1/3)$$

Οπότε $\bar{x}=\bar{0}$ (τετριμμένη λύση το ΟΣΓΕ).

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έχουμε $D=|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 0.$

(Α) Επίλυση $2\times 2$ υπο-συστήματος με τη μέθοδο Cramer (πίνακας υπο-συστήματος μη-ιδιάζον). Παραμετροποιούμε έναν άγνωστο μεταφέροντάς τον στην στήλη των σταθερών όρων και αναφέρουμε ένα αόριστο ΣΓΕ με την παραλληλισμένη επίλυση να ικανοποιεί τις παραμετρικές λύσεις του συστήματος. Συγκεκριμένα,

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=-z \\ 2x-y=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}', \quad \bar{x}'=(x,y)^T$$

$$\bar{b}'=(-z,-2z)^T$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2)_{2\times 2}$$

Έστω $D'=|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$ (μη-ιδιάζον)

Η μοναδική λύση του υπο-συστήματος $\bar{x}'=(x,y)^T=(D'_x/D', D'_y/D')$, με

$$D'_x=|\bar{b}'\ \bar{a}_2|=\begin{vmatrix} -z & 2 \\ -2z & -1 \end{vmatrix}=5z$$

$$D'_y=|\bar{a}_1\ \bar{b}'|=\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -2z \end{vmatrix}=0.$$

Επομένως, $\bar{x}=(x,y,z)^T=(-z,0,z)^T=z(-1,0,1)^T$, $z\in\mathbb{R}^*$ (παραμ. λύση).

(Β) Εύρεση ειδικής λύσης (για $z:=1$, $y:=1$, ή $x:=1$) μέσω του $3\times3$ ΣΓΕ με τη μέθοδο Cramer ή μέσω του $2\times2$ υποσυστήματος $2\times2$ ΣΓΕ με τη μέθοδο Cramer.

Έστω $z:=1$. Άρα $A\bar{x}=\bar{0}$ δίνει

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-y=-2 \\ x+y=-1 \end{cases} \quad A'\bar{x}'=\bar{b}', \quad \bar{x}'=(x,y)^T, \ \bar{b}'=(-1,-2)^T$$

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times2}=(\bar{a}_1',\bar{a}_2')_{2\times2}$$

Έχουμε $D':=|A|'=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq0$. Το υποσύστημα (μη-ομογενές) έχει μια μοναδική λύση $\bar{x}'=(x,y)^T$ για $z:=1$. Δηλαδή

$$x'=(x,y)^T=D_x'/D',\ D_y'/D',\ \text{όπου}$$

$$D_x'=|\bar{b}'\ \bar{a}_2'|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=5z$$

$$D_y'=|\bar{a}_1'\ \bar{b}'|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=0$$

Άρα $\bar{x}'=(x,y)^T=(-1,0)^T$ με $x+y=1$ (επαλήθευση της 3ης αρχικής εξίσωσης), οπότε $\bar{x}=(x,y,z)=(-1,0,1)^T$ (μια ειδική λύση για $z:=1$). Άρα $\bar{x}=\alpha(-1,0,1)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Σημείωση. Επιλέξαμε για την ειδική λύση $z:=1$ το υπο-σύστημα $2\times2$ για ευκολία, αντί του $3\times3$ αρχικού ΣΓΕ με $z:=1$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έχουμε $D=0$.

(A) Επίλυση ειδικής λύσης για $z:=1$ (ή $z=1$, ή $y=1$) μεθόδου Cramer

Έχουμε το ΟΣΓΕ για $z:=1$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 2x+y=-2 \\ x-y=-1 \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}', \quad \bar{x}'=(x,y)^T, \quad \bar{b}'=(1,-2)^T$$

$$A':=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1', \bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έχουμε $D'=|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0$. Άρα το υπο-σύστημα $2\times 2$ έχει μοναδική λύση (για $z=1$) η οποία πρέπει να επαληθεύει την τρίτη εξίσωση $x-y=-1$. Έχουμε

$$D_x':=|\bar{b}'\ \bar{a}_2'|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+4=5$$

$$D_y':=(\bar{a}_1', \bar{b}')=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-2-2=-4$$

Άρα $\bar{x}'=(x,y)$, $x=D_x'/D'=-\frac{5}{3}$ και $D_y'/D=4/3$

Οπότε $\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)^T$ (ειδική λύση), οπότε

$$\bar{x}=\alpha\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)^T, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

(Β) Επίλυση με τη μέθοδο Cramer για το υπο-σύστημα $2\times 2$ με πίνακα μη-μηδενικής ορίζουσας. Έχουμε,

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y = z \\ 2x+y=-2z \\ x-y=-z \end{array}\right. \Big\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}',\ \bar{x}'=(x,y)^T,\ \bar{b}':=(z,-2z)^T,\ z\in\mathbb{R}$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1',\bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έχουμε $D':=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3\neq 0$. Άρα υπάρχει μοναδική λύση για το υπο-σύστημα $2\times 2$ $\bar{x}'=(x,y)^T$ με $x=D_x'/D'$ και $y=D_y'/D'$ όπου

$$D_x'=|\bar{b}',\bar{a}_2'|=\begin{vmatrix} z & 2 \\ -2z & 1 \end{vmatrix}=z+4z=5z$$

$$D_y'=|\bar{a}_1',\bar{b}'|=\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & -2z \end{vmatrix}=-2z-2=-4z.$$

Άρα $\bar{x}'=(x,y)^T$, με $x=D_x'/D'=\frac{-5z}{3}$, $y=\frac{D_y'}{D'}=\frac{4z}{3}$, $z\in\mathbb{R}$

οπότε $\bar{x}=(x,y,z)^T=\left(-\frac{5}{3}z,\frac{4}{3}z,z\right)^T=z\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},1\right)^T$, $z\in\mathbb{R}$

(παραμετρική λύση του αόριστου ΟΣΓΕ).

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{0}, \quad \bar{x} = (x, y, z)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Έχουμε $D = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ (αόριστο ΟΣΓΕ)

Επίλυση των 2 πρώτων εξισώσεων με τη μέθοδο Cramer για $z := 1$. Έχουμε λοιπόν,

$$\left.\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}' = \bar{b}' := (-1, -2)^T, \quad \bar{x}' = (x, y)^T$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = (\bar{a}_1' \ \bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έχουμε $D' = |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$, οπότε έχουμε $\bar{x}' = (x, y)$ μοναδική λύση για $z := 1$, με $x = D_x'/D$ και $y = D_y'/D'$. Έχουμε

$$D_x' = |\bar{b}' \ \bar{a}_2'| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

$$D_y' = |\bar{a}_1' \ \bar{b}'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

οπότε $x = -1$ και $y = 0$, και άρα $\bar{x} = (x, y, z)^T = (-1, 0, 1)^T$

Η λύση $\bar{x}$ επαληθεύει και την 3η εξίσωση $x + y + z = 0$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-4z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x+4y-5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}, \quad \bar{x}=(x,y,z)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

Έχουμε $|A| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{array} = 0$

Επίλυση ειδικής λύσης με $z:=1$. Έχουμε το ΣΓΕ

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y=4 \\ x+y=1 \\ 2x+4y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}', \quad \bar{x}'=(x,y)^T, \quad \bar{b}'=(4,1)^T$$

$$A':=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2} = (\bar{a}_1' \ \bar{a}_2')_{2\times2}$$

Έχουμε $D':=|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-3=-2\neq 0$. Άρα το υποσύστημα $2\times2$ $A'\bar{x}'=\bar{b}'$ έχει μοναδική λύση την $\bar{x}=(x,y)^T=(D_x'/D, D_y'/D)^T$

Έχουμε $D_x' = |\bar{b}' \ \bar{a}_2| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4-3=1$

$D_y' = |\bar{a}_1' \ \bar{b}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3$.

Άρα $\bar{x}'=(x,y)$, $x=\dfrac{D_x'}{D'}=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{D_y'}{D'}=\dfrac{-3}{-2}=3/2$.

Επομένως, $\bar{x}=(x,y,z)=(-1/2, 3/2, 1)^T$ η ειδική λύση του ΟΣΓΕ οπότε $\bar{x}=(x,y,z)^T=\alpha(-1/2,3/2,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{cases} x-2y+z-w=0 \\ 2x-y+5z-2w=0 \\ x-y+2z-w=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}\ ,\quad \bar{x}=(x,y,z,w)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Επίλυση με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα Gauss.

$$(A\mid\bar{0})=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2:=r_3 \\ r_3:=r_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r_3:=r_3+3r_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)=(A'\mid\bar{0})$$

$A'\in\mathbb{R}^{3\times 4}_{ref}\cap\mathbb{R}^{3\times 4}_{U}$, οπότε

$$\left.\begin{cases} x-2y+z-w=0 \\ -y+z=0 \\ 3z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y=z=0,\ x=w,$$ και είναι

$$\bar{x}=(x,y,z,w)^T=(w,0,0,w)^T=w(1,0,0,1)^T.$$

Για να πάρουμε στη συνέχεια ανηγμένο κλιμακωτό, συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις,

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r_2 := -r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r_1 := r_1 + 2r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r_3 := r_3/3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r_1 := r_1 + r_3 \\ r_2 := r_2 + r_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A''|\bar{0}) \quad A'' \in \mathbb{R}^{3\times 4}_{rref}.$$

Άρα το αντίστοιχο ΣΓΕ είναι επιλυμένο ως προς τους αγνώστους με συντελεστές τα κύρια στοιχεία του rref πίνακα A'' (δηλ. τις μονάδες)

$$\left\{\begin{array}{l} x - w = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = w, \ w \in \mathbb{R}, \ \text{δηλ.} \\ y = z = 0 \end{array}\right.$$

$$\bar{x} = (x, y, z, w)^T = (w, 0, 0, w)^T, \ w \in \mathbb{R}.$$

Εναλλακτικά θέτουμε $w:=1$ (ή $x:=1$, ή $y=1$, ή $z:=1$) και επιλύουμε ένα υπο-σύστημα Cramer. Έχουμε,

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 2x-y+5z=2 \\ x-y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}':=(1-z,2-5z)^T,\ \bar{x}'=(x,y)^T$$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1'\ \bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έχουμε $D':=|A'|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1+4=3\neq 0$. Άρα $\bar{x}'=(x,y)^T$ μοναδική λύση για $w:=1$, $z\in\mathbb{R}$.

$$D'_x:=|\bar{b}',\bar{a}_2|=\begin{vmatrix} 1-z & -2 \\ 2-5z & -1 \end{vmatrix}=z-1+2(2-5z)=3-9z$$

$$D'_y:=|\bar{a}_1',\bar{b}'|=\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-5z \end{vmatrix}=2-5z-2(1-z)=-3z$$

Άρα $\bar{x}'=(x,y)^T=(D''_x/D,\ D'_y/D)^T=(1-3z,\ -z)^T$, $z\in\mathbb{R}$

Επίσης πρέπει $x-y+2z=1$, δηλ. $1-3z+z+2z=1$ (ισχύει)

Άρα $\bar{x}=(x,y,z,w)=(1-3z,z,z,1)^T$, οπότε για $z:=0$,

$$\bar{x}=(x,y,z,w)=(1,0,0,1)^T,\ \text{ή}\ \bar{x}=a(1,0,0,1)^T,\ a\in\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{cases} -x + 2z + w = 0 \\ y - 2z + w = 0 \\ 2x + y - w = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{0},\quad \bar{x} = (x,y,z,w)^T,\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Επίλυση με τη μέθοδο Gauss.

$$(A \mid \bar{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \; r_3 := r_3 + 2r_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \; r_3 := r_3 - 2r_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A' \mid 0)$$

$$A' \in \mathbb{R}^{3\times 4}_{ref} \cap \mathbb{R}^{3\times 4}_{U}$$

οπότε το ΣΓΕ γίνεται

$$\left.\begin{cases} -x - 2z + w = 0 \\ y - 2z + w = 0 \\ 6z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -x + w = 0 \\ y + w = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = -w,\quad z = 0 \end{cases}$$

και άρα $\bar{x} = (x,y,z,w)^T = (w, -w, 0, w)$, $w \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+3z+3w=0 \\ x-y+z+3w=0 \\ x+y+4z+3w=0 \\ 3y+6y+w=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}\,, \quad \bar{x}=(x,y,z,w)^T$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Έχουμε $D=|A|\neq 0$, οπότε $\bar{x}=\bar{0}$ (μοναδική τετριμμένη λύση).
Εναλλακτικά

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2:=r_2-r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} r_2:=-r_2/2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} r_4:=r_4-3r_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} r_4:=r_4-3r_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} r_4:=r_4-3r_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}_{rref}$$

οπότε το αντίστοιχο ΟΣΓΕ γίνεται

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+3z+3w=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \\ w=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=z=w=0, \text{ δηλ. } \bar{x}=\bar{0} \text{ (μοναδική λύση)}$$