

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΙΑ ΤΙΣ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Χαρά ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ

Ανέστης ΦΩΤΙΑΔΗΣ



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ανάπτυξη ατομικών και κοινωνικών πόρων
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΤΑΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΙΑ ΤΙΣ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Συγγραφή

Χαρά Χαραλάμπους
Ανέστης Φωτιάδης

Κριτικός Αναγνώστης

Κωνσταντίνος Τσίχλας

Συντελεστές Έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ανέστης Φωτιάδης, Χαρά Χαραλάμπους

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Χαρά Χαραλάμπους

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Χαρά Χαραλάμπους

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΕ EPUB: Ιωάννης Καρύδης

ISBN: 978-960-603-273-8

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0.

Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

<http://www.kallipos.gr>

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΙΑ ΤΙΣ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Χαρά ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ

Ανέστης ΦΩΤΙΑΔΗΣ

Περιεχόμενα

Κατάλογος Αλγορίθμων	iv
Κατάλογος Σχημάτων	vi
Πρόλογος	ix
Κεφάλαιο 1: Γραμμικά Συστήματα	1
1.1 Γραμμικά Συστήματα	1
Ασκήσεις Ενότητας 1.1	5
1.2 Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών	6
Ασκήσεις Ενότητας 1.2	12
1.3 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων	13
Ασκήσεις Ενότητας 1.3	17
1.4 Ευθείες και Επίπεδα στον \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3	18
Ευθείες στον \mathbb{R}^2	18
Ευθείες και Επίπεδα στον \mathbb{R}^3	20
Ασκήσεις Ενότητας 1.4	23
1.5 Πολυωνυμικές Καμπύλες	24
Ασκήσεις Ενότητας 1.5	26
1.6 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία	27
Βιβλιογραφία	27
Κεφάλαιο 2: Πίνακες	29
2.1 Πράξεις Πινάκων	29
Ασκήσεις Ενότητας 2.1	37
2.2 Αντιστρέψιμοι Πίνακες	38
Ασκήσεις Ενότητας 2.2	47
2.3 Ορίζουσες Πινάκων	47
Ασκήσεις Ενότητας 2.3	57
2.4 Εφαρμογές Κεφαλαίου 2	58
Γινόμενο Πινάκων και Συνολικό Κόστος	58
Γραφήματα και Δυνάμεις Πινάκων	58
Γραφήματα και Γραμμικά Συστήματα	59
Δυνάμεις Πινάκων και Πληθυσμιακά Μοντέλα	60
Πολυωνυμικές Καμπύλες II	61
LU Ανάλυση Πινάκων	61
Μοντέλο του Leontief	63
Ασκήσεις Ενότητας 2.4	65
2.5 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία	65
Βιβλιογραφία	66
Κεφάλαιο 3: Διανυσματικοί Χώροι	67
3.1 Διανύσματα στον \mathbb{R}^n	67
Ασκήσεις Ενότητας 3.1	74

3.2	Διανυσματικός Χώρος \mathbb{k}^n και Υποχώροι	74
	Ασκήσεις Ενότητας 3.2	85
3.3	Βάσεις και Γραμμική Ανεξαρτησία, I	86
	Ασκήσεις Ενότητας 3.3	92
3.4	Βάσεις και Γραμμική Ανεξαρτησία, II	93
	Ασκήσεις Ενότητας 3.4	99
3.5	\mathbb{k} -Διανυσματικοί Χώροι	100
	Ασκήσεις Ενότητας 3.5	104
3.6	Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία	104
	Βιβλιογραφία	105
Κεφάλαιο 4: Γραμμικές Συναρτήσεις		107
4.1	Γραμμικές Συναρτήσεις, I	107
	Ασκήσεις Ενότητας 4.1	115
4.2	Γραμμικές Συναρτήσεις, II	115
	Ασκήσεις Ενότητας 4.2	121
4.3	Πίνακες Αλλαγής Βάσης	122
	Ασκήσεις Ενότητας 4.3	126
4.4	Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία	127
	Βιβλιογραφία	127
Κεφάλαιο 5: Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα		129
5.1	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	129
	Ασκήσεις Ενότητας 5.1	138
5.2	Ιδιοχώροι και το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο	138
	Ασκήσεις Ενότητας 5.2	147
5.3	Διαγωνιοποιήσιμοι Πίνακες	148
	Ασκήσεις Ενότητας 5.3	155
5.4	Ορθογώνιοι Πίνακες και Εσωτερικό Γινόμενο στον \mathbb{R}^n	155
	Ασκήσεις Ενότητας 5.4	162
5.5	Φασματικό Θεώρημα	163
	Ασκήσεις Ενότητας 5.5	169
5.6	Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία	170
	Βιβλιογραφία	170
Κεφάλαιο 6: Προβολές και Εφαρμογές		171
6.1	Προβολές	171
	Ασκήσεις Ενότητας 6.1	179
6.2	Εφαρμογές	180
	Δυνάμεις Διαγωνιοποιήσιμων Πινάκων	180
	Γεωμετρία και Γραφικά Υπολογιστών	181
	Το Πρόβλημα του Κυνηγού και της Λείας του	183
	Μαρκοβιανές Αλυσίδες	185
	Διαφορικές Εξισώσεις και Ιδιοτιμές	186
	Τετραγωνικές Μορφές	188
	Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων	190
	Ασκήσεις Ενότητας 6.2	192
6.3	Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία	193
	Βιβλιογραφία	194
Λύσεις και Υποδείξεις Επιλεγμένων Ασκήσεων		194
	Ευρετήριο Συμβόλων	207

Ευρετήριο Όρων	209
Ευρετήριο Αγγλικής Ορολογίας	213

Κατάλογος Αλγορίθμων

1.2.1	Αλγόριθμος του Gauss	8
1.3.1	Αλγόριθμος για την επίλυση γραμμικών συστημάτων	13
2.2.1	Αλγόριθμος εύρεσης αντιστρόφου	45
2.4.1	Επίλυση του συστήματος $AX = B$ με χρήση της LU-ανάλυσης του A	63
3.3.1	Αλγόριθμος εύρεσης βάσης για τον υποχώρο $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{k}^n$ ως υποσύνολο του X .	90
3.3.2	Αλγόριθμος εύρεσης βάσης για τον υποχώρο $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{k}^n$ σε κλιμακωτή μορφή.	92
3.4.1	Αλγόριθμος εύρεσης βάσεων για τους υποχώρους $U + W$ και $U \cap W$ του \mathbb{k}^n .	96
3.4.2	Αλγόριθμος επέκτασης βάσης του U σε βάση του \mathbb{k}^n .	97
5.2.1	Αλγόριθμος υπολογισμού ιδιοχώρων της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$	142
6.1.1	Αλγόριθμος Ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt για τον υποχώρο V του \mathbb{R}^m .	175
6.1.2	Αλγόριθμος εύρεσης του $\text{proj}_V(w)$.	177
6.1.3	Αλγόριθμος εύρεσης του $\text{proj}_V(w)$ με χρήση γινομένου πινάκων.	178

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Η ευθεία $x + y = 2$.	19
1.2	Η ευθεία $y = 2$.	19
1.3	Οι ευθείες $x - y = 0$ και $x - y = 1$.	19
1.4	Το επίπεδο $x + y = 2$ στον \mathbb{R}^3 .	21
1.5	Τομή δύο επιπέδων.	22
1.6	Τομή των επιπέδων xy, xz, yz .	22
1.7	Η παραβολή $y = -x^2 + 3x + 2$.	25
1.8	Η καμπύλη $y = -28 + 34x - 11x^2 + x^3$.	25
1.9	Η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων για τα A, B, C .	26
2.1	Κατευθυνόμενο γράφημα.	30
2.2	Κατευθυνόμενο γράφημα με αριθμημένες ακμές.	31
3.1	Το ίδιο διάνυσμα με διαφορετικά αρχικά σημεία.	67
3.2	Το διάνυσμα (v_1, v_2) .	68
3.3	Το άθροισμα των α και β είναι το γ .	68
3.4	Το διάνυσμα a και $-1/2a$.	68
3.5	Η ευθεία $\{tu : t \in \mathbb{R}\}$.	70
3.6	Η ευθεία $\{t(2, 3, 1) : t \in \mathbb{R}\}$.	70
3.7	Το επίπεδο $\{(a, b, c) : 3a + b - 2c = 0\}$.	71
3.8	Η ευθεία $\{(1, 3) + t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$.	71
3.9	Τα παραλληλόγραμμα P και P_1 .	72
3.10	Τα παραλληλόγραμμα P_M, P_1, P_2 .	73
3.11	$S(\{u, w\}) = \mathbb{R}^2$.	78
3.12	$S(\{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}) = \{(a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$.	79
3.13	$U = S(\{(2, 0, 3), (0, 2, 1)\})$.	80
3.14	Οι λύσεις της εξίσωσης $x - y = 0$ στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 .	81
3.15	$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2, V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$.	82
4.1	Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.	108
4.2	Αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ .	112
4.3	Διαστολή ως προς τον άξονα των X με συντελεστή 2.	113
4.4	Προβολή στην ευθεία $y = mx$.	113
4.5	Αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$.	113
4.6	Αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα των X .	114
5.1	Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ .	129
5.2	Αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία $\pi/4$.	131
5.3	Προβολή στον \mathbb{R}^2 στην ευθεία $y = mx$.	131

5.4	Αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$	132
5.5	Τα διανύσματα u και v στον \mathbb{R}^3	157
6.1	Προβολή του v στην ευθεία L	171
6.2	Αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία L	172
6.3	Προβολή του v στον υποχώρο U	173
6.4	Η απόσταση του $(2, 3, 3)$ από τον U	174
6.5	Μεταφορά κατά $(1, 1)$: $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$	181
6.6	Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός T	183
6.7	Η καμπύλη $-y_1^2 + 3y_2^2 - 5 = 0$	189
6.8	Η καμπύλη $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0$	190
6.9	Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $y = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x$	192

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό καλύπτει την ύλη ενός εξαμηνιαίου εισαγωγικού μαθήματος στη Γραμμική Άλγεβρα. Απευθύνεται σε φοιτητές των Θετικών Επιστημών που χρησιμοποιούν τη Γραμμική Άλγεβρα ως εργαλείο αλλά και σε φοιτητές Μαθηματικών Τμημάτων που επιθυμούν να εξετάσουν εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας. Το βιβλίο συγκεντρώνει την εμπειρία της διδασκαλίας του μαθήματος της Γραμμικής Άλγεβρας σε ελληνικά και ξένα Πανεπιστήμια.

Η ύλη κατανέμεται σε έξι κεφάλαια που πραγματεύονται τη μεθοδολογία της επίλυσης γραμμικών συστημάτων, την άλγεβρα των πινάκων, τους διανυσματικούς χώρους και τις γραμμικές συναρτήσεις, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων και τέλος τις προβολές των διανυσμάτων. Σε κάθε ενότητα υπάρχει πλήθος παραδειγμάτων. Στο παράρτημα με τίτλο *Λύσεις και Υποδείξεις Επιλεγμένων Ασκήσεων* δίνονται λύσεις ή υποδείξεις ή το αποτέλεσμα κάποιων από τις ασκήσεις. Έχει γίνει προσπάθεια να συμπεριληφθούν οι αποδείξεις των κυρίων θεωρημάτων χωρίς αυστηρή μαθηματική γραφή. Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων που δεν έχουν συμπεριληφθεί δίνεται αναλυτική αναφορά. Ιδιαίτερα παραπέμπουμε στο βιβλίο *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα των Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Χ. Βαβατσούλα*. Το παρόν σύγγραμμα δίνει μεγάλο βάρος στις εφαρμογές, εισάγοντας αυτοτελή θέματα εφαρμογών και συνδέοντας σε κάθε στάδιο τη θεωρία με τις εφαρμογές της. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνεται σύντομη αναφορά στο ιστορικό περιβάλλον των εννοιών που αναπτύχθηκαν.

Σε όλο το κείμενο μετά την εμφάνιση κάποιου επιστημονικού όρου για πρώτη φορά, η οποία επισημαίνεται με έντονους τυπογραφικούς χαρακτήρες, ακολουθεί ο ίδιος όρος στην αγγλική γλώσσα. Στο εδάφιο με τίτλο *Ευρετήρια* παραθέτουμε τα ευρετήρια των συμβολισμών και των μαθηματικών όρων στην ελληνική και αγγλική γλώσσα και σημειώνουμε τη σελίδα στην οποία βρίσκονται.

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε στα πλαίσια του έργου *Κάλλιπος*. Εκφράζονται, λοιπόν, ευχαριστίες στη διαχειριστική ομάδα του έργου για τη βοήθεια και τις οδηγίες σε όλα τα στάδια της παραγωγής του βιβλίου. Τέλος, ευχαριστούμε θερμά την κ. Μαρία-Ιωάννα Χριστοφορίδου και τον κ. Δήμο Μουσιάδη για την επιμέλεια του εξωφύλλου και τον κ. Ιωάννη Καρύδη για τη μετατροπή του συγγράμματος σε μερφή HTML5.

Κεφάλαιο 1

Γραμμικά Συστήματα

Η επίλυση των γραμμικών συστημάτων αποτελεί ένα από τα κύρια θέματα μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές τεχνικές επίλυσης των γραμμικών συστημάτων.

1.1 Γραμμικά Συστήματα

Σε αυτήν την ενότητα θα εισάγουμε τη βασική ορολογία που αφορά τα γραμμικά συστήματα εξισώσεων. Με \mathbb{k} θα συμβολίζουμε είτε το σώμα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , είτε το σώμα των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} . Ένα **γραμμικό σύστημα** (linear system) m εξισώσεων με n αγνώστους, με συντελεστές από το σώμα \mathbb{k} , είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n &= \beta_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n &= \beta_m, \end{aligned} \tag{1.1.0.1}$$

όπου όλοι οι συντελεστές a_{ij} και όλες οι σταθερές β_i ανήκουν στο \mathbb{k} . Το i παίρνει τιμές $1, \dots, m$, ενώ το j παίρνει τιμές $1, \dots, n$. Τα x_1, \dots, x_n είναι οι άγνωστοι του γραμμικού συστήματος. **Λύση** (solution) του συστήματος (1.1.0.1) στο \mathbb{k} είναι μία διατεταγμένη n -άδα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ στοιχείων του \mathbb{k} , η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις (1.1.0.1), δηλ.

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i, \quad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq m.$$

Ένα γραμμικό σύστημα είναι δυνατόν να έχει περισσότερες από μία λύσεις. Λέμε ότι το σύστημα (1.1.0.1) είναι **συμβατό** (consistent) αν έχει τουλάχιστον μία λύση. Αν δεν υπάρχει λύση, τότε λέμε ότι το σύστημα (1.1.0.1) είναι **ασύμβατο** (inconsistent).

Στη γλώσσα των πινάκων, το σύστημα (1.1.0.1) γράφεται συνοπτικά ως

$$AX = B, \tag{1.1.0.2}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A έχει m γραμμές, όσες και οι εξισώσεις του (1.1.0.1), και n στήλες, όσοι είναι οι άγνωστοι του (1.1.0.1). Ο A γράφεται σε συντομογραφία $A = (a_{ij})$ και λέγεται

πίνακας των συντελεστών (coefficient matrix) του συστήματος (1.1.0.2), ο πίνακας B λέγεται **πίνακας των σταθερών όρων** (column of constants) του συστήματος (1.1.0.2), ενώ ο πίνακας

$$[A | B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}$$

λέγεται **επαυξημένος** (extended) πίνακας του συστήματος (1.1.0.2). Θα γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A | B]$ και ως

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & & \beta_m \end{array} \right],$$

για να τονίσουμε ότι η τελευταία στήλη είναι η στήλη των σταθερών όρων του συστήματος $AX = B$. Η j στήλη του A συμβολίζεται με Σ_j και αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_j . Τα στοιχεία της Σ_j είναι οι συντελεστές του x_j .

Παραδείγματα 1.1.1.

1. Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 & & & + 4x_5 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & & & - 5x_5 & = & 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 & = & 0 & , & & (1.1.1.1) \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & 0 & & & \end{aligned}$$

4 εξισώσεων με 5 αγνώστους, με συντελεστές από το \mathbb{R} . Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος (1.1.1.1) είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

ενώ ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right].$$

Το σύστημα (1.1.1.1) είναι συμβατό, αφού η 5-άδα $(0, 0, 0, 0, 0)$ ικανοποιεί κάθε μία από τις 4 εξισώσεις του (1.1.1.1). Μία άλλη λύση του συστήματος είναι το στοιχείο $(2, 1, 0, 0, 0)$ του \mathbb{R}^5 . Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^5 της μορφής $(2t, t, 0, 0, 0)$, για $t \in \mathbb{R}$ είναι λύση του συστήματος (1.1.1.1), αντικαθιστώντας τις τιμές $x_1 = 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ στις εξισώσεις του (1.1.1.1). Άρα το σύστημα (1.1.1.1) έχει άπειρες λύσεις. Η 5-άδα $(2, 1, 1, 0, 0)$ δεν είναι λύση του συστήματος (1.1.1.1), γιατί δεν ικανοποιεί τη δεύτερη εξίσωση:

$$-2 + 2 \cdot 1 + 1 - 5 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

2. Το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.1.2}$$

και είναι ασύμβατο όπως εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί. Πράγματι, αν (ξ_1, ξ_2) ήταν λύση του συστήματος (1.1.1.2), τότε σύμφωνα με την πρώτη εξίσωση $\xi_1 = 1 + \xi_2$, ενώ σύμφωνα με τη δεύτερη εξίσωση $2\xi_1 = 2\xi_2$ και $\xi_1 = \xi_2$. Συνδυάζοντας τις δύο εκφράσεις για το ξ_1 βλέπουμε ότι $\xi_1 = 1 + \xi_1$, άρα $0 = 1$ που είναι αδύνατον. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι (ξ_1, ξ_2) ήταν λύση του συστήματος (1.1.1.2). Άρα το σύστημα (1.1.1.2) δεν έχει λύση και είναι ασύμβατο.

3. Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Η τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1,$$

που δεν έχει λύση, αφού είναι αδύνατον να ισχύει $0 = 1$. Άρα το γραμμικό σύστημα με τον παραπάνω επαυξημένο πίνακα είναι ασύμβατο. Γενικότερα, αν ο επαυξημένος πίνακας $[A | B]$ του γραμμικού συστήματος $AX = B$ έχει μία γραμμή της μορφής

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ t],$$

για κάποια σταθερά $t \neq 0$, τότε το γραμμικό σύστημα είναι ασύμβατο.

Έστω ότι σε κάποιο γραμμικό σύστημα εξισώσεων αλλάζουμε τη θέση των εξισώσεων i και j . Στο νέο γραμμικό σύστημα η i εξίσωση είναι η j του αρχικού συστήματος και αντίστοιχα η j εξίσωση του νέου συστήματος είναι η i εξίσωση του αρχικού. Είναι ξεκάθαρο ότι το νέο γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις όπως το αρχικό σύστημα. Ο επαυξημένος πίνακας του καινούριου συστήματος προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος (1.1.0.1) *αντιμεταθέτοντας* τις γραμμές i και j .

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως επηρεάζονται οι λύσεις του συστήματος (1.1.0.1) αν πολλαπλασιάσουμε την i εξίσωση με κάποιο μη μηδενικό στοιχείο c του σώματος \mathbb{k} . Το νέο σύστημα γραμμικών εξισώσεων διαφέρει από το παλιό μόνο στην i εξίσωση. Δηλαδή η i εξίσωση του συστήματος (1.1.0.1) είναι

$$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n = \beta_i, \tag{1.1.1.3}$$

ενώ η i εξίσωση του καινούριου συστήματος είναι

$$(c\alpha_{i1})x_1 + \dots + (c\alpha_{in})x_n = c\beta_i. \tag{1.1.1.4}$$

Έτσι αν $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ικανοποιεί την εξίσωση (1.1.1.3) τότε

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}\xi_1 + \dots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i &\Rightarrow c(\alpha_{i1}\xi_1 + \dots + c\alpha_{in}\xi_n) = c\beta_i \Rightarrow \\ &(c\alpha_{i1})\xi_1 + \dots + (c\alpha_{in})\xi_n = c\beta_i, \end{aligned}$$

δηλ. $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ είναι λύση της εξίσωσης (1.1.1.4). Το αντίστροφο αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, αφού η εξίσωση (1.1.1.3) προέρχεται από την εξίσωση (1.1.1.4) πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με c^{-1} . Εύκολα, λοιπόν, προκύπτει ότι οι λύσεις των δύο συστημάτων είναι ακριβώς οι ίδιες. Παρατηρούμε ότι ο επαυξημένος πίνακας του νέου συστήματος προκύπτει από τον αρχικό πίνακα αν *πολλαπλασιάσουμε* τα στοιχεία της i γραμμής με k .

Τέλος, αν στην i εξίσωση του συστήματος (1.1.0.1) προσθέσουμε k φορές την l εξίσωση του συστήματος (1.1.0.1), προκύπτει ένα νέο σύστημα που διαφέρει από το παλιό μόνο στην i εξίσωση. Έτσι τώρα η εξίσωση γίνεται

$$(\alpha_{i1} + k\alpha_{l1})x_1 + \dots + (\alpha_{in} + k\alpha_{ln})x_n = \beta_i + k\beta_l. \quad (1.1.1.5)$$

Και πάλι τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Πράγματι, αν $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ είναι λύση του συστήματος (1.1.0.1), αρκεί να βεβαιώσουμε ότι η ξ ικανοποιεί την i εξίσωση του νέου συστήματος, αφού ήδη ικανοποιεί όλες τις άλλες. Αφού όμως η ξ ικανοποιεί τις i και l εξισώσεις του συστήματος (1.1.0.1), ισχύει ότι

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \dots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i \quad (1.1.1.6)$$

και

$$\alpha_{l1}\xi_1 + \dots + \alpha_{ln}\xi_n = \beta_l. \quad (1.1.1.7)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (1.1.1.7) με k προκύπτει ότι

$$k\alpha_{l1}\xi_1 + \dots + k\alpha_{ln}\xi_n = k\beta_l. \quad (1.1.1.8)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1.1.1.6) και (1.1.1.8), βρίσκουμε ότι

$$(\alpha_{i1} + k\alpha_{l1})\xi_1 + \dots + (\alpha_{in} + k\alpha_{ln})\xi_n = \beta_i + k\beta_l,$$

δηλ. ικανοποιείται η (1.1.1.5). Για το αντίστροφο, δηλαδή για να δείξουμε ότι μία λύση του νέου συστήματος είναι και λύση του συστήματος (1.1.0.1), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι από το νέο σύστημα μπορούμε να πάμε πίσω στο σύστημα (1.1.0.1), *αφαιρώντας* από την i εξίσωση, k φορές την l εξίσωση. Επομένως, το ζητούμενο προκύπτει από όσα είδαμε προηγουμένως. Συγκεντρώνουμε τις παρατηρήσεις μας στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.2. Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα με συντελεστές από το \mathbb{k} . Αν ο πίνακας $[A'|B']$ προκύπτει από τον πίνακα $[A|B]$ με οποιαδήποτε από τις επόμενες τρεις ενέργειες:

- αντιμετάθεση δύο γραμμών του $[A|B]$,
- πολλαπλασιασμό μίας γραμμής του $[A|B]$ με κάποιο μη μηδενικό στοιχείο του \mathbb{k} ,
- άθροισμα μίας γραμμής του $[A|B]$ με πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής του $[A|B]$,

τότε το γραμμικό σύστημα $A'X = B'$ έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το σύστημα $AX = B$.

Όταν όλες οι σταθερές στον πίνακα B είναι ίσες με 0, τότε γράφουμε $B = \mathbf{0}$ και καλούμε το σύστημα $AX = \mathbf{0}$ **ομογενές** (homogeneous). Το σύστημα $AX = \mathbf{0}$ είναι συμβατό για οποιοδήποτε πίνακα A , αφού το $(0, \dots, 0)$ είναι λύση. Σημειώνουμε μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των ομογενών συστημάτων:

Πρόταση 1.1.3. Έστω το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{0}$ με συντελεστές από το σώμα \mathbb{k} με λύσεις τα $v_1 = (p_1, \dots, p_n)$, $v_2 = (q_1, \dots, q_n)$. Τότε το $\kappa v_1 + \lambda v_2$ είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$, για $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$.

Απόδειξη. Έστω ότι η i εξίσωση του συστήματος $AX = \mathbf{0}$ είναι

$$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\kappa v_1 + \lambda v_2 = (\kappa p_1 + \lambda q_1, \dots, \kappa p_n + \lambda q_n)$. Για να δείξουμε, λοιπόν, ότι το $\kappa v_1 + \lambda v_2$ είναι λύση του συστήματος $AX = \mathbf{0}$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\alpha_{i1} (\kappa p_1 + \lambda q_1) + \dots + \alpha_{in} (\kappa p_n + \lambda q_n) = 0.$$

Όμως,

$$\alpha_{i1} p_1 + \dots + \alpha_{in} p_n = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_{i1} q_1 + \dots + \alpha_{in} q_n = 0.$$

Επομένως

$$\kappa \alpha_{i1} p_1 + \dots + \kappa \alpha_{in} p_n = 0 \quad \text{και} \quad \lambda \alpha_{i1} q_1 + \dots + \lambda \alpha_{in} q_n = 0.$$

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} (\kappa \alpha_{i1} p_1 + \dots + \kappa \alpha_{in} p_n) + (\lambda \alpha_{i1} q_1 + \dots + \lambda \alpha_{in} q_n) &= 0 \Rightarrow \\ (\kappa \alpha_{i1} p_1 + \lambda \alpha_{i1} q_1) + \dots + (\kappa \alpha_{in} p_n + \lambda \alpha_{in} q_n) &= 0 \Rightarrow \\ \alpha_{i1} (\kappa p_1 + \lambda q_1) + \dots + \alpha_{in} (\kappa p_n + \lambda q_n) &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως το $\kappa v_1 + \lambda v_2$ είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$. □

Λέμε ότι ο συνδυασμός $\kappa v_1 + \lambda v_2$ είναι **γραμμικός συνδυασμός** (linear combination) των v_1 και v_2 με συντελεστές $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.3 αν το v είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$, τότε το κv είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$ για $\kappa \in \mathbb{k}$. Επομένως ισχύει η επόμενη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.1.4. Αν το σύστημα $AX = \mathbf{0}$ έχει μία μη μηδενική λύση, τότε το $AX = \mathbf{0}$ έχει άπειρες λύσεις.

Ασκήσεις Ενότητας 1.1

1. Να βρείτε τους επαυξημένους πίνακες των συστημάτων:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0, \\ 2x + 3y = 0 \end{array} & \text{ii)} & \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2, \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{array}{l} x - y + \quad = 1 \\ x + y - z = 2. \end{array}$$

2. Να γράψετε και να λύσετε στον \mathbb{R} τα συστήματα με τους επόμενους επαυξημένους πίνακες.

$$\text{i)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \text{ii)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{array} \right].$$

3. Να βρείτε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = 0$ στον \mathbb{R} , όταν A είναι ο μηδενικός 3×4 πίνακας, δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Σε αυτήν την ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο του Gauss. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιείται προκειμένου να μεταβούμε από έναν $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ σε ένα νέο πίνακα με όσο το δυνατόν περισσότερα μηδενικά στοιχεία. Πρώτα θα ορίσουμε τους τρεις τύπους των στοιχειωδών πράξεων γραμμών που επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε. Οι γραμμές του A συμβολίζονται με $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Κάθε γραμμή του A είναι ένας $1 \times n$ πίνακας. Έτσι

$$\Gamma_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}], \text{ για } i = 1, \dots, m.$$

Όταν γράφουμε $b\Gamma_i$, εννοούμε ότι πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία της γραμμής Γ_i με το στοιχείο $b \in \mathbb{k}$. Το αποτέλεσμα είναι ο $1 \times n$ πίνακας

$$b\Gamma_i = [ba_{i1} \ \dots \ ba_{in}].$$

Όταν γράφουμε $\Gamma_i + b\Gamma_j$, εννοούμε ότι πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της Γ_j με το b και στη συνέχεια τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα στοιχεία της Γ_i . Το αποτέλεσμα είναι ο $1 \times n$ πίνακας

$$\Gamma_i + b\Gamma_j = [a_{i1} + ba_{j1} \ \dots \ a_{in} + ba_{jn}].$$

Ορισμός 1.2.1. Έστω ο $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το \mathbb{k} και $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ οι γραμμές του A . Οι **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών** (elementary row operations) του A είναι οι εξής:

τύπου 1: αντικατάσταση της γραμμής Γ_i με τη γραμμή $\Gamma_i + a\Gamma_j$, όπου $1 \leq i, j \leq n$ και $a \in \mathbb{k}$. Θα συμβολίζουμε τη πράξη αυτή με $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + a\Gamma_j$.

τύπου 2: αντιμετάθεση της γραμμής Γ_i με τη γραμμή Γ_j , όπου $1 \leq i, j \leq n$. Θα συμβολίζουμε τη πράξη αυτή με $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$.

τύπου 3: αντικατάσταση της γραμμής Γ_i με τη γραμμή $b\Gamma_i$, όπου $1 \leq i \leq n$ και $0 \neq b \in \mathbb{k}$. Θα συμβολίζουμε τη πράξη αυτή με $\Gamma_i \rightarrow b\Gamma_i$.

Στη στοιχειώδη πράξη γραμμών τύπου 1, η σειρά των δεικτών έχει μεγάλη σημασία: στη γραμμή Γ_i προσθέτουμε το πολλαπλάσιο $a\Gamma_j$ της γραμμής Γ_j . Αν το a είναι μηδέν, τότε το αποτέλεσμα είναι η αρχική γραμμή Γ_i . Στα επόμενα παραδείγματα, με $A \rightarrow B$ συμβολίζουμε τη μετάβαση στον πίνακα B από τον πίνακα A .

Παραδείγματα 1.2.2.

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow 2\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λέμε ότι η γραμμή Γ_i του A είναι μηδενική αν όλα τα στοιχεία της Γ_i είναι μηδέν, δηλ.

$$\Gamma_i = [0 \ \dots \ 0].$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε πότε ένας πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Ορισμός 1.2.3. Ο πίνακας A είναι σε **κλιμακωτή μορφή γραμμών** (row echelon form) αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- Σε κάθε γραμμή του A , το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο, ξεκινώντας από τα αριστερά, είναι ίσο με 1. Ονομάζουμε το 1 **καθοδηγητική μονάδα** (leading one) της γραμμής.
- Τα στοιχεία στην ίδια στήλη με μία καθοδηγητική μονάδα και κάτω από αυτήν, πρέπει να είναι ίσα με μηδέν.
- Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, είναι οι τελευταίες γραμμές του πίνακα.

Ένας πίνακας A είναι σε **ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών** (row reduced echelon form) αν

- A είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και
- κάθε στήλη του A , με καθοδηγητική μονάδα, έχει όλα τα στοιχεία κάτω και επάνω από την καθοδηγητική μονάδα ίσα με μηδέν.

Αν ο πίνακας A είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών, τότε η καθοδηγητική μονάδα της Γ_i είναι δεξιότερα των καθοδηγητικών μονάδων των παραπάνω γραμμών, δηλ. των γραμμών Γ_j , όπου $j \leq i$. Τα επόμενα παραδείγματα αποσαφηνίζουν τις έννοιες που ορίσαμε προηγουμένως. Σε αυτά, κυκλώνουμε τις καθοδηγητικές μονάδες για να τις ξεχωρίζουμε.

Παραδείγματα 1.2.4.

1. Ο **μηδενικός** $m \times n$ **πίνακας 0**, δηλ. ο $m \times n$ πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 0, είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
2. Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών αλλά όχι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

3. Οι πίνακες

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

4. Οι πίνακες

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Ο στόχος μας είναι να φέρουμε τον πίνακα A σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Ο στόχος αυτός πετυχαίνεται χρησιμοποιώντας τον **αλγόριθμο του Gauss** (Gaussian elimination algorithm).

Αλγόριθμος 1.2.1 Αλγόριθμος του Gauss

Είσοδος: Ένας $m \times n$ πίνακας A .

Έξοδος: Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του A .

Βήμα 1 Αν ο A είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

Βήμα 2 Βρίσκουμε την *αριστερότερη* μη μηδενική στήλη του A .

Βήμα 3 Αντιμεταθέτουμε την πρώτη γραμμή με άλλη γραμμή αν χρειάζεται, έτσι ώστε στην πρώτη γραμμή της στήλης που εντοπίσαμε στο βήμα 2, να υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο.

Βήμα 4 Αν το στοιχείο στην πρώτη γραμμή του βήματος 3 είναι το a , τότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $1/a$ και κατασκευάζουμε την καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής.

Βήμα 5 Αφαιρούμε *κατάλληλα* πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από τις επόμενες γραμμές για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της στήλης *κάτω* από την καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής.

Βήμα 6 Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα του αλγορίθμου, ξεκινώντας όμως από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα που έχει προκύψει. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο, έως ότου προκύψει πίνακας που είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Βήμα 7 Ξεκινώντας από την τελευταία μη μηδενική γραμμή του πίνακα του βήματος 6 και δουλεύοντας προς τα επάνω, αφαιρούμε *κατάλληλα* πολλαπλάσιο της γραμμής από τις προηγούμενες για να μηδενίσουμε τα στοιχεία *επάνω* από τη καθοδηγητική μονάδα.

Θα αποσαφηνίσουμε τον αλγόριθμο με τα επόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα 1.2.5.

1. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Gauss προκειμένου να φέρουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Η αριστερότερη μη μηδενική στήλη είναι η δεύτερη στήλη, ενώ το στοιχείο στη δεύτερη γραμμή αυτής της στήλης είναι μη μηδενικό. Έτσι στο βήμα 3 αντιμετωπίζουμε τις δύο πρώτες γραμμές, ενώ στο βήμα 4 διαιρούμε τη πρώτη γραμμή με το 2. Στη συνέχεια δείχνουμε τα βήματα του αλγορίθμου που φέρνουν τον A σε κλιμακωτή μορφή γραμμών, (βήματα 2-6).

$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1} \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 & -5 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_3} A' = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ο A' είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Για να φέρουμε τον A' σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή, αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή την τρίτη:

$$A' \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3} A'' = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Ο A'' είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

2. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ήδη σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Ο αλγόριθμος του Gauss επιστρέφει τον A .

3. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss στον επόμενο πίνακα B :

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \frac{3}{2}\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -2\Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{2}{3}\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Θεωρούμε τον 3×3 -πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Θα φέρουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών χρησιμοποιώντας μία παραλλαγή του αλγορίθμου του Gauss. Θα χρησιμοποιήσουμε την καθοδηγητική μονάδα της δεύτερης γραμμής (στη δεύτερη στήλη) για να κάνουμε μηδενικά ταυτόχρονα στην πρώτη και τρίτη γραμμή. Ο τρόπος αυτός συνήθως απαιτεί περισσότερες πράξεις από τον αλγόριθμο 1.2.1.

$$\begin{aligned}
A & \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{8}\Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι αν στον A εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και καταλήξουμε στον B , τότε αντιστρέφοντας τις πράξεις αυτές καταλήγουμε στον A από τον B , με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Έτσι αν δύο πίνακες B, C , προκύπτουν από τον A μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών, τότε μπορούμε να πάμε από τον B στον C με εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών περνώντας ενδιάμεσα από τον A . Παρατηρούμε επίσης ότι αν οι A' και A'' είναι δύο πίνακες σε κλιμακωτή μορφή γραμμών έτσι

ώστε ο A' και ο A'' να προκύπτουν από τον A μετά από εφαρμογές στοιχειωδών πράξεων γραμμών, τότε είναι δυνατόν $A' \neq A''$. Για παράδειγμα, στο 1.2.5.1, οι A' και A'' είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και προέρχονται από τον A . Έχει, λοιπόν, σημασία η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.2.6. Έστω ότι οι πίνακες B, C είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών και ότι οι B και C προέρχονται από τον A μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών. Τότε $B = C$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο A είναι $m \times n$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της **μαθηματικής επαγωγής** (mathematical induction) στο n , τον αριθμό των στηλών του A . Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για την αρχική τιμή του n (επαγωγικό βήμα) και υποθέτοντας ότι η πρόταση είναι αληθής για το $n = k$ (υπόθεση της επαγωγής), θα πρέπει στη συνέχεια να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$. Η πρόταση είναι αληθής για $n = 1$, βλ. Άσκηση 1.2.1. Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι η πρόταση ισχύει για τους $m \times k$ πίνακες. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι αληθής όταν ο A είναι $m \times (k + 1)$ και οι B, C , πίνακες σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών, προέρχονται από τον A μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών. Είναι φανερό ότι οι πίνακες που αποτελούνται από τις πρώτες k στήλες των B και C είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών και προέρχονται από τον πίνακα που αποτελείται από τις πρώτες k στήλες του A μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών. Εφαρμόζουμε, λοιπόν, την υπόθεση της επαγωγής για να συμπεράνουμε ότι οι πρώτες k στήλες των B και C είναι ίσες. Άρα, οι διαφορές των B και C (αν υπάρχουν) βρίσκονται στην τελευταία $(k + 1)$ -στήλη. Δουλεύοντας με την τελευταία μη μηδενική γραμμή του B , είναι εύκολο να δει κανείς ότι ταυτίζεται με την τελευταία μη μηδενική γραμμή του C , εξαιτίας της θέσης της καθοδηγητικής μονάδας (είτε στη στήλη $(k + 1)$ είτε σε προηγούμενη στήλη) και της παρατήρησης ότι οι γραμμές του B προέρχονται από τις γραμμές του C μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών. Δηλαδή, οι τελευταίες γραμμές των B και C ταυτίζονται. Δουλεύοντας με αυτόν τον τρόπο από κάτω προς τα επάνω, προκύπτει ότι $B = C$. \square

Ο μοναδικός πίνακας σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών που προκύπτει από τον A με την εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών λέγεται **η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών** του A .

Ορισμός 1.2.7. Η **βαθμίδα** (rank) του πίνακα A λέγεται το πλήθος των καθοδηγητικών μονάδων στην ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του A . Η βαθμίδα του A συμβολίζεται με $\text{rank}(A)$.

Είναι φανερό από την Πρόταση 1.2.6, ότι αν ο B προκύπτει από τον A με κάποια από τις τρεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, τότε $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

Παραδείγματα 1.2.8.

1. Έστω $\mathbf{0}$ ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας. Τότε $\text{rank}(\mathbf{0}) = 0$.
2. Έστω B ο πίνακας του Παραδείγματος 1.2.5.3. Τότε $\text{rank}(B) = 3$.

Αν ο B είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $m \times n$ πίνακα A , τότε κάθε μη μηδενική γραμμή του B έχει καθοδηγητική μονάδα και επομένως $\text{rank}(B) \leq m$. Επίσης αν μία στήλη του B έχει καθοδηγητική μονάδα, τότε όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης

αυτής είναι μηδέν. Συνεπώς, κάθε στήλη του B έχει το πολύ μία καθοδηγητική μονάδα και επομένως $\text{rank}(B) \leq n$. Αφού $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$, συμπεραίνουμε ότι:

Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$.

Παρατήρηση 1.2.9. Όπως με τις γραμμές του A , μπορούμε να ορίσουμε ανάλογα τις **στοιχειώδεις πράξεις στηλών** (elementary column operations) του A και στη συνέχεια να αναπτύξουμε τη θεωρία για την **ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών** (column reduced echelon form) του A , βλ. σύγγραμμα [2, Ορισμός 1.2.5]. Ο αλγόριθμος του Gauss προσαρμόζεται για να φέρει τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών.

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών ενός πίνακα δεν ισούται κατ' ανάγκη με την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών του πίνακα.

Παράδειγμα 1.2.10. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Όμως, ο A δεν είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών. Οι επόμενες στοιχειώδεις πράξεις στηλών, φέρνουν τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών.

$$A \xrightarrow{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - 4\Sigma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θα δούμε αργότερα ότι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών και η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών ενός πίνακα έχουν τον ίδιο αριθμό καθοδηγητικών μονάδων.

Ασκήσεις Ενότητας 1.2

1. Να βρείτε όλους του $m \times 1$ πίνακες με στοιχεία από τον \mathbb{R} σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
2. Να περιγράψετε όλους του 2×2 πίνακες με στοιχεία από τον \mathbb{C} σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
3. Να περιγράψετε όλους του 2×3 πίνακες με στοιχεία από τον \mathbb{C} σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή στηλών.
4. Να φέρετε τους επόμενους πίνακες σε κλιμακωτή μορφή και σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών και να υπολογίσετε τη βαθμίδα τους.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 9 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.3 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε μία μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss. Από την Πρόταση 1.1.2 και τον τρόπο που ορίσαμε την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών προκύπτει το εξής συμπέρασμα.

Πρόταση 1.3.1. Έστω ότι το $AX = B$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με συντελεστές από το σώμα \mathbb{k} και έστω ότι $[R|B']$ είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $[A|B]$. Το γραμμικό σύστημα $RX = B'$ έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το σύστημα $AX = B$.

Ο αλγόριθμος (1.3.1) βασίζεται σε αυτή την πρόταση.

Αλγόριθμος 1.3.1 Αλγόριθμος για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

Είσοδος: Ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$.

Έξοδος: Το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$.

Βήμα 1 Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A | B]$. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών φέρνουμε τον $[A | B]$ σε κλιμακωτή μορφή γραμμών $[A' | B']$. Αν μία οποιαδήποτε γραμμή του $[A' | B']$ είναι της μορφής

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ a]$$

όπου $a \neq 0$, τότε το αρχικό σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 2 Φέρνουμε τον $[A' | B']$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών $[R | B'']$. Οι άγνωστοι που αντιστοιχούν στις στήλες χωρίς καθοδηγητικές μονάδες γίνονται παράμετροι, δηλαδή τους επιτρέπουμε να λάβουν οποιαδήποτε τιμή από το \mathbb{k} και λέγονται **ελεύθερες μεταβλητές** (free variable).

Βήμα 3 Βρίσκουμε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές γραμμές του $[R | B'']$. Λύνουμε ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες. Οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι το σύνολο των n -άδων που προκύπτουν από το Βήμα 3.

Για να φέρουμε τον πίνακα $[A | B]$ στη μορφή $[A' | B']$ του πρώτου βήματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Αλγόριθμο του Gauss. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2, τα συστήματα $AX = B$ και $A'X = B'$ του πρώτου βήματος έχουν τις ίδιες λύσεις. Τα επόμενα παραδείγματα θα διαφωτίσουν τη διαδικασία εύρεσης λύσεων. Θα χρησιμοποιούμε $\rightarrow \dots \rightarrow$ για να συμβολίσουμε τη συνολική διαδικασία που φέρνει έναν πίνακα σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Με $\mathbf{0}$ θα συμβολίζουμε το μηδενικό πίνακα οποιασδήποτε διάστασης.

Παραδείγματα 1.3.2.

1. Θα βρούμε το σύνολο των λύσεων του επόμενου ομογενούς συστήματος επάνω από το σώμα \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 & & & + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & & & - 5x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 & & & = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 & & & = 0. \end{aligned} \tag{1.3.2.1}$$

Παίρνοντας τον επαυξημένο πίνακα που αντιστοιχεί στο σύστημα (1.3.2.1) και κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών βρίσκουμε:

$$[A | \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Το αρχικό σύστημα (1.3.2.1) γίνεται ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 & & + 4x_5 = 0 \\ & x_3 & - x_5 = 0 \\ & x_4 & + 3x_5 = 0. \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές x_2, x_5 είναι παράμετροι. Λύνοντας ως προς x_1, x_3, x_4 , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 4x_5 \\ x_3 &= x_5 \\ x_4 &= -3x_5 \end{aligned} \tag{1.3.2.2}$$

Αν (x_1, \dots, x_5) είναι λύση του συστήματος (1.3.2.1), τότε οι x_2, x_5 μπορούν να πάρουν τυχαίες τιμές από το \mathbb{R} , ενώ οι x_1, x_3, x_4 περιορίζονται από τις σχέσεις (1.3.2.2). Η τυχαία λύση του συστήματος (1.3.2.1) είναι μία 5-άδα της μορφής

$$(2x_2 - 4x_5, x_2, x_5, -3x_5, x_5) \text{ όπου } x_2, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος (1.3.2.1) είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} \{ (2x_2 - 4x_5, x_2, x_5, -3x_5, x_5) : x_2, x_5 \in \mathbb{R} \} &= \\ = \{ (2x_2, x_2, 0, 0, 0) + (-4x_5, 0, x_5, -3x_5, x_5) : x_2, x_5 \in \mathbb{R} \} &= \\ = \{ x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-4, 0, 1, -3, 1) : x_2, x_5 \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι οι λύσεις του ίδιου συστήματος επάνω από το \mathbb{C} είναι το σύνολο

$$\{ x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_5(-4, 0, 1, -3, 1) : x_2, x_5 \in \mathbb{C} \}.$$

2. Θα λύσουμε επάνω από το σώμα \mathbb{R} το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3. \end{aligned} \tag{1.3.2.3}$$

Έστω A ο πίνακας των συντελεστών και B ο πίνακας των σταθερών του συστήματος (1.3.2.3). Τότε

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 5 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι $\text{rank}(A) = \text{rank}([A | B]) = 4$ και το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 1/3 x_5 &= 1 \\ x_2 + 8/3 x_5 &= 1 \\ x_3 + x_5 &= 1 \\ x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Οι λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$ δίνονται από το σύνολο

$$\begin{aligned} &\{ (1/3x_5, -8/3x_5, -x_5, -x_5, x_5) : x_5 \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ x_5(1/3, -8/3, -1, -1, 1) : x_5 \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Οι λύσεις του συστήματος $AX = B$ δίνονται από το σύνολο

$$\{ (1, 1, 1, 1, 0) + t(1/3, -8/3, -1, -1, 1) : t \in \mathbb{R} \}.$$

3. Θα λύσουμε επάνω από το \mathbb{R} το γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = [1 \quad -1].$$

Η ελατιωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[A | B]$ είναι ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Το αρχικό σύστημα γίνεται ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

Οι μεταβλητές είναι x_1, x_4 . Λύνουμε ως προς x_2, x_3 και βρίσκουμε ότι

$$\begin{cases} x_2 = 3 - x_4 \\ x_3 = -1 - x_4 \end{cases}$$

Το σύνολο των λύσεων του συστήματος είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} & \{(x_1, 3 - x_4, -1 - x_4, x_4) : x_1, x_4 \in \mathbb{R}\} = \\ & \{x_1(1, 0, 0, 0) + x_4(0, -1, -1, 1) + (0, 3, -1, 0) : x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

4. Θα βρούμε τις λύσεις του γραμμικού συστήματος $AX = B$ στον \mathbb{R} , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[A \mid B]$ είναι ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 \end{array} \right].$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι το $(3, -1)$. Το σύνολο $\{(3, -1)\}$ είναι το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος $AX = B$.

5. Θα λύσουμε επάνω από το \mathbb{C} τα γραμμικά συστήματα $AX = \mathbf{0}$, $AX = B$ και $AX = C$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Θα λύσουμε τα συστήματα αυτά ταυτόχρονα αφού έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Έτσι επαυξάνουμε τον A κατά τρεις στήλες, $[A \mid \mathbf{0} \mid B \mid C]$, και φέρνουμε αυτόν τον επαυξημένο πίνακα σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Έπεται ότι

- το $(0, 0, 0)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος $AX = \mathbf{0}$,

- το σύστημα $AX = B$ δεν είναι συμβατό.
- το $(3, -1, i)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος $AX = C$.

Η επόμενη πρόταση γενικεύει όσα είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της βαθμίδας του πίνακα.

Πρόταση 1.3.3. Έστω το γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε:

- Το $AX = B$ είναι συμβατό αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid B])$.
- Αν $\text{rank}(A) = m$, τότε το $AX = B$ είναι συμβατό.
- Αν $\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid B]) = n$, τότε το $AX = B$ έχει ακριβώς μία λύση.
- Αν $\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid B]) < n$, τότε το $AX = B$ έχει άπειρες λύσεις. Η γενική λύση του $AX = B$ εκφράζεται με $n - \text{rank}(A)$ παραμέτρους.

Εφαρμόζουμε τα προηγούμενα στην περίπτωση του ομογενούς συστήματος $AX = 0$, όπου A ένας $m \times n$ πίνακας. Αφού $\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid 0])$, το ομογενές σύστημα $AX = 0$ είναι συμβατό και βλέπουμε ότι το $(0, \dots, 0)$ είναι λύση του $AX = 0$. Οποιαδήποτε στοιχειώδης πράξη γραμμών στον $[A \mid 0]$ διατηρεί μηδενική την τελευταία στήλη. Έτσι για την επίλυση του $AX = 0$ μπορούμε να αγνοήσουμε την τελευταία στήλη έως το τρίτο βήμα του αλγορίθμου επίλυσης. Το $(0, \dots, 0)$ είναι η μοναδική λύση του $AX = 0$ αν δεν υπάρχουν παράμετροι, δηλ. αν $\text{rank}(A) = n$. Συνεπώς ισχύει η εξής πρόταση.

Πρόταση 1.3.4. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και R η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A . Τότε

- Το σύστημα $AX = 0$ είναι (πάντα) συμβατό.
- Το $(0, \dots, 0)$ είναι η μοναδική λύση του $AX = 0$ αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = n$, δηλ. αν κάθε στήλη της ελαττωμένης κλιμακωτής μορφής γραμμών του A έχει καθοδηγητική μονάδα.

Ασκήσεις Ενότητας 1.3

1. Τα επόμενα συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Να λυθούν (ταυτόχρονα) τα τρία πρώτα επάνω από τον \mathbb{R} . Για το τέταρτο σύστημα, να βρείτε συνθήκη(ες) στα $a, b, c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να είναι συμβατό.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} & \text{ii)} & \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{iii)} & \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{array} & \text{iv)} & \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + 2y - z = b \\ 2x + 3y = b \end{array} \end{array}$$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 4x_5 &= -3 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε την τιμή του a ώστε το σύστημα $AX = B$ να έχει λύση.

4. Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος $AX = B$ έχει κλιμακωτή μορφή γραμμών τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Να λυθεί το σύστημα.

5. Έστω ότι το σύστημα $AX = B$ έχει σύνολο λύσεων το $S = \{(1, 2, 0, 1) + t(1, 1, 1, 2) + s(0, 1, 2, 1) : t, s \in \mathbb{C}\}$. Να λυθεί το σύστημα $AX = 0$.

1.4 Ευθείες και Επίπεδα στον \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τα συστήματα των εξισώσεων που έχουν σύνολο λύσεων ευθείες ή επίπεδα στον \mathbb{R}^3 . Πρώτα, όμως, θα μελετήσουμε τις εξισώσεις ευθειών στον \mathbb{R}^2 .

Ευθείες στον \mathbb{R}^2

Μία ευθεία στον \mathbb{R}^2 είναι το σύνολο των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = c$, όπου κάποιο από τα a, b δεν είναι μηδέν. Η εξίσωση αυτή είναι ένα πολύ απλό γραμμικό σύστημα. Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ έχει βαθμίδα 1. Επομένως, η γενική λύση του συστήματος περιγράφεται με μία παράμετρο.

Παραδείγματα 1.4.1.

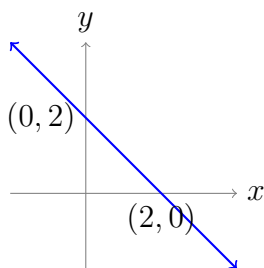
1. Ο επαυξημένος πίνακας της εξίσωσης $x + y = 2$ είναι ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

ο οποίος είναι ήδη σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το σύνολο

$$\{(2 - y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1) + (2, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Η ευθεία $x + y = 2$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα :

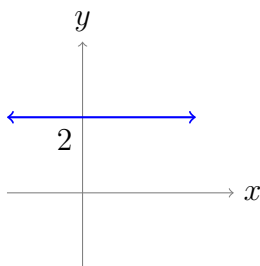


Σχήμα 1.1: Η ευθεία $x + y = 2$.

2. Ο επαυξημένος πίνακας της εξίσωσης $y = 2$ είναι ο πίνακας $[0 \ 1 \ | \ 2]$, ο οποίος είναι ήδη σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Το σύνολο είναι το σύνολο

$$\{(t, 2) : t \in \mathbb{R}\}$$

και η ευθεία $y = 2$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 1.2: Η ευθεία $y = 2$

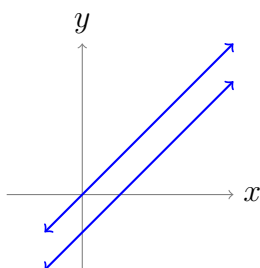
3. Η ευθεία

$$L = \{(1, 0) + t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

ικανοποιεί την εξίσωση $x - y = 1$. Πράγματι, αν $(x, y) \in L$, τότε $x = 1 + t$, $y = t$, για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $x = 1 + y \Rightarrow x - y = 1$. Η ευθεία L είναι παράλληλη με την ευθεία

$$\{t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Οι δύο ευθείες απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 1.3: Οι ευθείες $x - y = 0$ και $x - y = 1$

Ευθείες και Επίπεδα στον \mathbb{R}^3

Έστω τώρα ένα γραμμικό σύστημα με τρεις αγνώστους και m εξισώσεις, με συντελεστές από τον \mathbb{R} . Για ευκολία το γράφουμε ως $AX = B$, όπου ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας. Γνωρίζουμε ότι $\text{rank } A \leq 3$, δηλ. $\text{rank } A$ μπορεί να πάρει ακριβώς τέσσερις τιμές, με μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη τιμή το 0. Οι λύσεις του $AX = B$ (αν υπάρχουν) είναι σημεία του \mathbb{R}^3 . Όμως, ο \mathbb{R}^3 έχει (a priori) τρεις βαθμούς ελευθερίας. Μία (μη μηδενική) γραμμική εξίσωση επιβάλλει μία συνθήκη που μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας. Αν το σύστημα είναι ασύμβατο, τότε υπάρχουν συνθήκες που δεν μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα. Αν, όμως, το σύστημα είναι συμβατό, τότε υπάρχουν σημεία του \mathbb{R}^3 που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλες τις συνθήκες. Έστω, λοιπόν, ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό. Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει, ανάλογα με τη βαθμίδα του A .

Πίνακας 1.4.1: Γεωμετρική περιγραφή των λύσεων του $AX = B$ στον \mathbb{R}^3 , όταν ο A είναι ένας $m \times 3$ πίνακας

- i.) Αν $\text{rank } A = 3$, τότε δεν υπάρχει κάποιος βαθμός ελευθερίας. Το σύνολο των λύσεων αποτελείται από μία μοναδική τριάδα, δηλ. η λύση του $AX = B$ είναι ένα *σημείο*.
- ii.) Αν $\text{rank } A = 2$, τότε υπάρχει μία παράμετρος και ένας βαθμός ελευθερίας και το σύνολο των λύσεων είναι της μορφής

$$\{t(a_1, a_2, a_3) + (a, b, c) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Η μία παράμετρος μας αναγκάζει να κινούμαστε στον τρισδιάστατο χώρο σε μία συγκεκριμένη κατεύθυνση. Η γραφική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του $AX = B$ είναι η *ευθεία* που διέρχεται από τα σημεία (a, b, c) (για $t = 0$) και $(a_1 + a, a_2 + b, a_3 + c)$ (για $t = 1$).

- iii.) Αν $\text{rank } A = 1$, τότε υπάρχουν δύο παράμετροι και δύο βαθμοί ελευθερίας. Το σύνολο των λύσεων του $AX = B$ είναι της μορφής

$$\{t(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3) + (a, b, c) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Οι δύο παράμετροι μας επιτρέπουν να κινηθούμε ελεύθερα προς δύο ανεξάρτητες κατευθύνσεις. Η γραφική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του $AX = B$ είναι το *επίπεδο* που περιέχει τα σημεία (a, b, c) (για $t = 0, s = 0$), $(a_1 + a, a_2 + b, a_3 + c)$ (για $t = 1, c = 0$) και $(b_1 + a, b_2 + b, b_3 + c)$ (για $t = 0, c = 1$).

- iv.) Αν $\text{rank } A = 0$, τότε όλες οι γραμμές του A είναι μηδενικές, δηλ. ο A είναι ο μηδενικός πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οι βαθμοί ελευθερίας είναι τρεις και το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι όλο το \mathbb{R}^3 .

Παραδείγματα 1.4.2.

1. Το xy επίπεδο στον \mathbb{R}^3 περιγράφεται από την εξίσωση $z = 0$. Η εξίσωση $z = 0$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με μία εξίσωση και τρεις αγνώστους με επαυξημένο πίνακα

$$[0 \ 0 \ 1 \mid 0].$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος έχει βαθμίδα 1. Έτσι, το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.

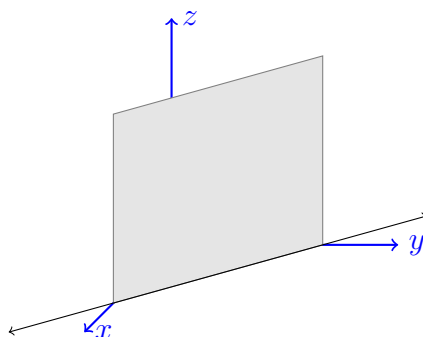
2. Θα εξετάσουμε τις λύσεις της εξίσωσης $x + y = 2$ στον \mathbb{R}^3 . (Σημειώνουμε ότι η εξίσωση $x + y = 2$ στον \mathbb{R}^2 αντιστοιχεί σε μία ευθεία, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.4.1.1). Ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος $x + y = 2$ στον \mathbb{R}^3 είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Το σύστημα είναι συμβατό, ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος έχει βαθμίδα 1 και το σύνολο λύσεων είναι ένα επίπεδο E :

$$E = \{(2 - y, y, z) : y \in \mathbb{R}\} = \{(2, 0, 0) + y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\},$$

που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4: Το επίπεδο $x + y = 2$ στον \mathbb{R}^3

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής του επιπέδου E με το xy επίπεδο ($z = 0$), δηλ. λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array},$$

που γράφουμε ως $AX = B$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

και το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι η ευθεία L που δίνεται από την εξίσωση

$$L = \{(2 - y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{(2, 0, 0) + y(-1, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Η ευθεία L περνά από τα σημεία $(2, 0, 0)$, (για $t = 0$), και $(1, 1, 0)$, (για $t = 1$). Σημειώνουμε ότι η L είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\{y(-1, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\},$$

που είναι η λύση του ομογενούς συστήματος $AX = 0$.

3. Οι εξισώσεις $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ και $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ περιγράφουν δύο επίπεδα στον \mathbb{R}^3 . Για να βρούμε την τομή τους, θα βρούμε τα σημεία που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις. Θα λύσουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 = 1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 = 2 \end{array} .$$

Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του προηγούμενου συστήματος σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right] .$$

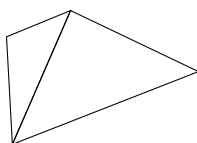
Επομένως

$$\begin{array}{l} x_1 = 5/2 - 2x_2 \\ x_3 = -1/2 \end{array}$$

και οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο

$$L = \{ (5/2, 0, -1/2) + t(-2, 1, 0) : t \in \mathbb{R} \} .$$

Συνεπώς, η τομή των επιπέδων $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ και $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ είναι η ευθεία L (βλ. Σχήμα 1.6). Παρατηρούμε ότι η L διέρχεται από τα σημεία $(5/2, 0, -1/2)$ ($t = 0$) και $(1/2, 1, -1/2)$ ($t = 1$). Κάθε τιμή του $t \in \mathbb{R}$ δίνει ένα σημείο του \mathbb{R}^3 επί της L .

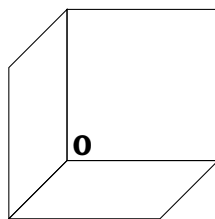


Σχήμα 1.5: Τομή δύο επιπέδων

4. Ο πίνακας συντελεστών για το ομογενές γραμμικό σύστημα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Η μοναδική λύση αυτού του συστήματος είναι το $(0, 0, 0)$. Αφού $x = 0$ περιγράφει το yz επίπεδο, $y = 0$ περιγράφει το xz επίπεδο και αντίστοιχα $z = 0$ περιγράφει το xy επίπεδο, από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι η τομή των τριών επιπέδων είναι η αρχή των αξόνων $\mathbf{0} : (0, 0, 0)$.



Σχήμα 1.6: Τομή των επιπέδων xy , xz , yz

5. Θα υπολογίσουμε την τομή των τριών επιπέδων $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ και $2x_1 + 3x_2 = 2$ του \mathbb{R}^3 . Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος

$$\begin{array}{rcll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & & = 2 \end{array}$$

σε κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Το σύστημα αυτό δεν είναι συμβατό, άρα τα τρία επίπεδα δεν έχουν κάποιο κοινό σημείο και η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

6. Έστω τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ και $(0, 0, 1)$ στο \mathbb{R}^3 . Θα βρούμε την εξίσωση ενός επιπέδου που περνά από τα τρία αυτά σημεία. Η εξίσωση ενός επιπέδου στο \mathbb{R}^3 έχει την μορφή

$$ax + by + cz = d \text{ ή ισοδύναμα } ax + by + cz - d = 0.$$

Επομένως, θέλουμε να βρούμε τα a, b, c, d έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcl} a & & -d = 0 \\ b & +c & -d = 0 \\ c & & -d = 0. \end{array} \quad (1.4.2.1)$$

Το γραμμικό σύστημα (1.4.2.1) είναι ομογενές, άρα είναι συμβατό. Φέρνουμε τον πίνακα των συντελεστών σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Συνεπώς οι λύσεις του ομογενούς συστήματος (1.4.2.1) είναι το σύνολο

$$\{(d, 0, d, d) : d \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 0, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Έτσι, αν $t = 1$, βρίσκουμε τη λύση $(1, 0, 1, 1)$, δηλ. $a = c = d = 1$ και $b = 0$. Η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$x + z = 1.$$

Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι όλες οι τιμές στο σύνολο των λύσεων δίνουν το ίδιο επίπεδο.

Ασκήσεις Ενότητας 1.4

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $\{(1, 4) + t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.
2. Να βρεθεί η τομή των επιπέδων $x + 2y - z = 0$, $x - y + z = 1$ στο \mathbb{R}^3 .
3. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ και $(0, 2, 3)$.
4. Να βρεθούν όλα τα επίπεδα που περνούν από τα σημεία $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ και $(2, 0, 2)$. Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει μοναδικό επίπεδο που να περνά από αυτά τα σημεία.

1.5 Πολυωνυμικές Καμπύλες

Το γράφημα ενός πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ για $0 \leq i \leq n$ και $a_n \neq 0$, για $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται **πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n** (polynomial curve of degree n). Τα σημεία μίας πολυωνυμικής καμπύλης είναι της μορφής $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ όπου $b = f(a)$. Στην ενότητα αυτή, θα δούμε πως να βρίσκουμε την πολυωνυμική καμπύλη βαθμού n που διέρχεται από καθορισμένα σημεία. Αν τα σημεία αυτά προκύπτουν ως πειραματικά δεδομένα που έχουμε συγκεντρώσει, τότε η πολυωνυμική καμπύλη δίνει ένα *μοντέλο* (model) για το φαινόμενο του πειράματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη συμπεριφορά του φαινομένου.

Παράδειγμα 1.5.1. Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(3, 2)$ και $C(5, -8)$. Θα βρούμε μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 2 που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού 3 που διέρχονται από αυτά τα σημεία. Πρώτα θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 1, δηλ. μία ευθεία που να περιέχει τα A, B, C .

- Έστω $y = a_0 + a_1x$. Τα σημεία A, B, C ανήκουν την καμπύλη του y αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 &= 4 \\ a_0 + 3a_1 &= 2 \\ a_0 + 5a_1 &= -8 \end{aligned} .$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος αυτού (με αγνώστους a_0, a_1) είναι ο

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{array} \right] .$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών είναι 3×2 και ότι έχει βαθμίδα 2, ενώ η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα είναι 3. Επομένως το σύστημα είναι ασύμβατο και δεν έχει λύση. Συνεπώς δεν υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 1 που να διέρχεται από τα 3 αυτά σημεία.

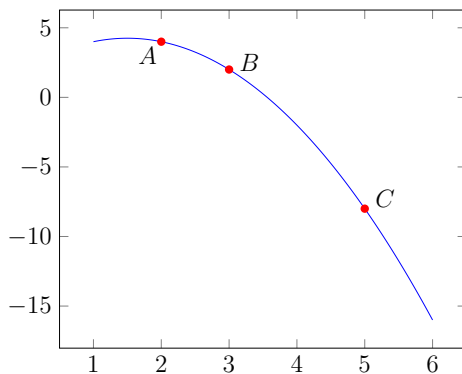
- Έστω $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Τα σημεία A, B, C ανήκουν την καμπύλη του y , αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 &= 2 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 &= -8 \end{aligned} .$$

Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος αυτού (με αγνώστους a_0, a_1, a_2) σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 25 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] .$$

Συνεπώς το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(2, 3, -1)$. Δηλ. $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = -1$, και τα A, B, C ανήκουν στην καμπύλη $y = 2 + 3x - x^2$ (βλ. επόμενο σχήμα).



Σχήμα 1.7: Η παραβολή $y = -x^2 + 3x + 2$.

- Έστω ότι $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Τα σημεία A, B και C ανήκουν στην καμπύλη του y αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_0 + 2 a_1 + 4 a_2 + 8 a_3 &= 4 \\ a_0 + 3 a_1 + 9 a_2 + 27 a_3 &= 2 \\ a_0 + 5 a_1 + 25 a_2 + 125 a_3 &= -8 . \end{aligned} \tag{1.5.1.1}$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα του συστήματος αυτού είναι

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -31 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 \end{array} \right] .$$

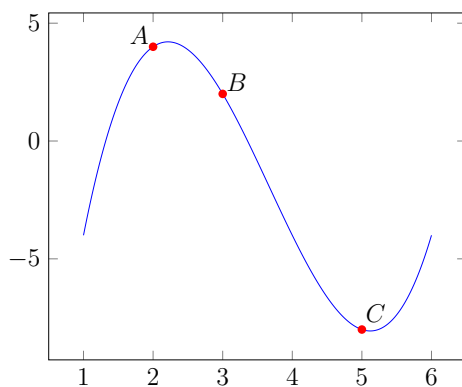
Το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος (1.5.1.1) είναι το σύνολο

$$\{(2, 3, -1, 0) + a_3(-30, 31, -10, 1) : a_3 \in \mathbb{R}\} .$$

Όταν $a_3 = 0$ τότε η 4-άδα $(2, 3, -1, 0)$ είναι η παραβολή που βρήκαμε προηγουμένως. Για κάθε άλλο $a_3 \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 3 που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. Η πολυωνυμική καμπύλη βαθμού ≤ 3 που περνά από τα A, B, C είναι γράφημα του πολυωνύμου

$$y = (2 - 30t) + (3 + 31t)x - (1 + 10t)x^2 + tx^3,$$

και υπάρχουν, λοιπόν, άπειρες καμπύλες βαθμού 3 που διέρχονται από τα A, B, C . Όταν $t = 1$ το πολυώνυμο είναι $y = -28 + 34x - 11x^2 + x^3$ και το γράφημά του είναι η καμπύλη του επόμενου σχήματος:



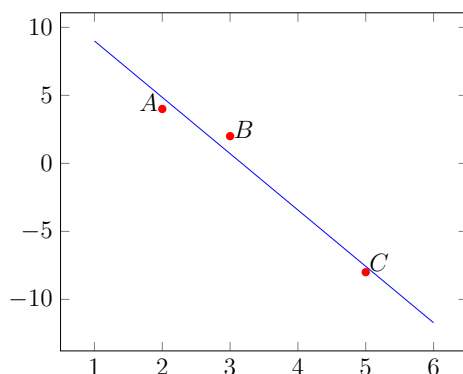
Σχήμα 1.8: Η καμπύλη $y = -28 + 34x - 11x^2 + x^3$.

- Είναι φανερό ότι για $n \geq 3$, υπάρχουν a_0, a_1, \dots, a_n , έτσι ώστε η καμπύλη του $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ να διέρχεται από τα σημεία A, B, C αφού η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα του αντίστοιχου συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 30 & * & \cdots & * & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -31 & * & \cdots & * & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & * & \cdots & * & -1 \end{array} \right]$$

και το σύστημα είναι συμβατό με άπειρες λύσεις.

Το Παράδειγμα 1.5.1 αφορά τρία συγκεκριμένα σημεία του \mathbb{R}^2 . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών που θα εισάγουμε στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι από n διαφορετικά σημεία του \mathbb{R}^2 περνούν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού $\geq n$ και ακριβώς *μία* πολυωνυμική καμπύλη βαθμού $n - 1$, βλ. Άσκηση 2.3.6. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με ένα ερώτημα που αφορά τα σημεία A, B, C του Παραδείγματος 1.5.1. Όπως είδαμε δεν υπάρχει ευθεία που να διέρχεται από τρία αυτά σημεία. Μήπως όμως μπορούμε να βρούμε την εξίσωση μίας ευθείας που να διέρχεται *όσο γίνεται πιο κοντά* από αυτά τα σημεία; Το ερώτημα αυτό έχει νόημα όταν είμαστε πεπεισμένοι ότι το μοντέλο μας είναι σωστό και ότι οι συντεταγμένες των σημείων δεν έχουν δοθεί με απόλυτη ακρίβεια, από λάθος της μέτρησης ή εξαιτίας άλλων περιορισμών του υπολογιστικού συστήματος. Μπορούμε πράγματι να βρούμε μία ευθεία που να περιορίζει όσο το δυνατόν την απόκλιση. Η ευθεία αυτή ονομάζεται *ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων* και θα εξετάσουμε τον υπολογισμό της στην Ενότητα 6.2. Στο Σχήμα (1.9) απεικονίζεται η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων για τα σημεία A, B, C του Παραδείγματος 1.5.1.



Σχήμα 1.9: Η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων για τα A, B, C .

Άσκησης Ενότητας 1.5

1. Να βρεθεί αν υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 5), (1, -4), (3, 0)$.
2. Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 3 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0), (0, 2), (1, 2), (2, 6)$.
3. Να βρεθεί μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 4 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0), (0, 2), (1, 2), (2, 6)$.

1.6 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία

Το πρόβλημα της επίλυσης γραμμικών συστημάτων απασχόλησε τους μαθηματικούς από τα αρχαία χρόνια. Έχουν βρεθεί αρχαιολογικά ευρήματα που δείχνουν ότι ήδη από το 300 π.Χ. οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι έλυναν προβλήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Είναι επίσης γνωστό ότι οι αρχαίοι Κινέζοι, μεταξύ του 200 π.Χ. και 100 π.Χ., εισήγαγαν την έννοια των πινάκων για την επίλυση τέτοιων συστημάτων. Στο βιβλίο «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης», που χρονολογείται στη Δυναστεία Han (206 π.Χ. έως 220 μ.Χ.), αναλύεται με παραδείγματα η μέθοδος που είχαν εφεύρει και που είναι πολύ κοντά στον αλγόριθμο του Gauss. Όμως τα επιτεύγματα των αρχαίων Κινέζων δεν έφτασαν στη Δύση και η πρόοδος στη Γραμμική Άλγεβρα ήταν αργή και αποσπασματική. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη συνεισφορά του Ιταλού μαθηματικού Cardano (1501-1576) που στο βιβλίο του «Ars Magna» (το Μεγάλο Έργο), το 1545, ασχολήθηκε με τη συστηματική επίλυση εξισώσεων με δύο αγνώστους. Σημαντική επίσης υπήρξε η συνεισφορά του Ελβετού μαθηματικού Cramer (1704-1755), ο οποίος, το 1750, στην προσπάθειά να βρει την εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από κάποια σημεία, δημοσίευσε τον κανόνα που σήμερα είναι γνωστός με το όνομά του, βλ. Ενότητα 2.3. Τη μεγάλη ώθηση, προς τα εμπρός, έδωσε το έργο του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Gauss (1777-1855). Στις αρχές του 1801 ένας μυστήριος αστεροειδής παρατηρήθηκε από τον Ιταλό μοναχό Piazzi για 41 ημέρες και μετά εξαφανίστηκε. Έτσι, ένα από τα μεγάλα προβλήματα, που προσπαθούσαν να λύσουν οι αστρονόμοι της εποχής, ήταν να βρουν την τροχιά του αστεροειδή στον αχανή ουρανό. Ο νεαρός Gauss χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο του και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, την άνοιξη του 1801, για να λύσει το μυστήριο της τροχιάς του αστεροειδούς, ο οποίος βρέθηκε και πάλι στο τέλος του έτους πολύ κοντά στις συντεταγμένες που προέβλεψε ο Gauss. Ο Gauss περιέγραψε κάποιες από τις ιδέες του στο βιβλίο που δημοσίευσε το 1809. Η εργασία του θεωρείται από τις πρώτες εργασίες που ασχολούνται με την επίλυση γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας τεχνικές της μοντέρνας Γραμμικής Άλγεβρας. Για περισσότερα ιστορικά στοιχεία παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [3]. Για μία αναλυτική περιγραφή του τρόπου με τον οποίον ο Gauss ανακάλυψε την τροχιά του αστεροειδούς παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [6].

Βιβλιογραφία

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley and Sons, 1994.
2. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Β. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 2006.
3. V. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
4. K. Nichololson, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.
5. Th. Shiffrin and M. R.Adams, *Linear Algebra, a Geometric Approach*, W. H. Freeman and Company, 2002.
6. J. Tennenbaum and B. Director, *How Gauss Determined The Orbit of Ceres*, Schiller Institute, 2006.

Κεφάλαιο 2

Πίνακες

Η χρήση των πινάκων αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο της Γραμμικής Άλγεβρας με ποικίλες εφαρμογές. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τους πίνακες ως αυτοτελή αντικείμενα και θα αναπτύξουμε τις ιδιότητές τους. Θα εξετάσουμε τη συνάρτηση της ορίζουσας και θα εφαρμόσουμε τη μελέτη μας για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

2.1 Πράξεις Πινάκων

Όπως στο Κεφάλαιο 1, με \mathbb{k} συμβολίζουμε είτε το σώμα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , είτε το σώμα των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} . Για συντομία, συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$ το σύνολο των $m \times n$ -πινάκων με συντελεστές από το \mathbb{k} . Όταν $n = m$ γράφουμε $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ για αυτό το σύνολο και ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ λέγεται **τετραγωνικός** (square). Οι πίνακες οριοθετούνται με αγκύλες ή παρενθέσεις. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$. Η i γραμμή του A αντιστοιχεί σε έναν $1 \times n$ πίνακα, που συνήθως συμβολίζουμε με Γ_i . Η j στήλη του A αντιστοιχεί σε έναν $m \times 1$ πίνακα, που συνήθως συμβολίζουμε με Σ_j . Δηλαδή,

$$\Gamma_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}], \quad \Sigma_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Δύο πίνακες (a_{ij}) και (β_{ij}) του $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ λέγονται **ίσοι** (equal) αν $a_{ij} = \beta_{ij}$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$.

Παραδείγματα 2.1.1.

1. Έστω ο $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τα έξι στοιχεία του A σχηματίζουν τρεις στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και δύο γραμμές

$$\Gamma_1 = [1 \quad 1 \quad -1] \quad \text{και} \quad \Gamma_2 = [0 \quad 2 \quad 4].$$

Το στοιχείο a_{12} είναι το 1, ενώ το στοιχείο a_{21} είναι το 0.

2. Ο πίνακας [3] είναι ένας 1×1 -πίνακας.
3. Οι πίνακες περιγράφουν με συστηματικό τρόπο ένα σύνολο δεδομένων. Ο επόμενος πίνακας αναφέρεται στην κατανομή των εγγεγραμμένων φοιτητών του μαθήματος της Γραμμικής Άλγεβρας το έτος 2013-2014. Οι γραμμές αντιστοιχούν στα γένη (αρσενικό και θυλυκό), ενώ οι στήλες αντιστοιχούν στους φοιτητές/φοιτήτριες ανά έτος (πρωτοετείς, δευτεροετείς κοκ).

$$\begin{bmatrix} 40 & 16 & 10 & 12 & 6 & 3 & 3 & 5 \\ 53 & 11 & 9 & 5 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 15 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 22 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αναφέρεται στο ίδιο σύνολο και δίνει το πλήθος των φοιτητών και φοιτητριών που πέρασαν το μάθημα το ίδιο ακαδημαϊκό έτος.

4. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε κάθε γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί ένας επαυξημένος πίνακας. Έτσι, το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

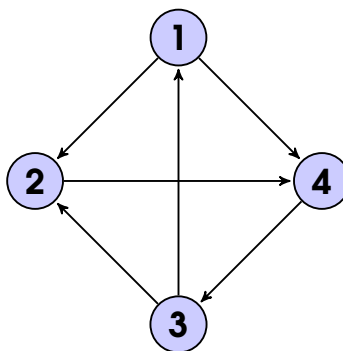
μπορεί να περιγραφεί από τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

5. Ένα **απλό κατευθυνόμενο γράφημα** (simple directed graph) είναι ένα σύνολο κορυφών και ακμών μεταξύ των κορυφών, με φορά που καθορίζεται από βέλη, έτσι ώστε μεταξύ δύο κορυφών να υπάρχει το πολύ μία ακμή. Σε κάθε διατεταγμένο γράφημα με n κορυφές μπορούμε να αντιστοιχήσουμε έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα, $A = (a_{ij})$, όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν υπάρχει βέλος από την κορυφή } i \text{ στην κορυφή } j \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ο πίνακας A ονομάζεται **πίνακας γειτνίασης** (adjacency matrix). Έτσι, το γράφημα



Σχήμα 2.1: Κατευθυνόμενο γράφημα

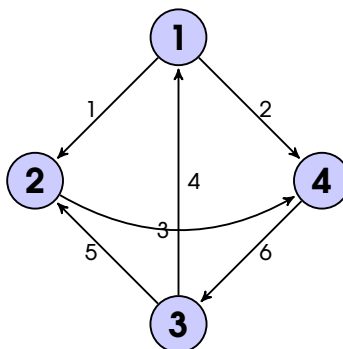
έχει πίνακα γειτνίασης τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει n κορυφές και m ακμές, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $m \times n$ **πίνακα πρόσπτωσης** (incidence matrix) του γραφήματος, $A = (a_{ij})$, όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{αν η ακμή } i \text{ ξεκινά στην κορυφή } j \\ +1, & \text{αν η ακμή } i \text{ καταλήγει στην κορυφή } j \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θα γράψουμε τον πίνακα πρόσπτωσης για το προηγούμενο γράφημα, αφού πρώτα αριθμήσουμε τις ακμές του.



Σχήμα 2.2: Κατευθυνόμενο γράφημα με αριθμημένες ακμές

Ο πίνακα πρόσπτωσης είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Ο **μηδενικός** πίνακας στο $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ είναι ο $m \times n$ πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι το 0 και συμβολίζεται με $\mathbf{0}$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε ότι η χρήση των πινάκων συστηματοποιεί τη γραφή κάποιων δεδομένων. Η χρησιμότητα, όμως, των πινάκων βρίσκεται στο γεγονός ότι πολλά επιστημονικά προβλήματα εκφράζονται με πίνακες και έτσι μπορούν να επιλυθούν με μαθηματικές μεθόδους, είτε αυτά προέρχονται από την επιστήμη των μαθηματικών είτε όχι. Στη συνέχεια θα ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Ορισμός 2.1.2. Αν οι $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ είναι στοιχεία του $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$, τότε το **άθροισμα** (sum) των A , B ορίζεται ως εξής:

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}).$$

Παραδείγματα 2.1.3.

$$1. \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Το άθροισμα των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

δεν ορίζεται αφού οι πίνακες έχουν διαφορετικά μεγέθη.

Είναι φανερό ότι η πρόσθεση που ορίσαμε είναι στενά συνδεδεμένη με την πρόσθεση του \mathbb{k} . Αν $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$, συμβολίζουμε με $-A$ τον πίνακα που έχει στη θέση (i, j) το στοιχείο $-\alpha_{ij}$, δηλ.

$$-A = (-\alpha_{ij}).$$

Ο πίνακας $-A$ λέγεται **αντίθετος** (opposite) πίνακας του A . Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Πρόταση 2.1.4. Έστω οι A, B, Γ πίνακες του $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$. Τότε:

- $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **προσεταιριστική ιδιότητα** (associativity) της πρόσθεσης.
- $A + \mathbf{0} = A$.
- $A + (-A) = \mathbf{0} = (-A) + A$.
- $A + B = B + A$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **αντιμεταθετική ιδιότητα** (commutativity) της πρόσθεσης.

Συμπεραίνουμε ότι, όσο αφορά την πράξη της πρόσθεσης πινάκων, το σύνολο $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ έχει τις ιδιότητες που έχουν τα συνήθη σύνολα αριθμών. Ορίζουμε τώρα τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Ορισμός 2.1.5. Έστω οι πίνακες $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ και $B \in \mathcal{M}_{m \times \kappa}(\mathbb{k})$. Το **γινόμενο** (product) των πινάκων A και B συμβολίζεται με $A \cdot B$ ή απλά AB και ορίζεται να είναι ο $n \times \kappa$ πίνακας που στην i γραμμή και j στήλη έχει το στοιχείο

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{im}\beta_{mj} = \sum_{\kappa=1}^m \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}.$$

Σχηματικά

$$[\gamma_{ij}] \leftrightarrow [\alpha_{i1} \ \alpha_{i2} \ \cdots \ \alpha_{in}] \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{mj} \end{bmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός δεν είναι απαραίτητα αντιμεταθετικός. Έτσι, η σειρά με την οποία γράφουμε τους όρους του γινομένου έχει μεγάλη σημασία. Για να έχει νόημα το γινόμενο $A B$, θα πρέπει ο αριθμός στηλών του πίνακα A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B .

Παραδείγματα 2.1.6.

$$1. [1 \ 2 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 4.$$

$$2. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ 1 \ 0 \ 4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Για να έχει νόημα το γινόμενο $A \cdot A$ θα πρέπει ο A να είναι τετραγωνικός πίνακας. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε με A^2 το γινόμενο $A \cdot A$. Γενικότερα ορίζουμε τη δύναμη A^m για κάθε φυσικό αριθμό $m > 1$ να είναι το γινόμενο $A \cdot A^{m-1}$.

5. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι τα γραμμικά συστήματα

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n &= \beta_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

γράφονται εν συντομία ως $AX = B$, όπου $A = (\alpha_{ij})$ είναι ο πίνακας των συντελεστών και B ο πίνακας των σταθερών. Ο συμβολισμός αυτός είναι συμβατός με τον ορισμό του γινομένου των πινάκων, αρκεί να θεωρήσουμε ως X τον πίνακα-στήλη των αγνώστων. Το παράδειγμα που ακολουθεί θα διασαφηνίσει αυτόν τον ισχυρισμό.

Παράδειγμα 2.1.7. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Το γινόμενο AX δίνει τον πίνακα

$$AX = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

και η ισότητα $AX = B$ μας δίνει τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες αυτοί είναι ίσοι αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Η **κύρια διαγώνιος** (main diagonal) ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής a_{ii} . Συμβολίζουμε με I_n τον πίνακα του $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ που έχει όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του ίσα με 1, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι μηδέν. Ο πίνακας I_n λέγεται **μοναδιαίος** (identity matrix) $n \times n$ -πίνακας γιατί όπως θα δούμε παίζει τον ρόλο της μονάδας στον πολλαπλασιασμό των πινάκων. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας.

Η επόμενη πρόταση συγκεντρώνει τις βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, που ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επιβεβαιώσει.

Πρόταση 2.1.8. Έστω οι πίνακες $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{k})$, $\Gamma \in \mathcal{M}_{k \times s}(\mathbb{k})$. Τότε:

- i)** $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **προσεταιριστική ιδιότητα** (associativity) του πολλαπλασιασμού.
- ii)** $AI_m = A = I_n A = A$.
- iii)** $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **δεξιά επιμεριστική ιδιότητα** (right distributivity) του πολλαπλασιασμού.
- iv)** $(A + B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **αριστερά επιμεριστική ιδιότητα** (left distributivity) του πολλαπλασιασμού.

Όπως είδαμε στην Πρόταση 2.1.4, η πρόσθεση των πινάκων έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τον πολλαπλασιασμό των πινάκων. Τι εννοούμε: υπάρχουν πίνακες τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ έτσι ώστε

$$AB \neq BA. \tag{2.1.8.1}$$

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι είναι δυνατόν το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων να είναι ο μηδενικός πίνακας, βλ. προηγούμενο παράδειγμα. Ως προς τον πολλαπλασιασμό, λοιπόν, το σύνολο $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ διαφέρει ουσιαστικά από τα συνήθη σύνολα αριθμών.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε το **βαθμωτό γινόμενο** (scalar product) ενός στοιχείου $\kappa \in \mathbb{k}$ με έναν πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$. Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με κA και είναι ο πίνακας $(\kappa \alpha_{ij})$. Έτσι, ο πίνακας κA προκύπτει από τον πίνακα A , αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A επί το κ . Είναι εύκολο να αποδείξει ο αναγνώστης την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.1.9. Έστω A, B δύο πίνακες του $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$, $C \in \mathcal{M}_{n \times l}(\mathbb{k})$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$. Τότε:

- i)** $\kappa(A + B) = \kappa A + \kappa B$.
- ii)** $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$.
- iii)** $(\kappa \lambda)A = \kappa(\lambda A)$.
- iv)** $\kappa(AC) = (\kappa A)C = A(\kappa C)$.

Ο πίνακας που προκύπτει από έναν πίνακα A , θέτοντας ως γραμμές του νέου πίνακα τις στήλες του A , λέγεται **ανάστροφος** (transpose) του A και συμβολίζεται με A^T . Έτσι αν $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(K)$, τότε $A^T = (\beta_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$, όπου $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Τέλος, αν $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, τότε ο **συζυγής** (conjugate) του A είναι ο πίνακας $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$.

Παραδείγματα 2.1.10.

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω

$$X = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C}), \text{ όπου } a_j, b_j \in \mathbb{R}, \text{ για } 1 \leq j \leq n \text{ και } X \neq \mathbf{0}.$$

Τότε

$$X^T \bar{X} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$

και το μοναδικό του στοιχείο είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Πράγματι

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{bmatrix}$$

και

$$X^T \bar{X} = [(a_1^2 + b_1^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2)].$$

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης προκύπτει εύκολα με βάση τους ορισμούς.

Πρόταση 2.1.11. Έστω οι πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε:

i) $(AB)^T = B^T A^T$.

ii) $(A^T)^T = A$.

iii) $(\kappa A)^T = \kappa A^T$, $\kappa \in K$.

Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ λέγεται **συμμετρικός** (symmetric) αν $A = A^T$, δηλ. αν $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, ενώ ο A λέγεται **αντισυμμετρικός** (antisymmetric) αν $A = -A^T$, δηλ. αν $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο πίνακας A λέγεται **διαγώνιος** (diagonal) αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται επάνω και κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. αν $\alpha_{ij} = 0$, για $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **άνω τριγωνικός** (upper triangular) αν όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. αν $\alpha_{ij} = 0$, για $i > j$, $1 \leq i, j \leq n$. Ο A λέγεται **κάτω τριγωνικός** (lower triangular) αν όλα τα στοιχεία επάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ. αν $\alpha_{ij} = 0$, για $i < j$, $1 \leq i, j \leq n$. Το **ίχνος** (trace) ενός πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι το άθροισμα των τιμών της κυρίας διαγωνίου του A και συμβολίζεται με $\text{Tr } A$:

$$\text{Tr}(A) := \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}.$$

Παραδείγματα 2.1.12.

1. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

είναι συμμετρικοί. Τα ίχνη των πινάκων είναι $\text{Tr}(A_1) = 4$, $\text{Tr}(A_2) = 7$.

2. Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικοί και έχουν ίχνος ίσο με το 0.

3. Ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

δηλ. ο πίνακας στα αριστερά είναι ίσος με το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Ο αναγνώστης ζητείται στις ασκήσεις να δείξει ότι *κάθε* τετραγωνικός πίνακας γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

4. $\text{Tr}(\mathbf{0}) = 0$, ενώ $\text{Tr}(I_n) = n$.

5. Αν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, τότε ο $A^T A$ είναι συμμετρικός πίνακας, δηλ. ο $A^T A$ είναι ίσος με τον ανάστροφό του, αφού από τις ιδιότητες του γινομένου, ισχύει ότι:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A.$$

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με μία παρατήρηση που συνδέει τις πράξεις γραμμών που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφαλαίο με τον πολλαπλασιασμό των πινάκων. Έστω ότι $E_{i \leftrightarrow j}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει αν στον I_n αντιμεταθέσουμε την i με την j γραμμή, δηλ.

$$I_n \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j}.$$

Ο πίνακας $E_{i \leftrightarrow j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και ο πολλαπλασιασμός $E_{i \leftrightarrow j} A$ είναι επιτρεπτός, για κάθε $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$. Έστω, λοιπόν, ότι ο $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας $E_{i \leftrightarrow j} A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ προκύπτει αν στον A αντιμεταθέσουμε την i με την j γραμμή, δηλ.

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j} A.$$

Με άλλα λόγια, η στοιχειώδης πράξη της αντιμετάθεσης δύο γραμμών του A αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό (από τα αριστερά) του A με τον πίνακα $E_{i \leftrightarrow j}$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι αυτό ισχύει για κάθε στοιχειώδη πράξη γραμμών.

Παραδείγματα 2.1.13.

$$E_{1 \leftrightarrow 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ασκήσεις Ενότητας 2.1

1. Να γίνουν οι εξής πράξεις:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right),$

(β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^3 . Να παρατηρήσετε ότι η κύρια διαγώνιος του A^3 έχει όλα τα στοιχεία της ίσα με μηδέν.

3. Να περιγράψετε όλους τους 2×2 πίνακες πίνακες που αντιμεταθέτονται με τους εξής πίνακες:

$$(α) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(β) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$(γ) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Να γράψετε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

5. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων στο $\mathcal{M}_m(\mathbb{k})$ είναι κάτω τριγωνικός πίνακας. Στη συνέχεια, με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, να επαληθεύσετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n , το γινόμενο n κάτω τριγωνικών πινάκων στο $\mathcal{M}_m(\mathbb{k})$ είναι κάτω τριγωνικός πίνακας.

2.2 Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Η έννοια των αντιστρέψιμων πινάκων είναι κεντρική στη μελέτη μας.

Ορισμός 2.2.1. Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{k})$ λέγεται **αντιστρέψιμος** (invertible) πίνακας, αν υπάρχει πίνακας B έτσι ώστε

$$AB = I_n = BA.$$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας B λέγεται ο **αντίστροφος** (inverse) πίνακας του A , και συμβολίζεται με A^{-1} .

Σύμφωνα με τον ορισμό, για να είναι ο $A \in M_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος, θα πρέπει να υπάρχει ένας πίνακας B που να ικανοποιεί ταυτόχρονα δύο συνθήκες: $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Θα δούμε αργότερα ότι αν $AB = I_n$ τότε $BA = I_n$ και αντίστροφα. Έτσι, για να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A (αν υπάρχει), αρκεί να βρεθεί πίνακας B που να πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά (ή από τα δεξιά) με τον A και να δίνει το μοναδιαίο πίνακα. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη γνώση άτυπα στα επόμενα παραδείγματα, αφού ακόμα δεν την έχουμε αποδείξει.

Παραδείγματα 2.2.2.

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει αντίστροφο τον $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι αν B είναι ο αντίστροφος του A τότε $AB = I_n$. Όμως, στο γινόμενο AB η τελευταία γραμμή είναι μηδέν και άρα είναι αδύνατον $AB = I_n$.

3. Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με μηδενική τη γραμμή i . Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα B η γραμμή i του AB θα είναι μηδέν. Είναι, λοιπόν, αδύνατον να βρεθεί πίνακας B έτσι ώστε $AB = I_n$. Ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.
4. Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με μηδενική τη στήλη j . Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα B η στήλη j του BA για κάθε πίνακα B θα είναι μηδέν. Είναι, λοιπόν, αδύνατον να βρεθεί πίνακας B έτσι ώστε $BA = I_n$. Ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.
5. Ο μηδενικός τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{0}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.
6. Ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος: $I_n I_n = I_n$, άρα $I_n^{-1} = I_n$.

7. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

και $ad - bc \neq 0$. Τότε αν

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι $AB = BA = I_2$ και άρα $B = A^{-1}$. Ο αριθμός $ad - bc$ λέγεται **ορίζουσα** (determinant) του $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{k})$ και συμβολίζεται με $\det(A)$.

8. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

έναν διαγώνιο πίνακα με $\alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Τότε εύκολα μπορεί να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

9. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ότι $B = A^{-1}$. Τότε ο B είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $A = B^{-1}$.
10. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.$$

Απόδειξη. Για $n = 2$, επιβεβαιώνουμε ότι πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα A^2 με τον πίνακα $(A^{-1})^2$, προκύπτει ο μοναδιαίος πίνακας I_2 :

$$\begin{aligned} A^2(A^{-1})^2 &= (A A)(A^{-1}A^{-1}) = A(A A^{-1})A^{-1} = A I_2 A^{-1} = \\ &A(I_2 A^{-1}) = A A^{-1} = I_2. \end{aligned}$$

Για γενικό $n \in \mathbb{N}$, ο ισχυρισμός ότι ισχύει η ισότητα $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ αποδεικνύεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση για την αρχική τιμή του n (επαγωγικό βήμα) και υποθέτοντας ότι η πρόταση είναι αληθής για $n = k$ (υπόθεση της επαγωγής), θα πρέπει στη συνέχεια να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$.

- Για το επαγωγικό βήμα, όταν $n = 1$, η πρόταση είναι προφανώς αληθής, αφού $(A^1)^{-1} = A^{-1}$ και $(A^{-1})^1 = A^{-1}$.
- Θα υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n = k$, δηλ. ότι $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την πρόταση για $n = k + 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} A^{k+1}(A^{-1})^{k+1} &= (AA^k)((A^{-1})^k A^{-1}) = A(A^k(A^{-1})^k)A^{-1} = \\ &= A I_n A^{-1} = A(I_n A^{-1}) = A A^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε ότι το πέρασμα από $n = k$ στο $n = k + 1$ εμπεριέχει τα ίδια βήματα όπως και η απόδειξη της πρότασης για $n = 2$. Αυτό ισχύει για πολλές από τις αποδείξεις που χρησιμοποιούν τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε θέτουμε $A^0 = I_n$ και για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A^{-n} := (A^{-1})^n.$$

Έτσι, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, η δύναμη A^m έχει οριστεί για κάθε ακέραιο m . Τονίζουμε ότι είναι ιδιαίτερα άκομφο να γράφει κανείς $1/A$ εννοώντας A^{-1} και ότι κλάσματα με παρανομαστές συνδυασμούς πινάκων θα πρέπει να αποφεύγονται.

Πρόταση 2.2.3. *Αν οι πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το γινόμενο τους είναι αντιστρέψιμος πίνακας και*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα προκύπτει ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Όμοια $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Άρα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Η προηγούμενη πρόταση γενικεύεται εύκολα όταν έχουμε περισσότερους από δύο αντιστρέψιμους πίνακες. Έτσι, αν οι πίνακες A_1, A_2, \dots, A_s του $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε:

$$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{-1} = (A_s)^{-1} (A_{s-1})^{-1} \cdots (A_1)^{-1}.$$

Θα ορίσουμε τώρα έναν *στοιχειώδη πίνακα* για κάθε μία από τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών.

Ορισμός 2.2.4. *Υπάρχουν τρεις τύποι στοιχειωδών (elementary) πινάκων:*

- Αν $i \neq j$ και $a \in \mathbb{k}$, τότε ο $E_{i+a,j}$, είναι ο στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από τον I_n αν αντικαταστήσουμε την i γραμμή του I_n με τη γραμμή $\Gamma_i + a\Gamma_j$, δηλ.

$$I_n \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + a\Gamma_j} E_{i+a,j}.$$

- Ο $E_{i \leftrightarrow j}$ είναι ο στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από τον I_n αν αντιμεταθέσουμε την i με την j γραμμή, δηλ.

$$I_n \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j}.$$

- Αν $b \in \mathbb{k}$ και είναι διάφορο του μηδενός, τότε ο $E_{b \cdot i}$ είναι ο στοιχειώδης πίνακας και προκύπτει από τον I_n αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής με ένα στοιχείο b , δηλ.

$$I_n \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow b\Gamma_i} E_{b \cdot i}.$$

Στα επόμενα παραδείγματα θα υπολογίσουμε διάφορους στοιχειώδεις πίνακες.

Παραδείγματα 2.2.5.

1. Στον $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ οι στοιχειώδεις πίνακες είναι οι εξής:

$$E_{1+a,2} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{2+a,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, E_{1 \leftrightarrow 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{b \cdot 1} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{b \cdot 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $b \neq 0$.

2. Στον $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ έχουμε

$$E_{1+a,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{2 \leftrightarrow 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{b \cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Ο αναγνώστης καλείται να βρει τον αντίστροφο για τους τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων, βλ. Άσκηση 2.2.1. Εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.2.6. Αν $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$, τότε:

- i) Ο πίνακας $E_{i+a,j} A$ προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την γραμμή Γ_i με την $\Gamma_i + a\Gamma_j$, δηλ.

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + a\Gamma_j} E_{i+a,j} A.$$

- ii) Ο πίνακας $E_{i \leftrightarrow j} A$ προκύπτει από τον A αν αντιμεταθέσουμε την i -γραμμή με την j -γραμμή, δηλ.

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j} A.$$

iii) Ο πίνακας $E_{b,i} A$ προκύπτει από τον A αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής επί $b \in \mathbb{k}$, δηλ.

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow b\Gamma_i} E_{b,i} A.$$

Παραδείγματα 2.2.7.

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $A \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} B$ και $B = E_{1 \leftrightarrow 2} A$.

2. Θα φέρουμε τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_2} \\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} I_2.$$

Έπεται ότι

- $A_1 = E_{1 \leftrightarrow 2} A$,
- $A_2 = E_{\frac{1}{2},1} A_1 = E_{\frac{1}{2},1} E_{1 \leftrightarrow 2} A$,
- $A_3 = E_{\frac{1}{3},2} A_2 = E_{\frac{1}{3},2} E_{\frac{1}{2},1} E_{1 \leftrightarrow 2} A$,
- $I_2 = E_{1-2,2} A_3 = E_{1-2,2} E_{\frac{1}{3},2} E_{\frac{1}{2},1} E_{1 \leftrightarrow 2} A$.

Σημειώνουμε την επόμενη παρατήρηση για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή R ενός πίνακα A . Η απόδειξή της είναι συνέπεια της Πρότασης 2.2.6 και του αλγορίθμου του Gauss για την εύρεση της ελαττωμένης κλιμακωτής μορφής γραμμών ενός πίνακα A .

Πρόταση 2.2.8. Έστω R η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών ενός πίνακα $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$. Υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες E_1, \dots, E_n έτσι ώστε

$$R = E_n \cdots E_1 A.$$

Έστω B το γινόμενο των E_1, \dots, E_n της Πρότασης 2.2.8. Αν η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο μοναδιαίος πίνακας, τότε από την Πρόταση 2.2.8, προκύπτει ότι

$$I_n = BA.$$

Έτσι, αν η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο I_n , θα δείξουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας $B = E_1 \cdots E_n$, όπου E_1, \dots, E_n είναι οι στοιχειώδεις πίνακες της Πρότασης 2.2.8. Ήδη γνωρίζουμε ότι $BA = I_n$. Μένει να δείξουμε ότι $AB = I_n$.

Παράδειγμα 2.2.9. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε έναν πίνακα $B = (b_{ij})$ έτσι ώστε $AB = I_2$. Θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε τις επόμενες 4 εξισώσεις:

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= 1 \\ 3b_{11} + 4b_{21} &= 0 \\ b_{12} + 2b_{22} &= 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για να λύσουμε αυτό το σύστημα, αρκεί να λύσουμε τα εξής δύο γραμμικά συστήματα, για τα οποία ο (κοινός) πίνακας συντελεστών είναι A .

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= 1 & b_{12} + 2b_{22} &= 0 \\ 3b_{11} + 4b_{21} &= 0 & \text{και} & 3b_{12} + 4b_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο (κατά δύο στήλες) πίνακα και με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right].$$

Προκύπτει ότι $(b_{11}, b_{21}) = (-2, 3/2)$ ενώ $(b_{12}, b_{22}) = (1, -1/2)$. Επομένως αν

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

τότε $AB = I_2$. Σημειώνουμε ότι ο πίνακας B βρέθηκε φέρνοντας τον πίνακα $[A \mid I_2]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Gauss, δηλ.

$$[A \mid I_2] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [I_2 \mid B].$$

Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που εφαρμόσαμε στον A μας έδωσαν το μοναδιαίο πίνακα:

$$I_2 = E_{1-2 \cdot 2} E_{-\frac{1}{2} \cdot 2} E_{2-3 \cdot 1} A,$$

ενώ οι ίδιες πράξεις γραμμών εφαρμόστηκαν στον I_2 για να καταλήξουμε στον B . Έτσι,

$$B = E_{1-2 \cdot 2} E_{-\frac{1}{2} \cdot 2} E_{2-3 \cdot 1} I_2 = E_{1-2 \cdot 2} E_{-\frac{1}{2} \cdot 2} E_{2-3 \cdot 1}.$$

Θα γενικεύσουμε τις παρατηρήσεις που κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και ότι θέλουμε να βρούμε έναν πίνακα $B = (b_{ij})$, έτσι ώστε $AB = I_n$. Αφού ο πίνακας $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ έχει n^2 στοιχεία, η ισότητα $AB = I_n$, δίνει n^2 (το πλήθος) γραμμικές εξισώσεις. Θέλουμε, λοιπόν, να λύσουμε n^2 γραμμικές εξισώσεις με n^2 αγνώστους. Μπορούμε να οργανώσουμε αυτές τις εξισώσεις σε n γραμμικά συστήματα (με n εξισώσεις και n αγνώστους), τα οποία ονομάζουμε συστήματα της εξίσωσης $AB = I_n$. Ο κοινός πίνακας των συντελεστών σε αυτά τα συστήματα είναι ο πίνακας A . Μπορεί κανείς να επιλύσει τα συστήματα αυτά *ταυτόχρονα*. Ο επαυξημένος πίνακας είναι ίσος με τον πίνακα $[A \mid I_n]$. Ανάλογα με την βαθμίδα του πίνακα A , υπάρχουν δύο περιπτώσεις για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $[A \mid I_n]$.

- Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε όλα τα γραμμικά συστήματα της εξίσωσης $AB = I_n$ είναι συμβατά και έχουν μοναδικές λύσεις. Οι λύσεις αυτές προκύπτουν από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[A \mid I_n]$. Φέρνουμε τον πίνακα $[A \mid I_n]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Ο πίνακας B προκύπτει στο τελευταίο βήμα:

$$[A \mid I_n] \rightarrow \cdots \rightarrow [I_n \mid B].$$

Αν E_1, \dots, E_n είναι οι στοιχειώδεις πίνακες που φέρνουν τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών, τότε

$$E_n \cdots E_1 A = I_n. \quad (2.2.9.1)$$

Επομένως

$$[A \mid I_n] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [I_n \mid E_n \cdots E_1].$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας B με την ιδιότητα $AB = I_n$ είναι ο πίνακας $E_n \cdots E_1$. Όμως, από τη Σχέση (2.2.9.3) προκύπτει ότι $BA = I_n$. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = E_n \cdots E_1$$

όπου E_1, \dots, E_n είναι οι στοιχειώδεις πίνακες που φέρνουν τον πίνακα A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

- Αν $\text{rank}(A) < n$, τότε

$$[A \mid I_n] \rightarrow \cdots \rightarrow [R \mid C], \quad (2.2.9.2)$$

όπου R είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A . Αφού $R \neq I_n$, η τελευταία γραμμή του R είναι μηδενική. Θα δούμε ότι η τελευταία γραμμή του C δεν είναι μηδενική και επομένως τουλάχιστον ένα από τα γραμμικά συστήματα της εξίσωσης $AB = I_n$ δεν είναι συμβατό. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.8, έχουμε ότι

$$E_n \cdots E_2 E_1 A = R, \quad (2.2.9.3)$$

όπου E_1, \dots, E_n στοιχειώδεις πίνακες. Άρα

$$[A \mid I_n] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [R \mid E_n \cdots E_1].$$

Δηλαδή ο πίνακας C της Σχέσης (2.2.9.2) είναι το γινόμενο $E_n \cdots E_1$. Αφού ο C είναι το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι ο C είναι αντιστρέψιμος πίνακας, βλ. Πρόταση 2.2.3. Επομένως ο C δεν μπορεί να έχει μία μηδενική γραμμή, βλ. Παράδειγμα 2.2.2. Αφού ο πίνακας R έχει μηδενική την τελευταία του γραμμή, έπεται ότι τουλάχιστον ένα από τα συστήματα της εξίσωσης $AB = I_n$ δεν είναι συμβατό. Επομένως όταν $\text{rank}(A) < n$, δεν υπάρχει πίνακας B έτσι ώστε $AB = I_n$ και ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Αποδείξαμε λοιπόν την εξής πρόταση:

Θεώρημα 2.2.10. Έστω οι πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

- i)** Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = n$.
- ii)** Αν $AB = I_n$ (ή $BA = I_n$), τότε οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και $B = A^{-1}$.

Ο ακόλουθος αλγόριθμος κωδικοποιεί τη διαδικασία εύρεσης αντιστρόφου:

Αλγόριθμος 2.2.1 Αλγόριθμος εύρεσης αντιστρόφου

Είσοδος: Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A .

Έξοδος: Ο αντίστροφος του A , αν υπάρχει.

Βήμα 1 Παραθέτουμε δεξιά του A τον I_n και σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$[A \mid I_n].$$

• **Βήμα 2** Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του Gauss και φέρνουμε τον $[A \mid I_n]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών $[R \mid B]$.

• **Βήμα 3** Αν $R = I_n$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$. Αν $R \neq I_n$, τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο (2.2.1) και το Θεώρημα 2.2.10 στα επόμενα παραδείγματα:

Παραδείγματα 2.2.11.

1. Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid I_n]$ και τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Επομένως

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid I_n]$. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών βρίσκουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι $\text{rank } A < 3$ και άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

3. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(K)$ και $A^4 + 3A^2 + A - 4I_n = 0$. Τότε

$$A^4 + 3A^2 + A = 4I_n \Rightarrow A \left(\frac{1}{4}(A^3 + 3A + I_n) \right) = I_n.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.10, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^3 + 3A + I_n)$.

Για τον ανάστροφο πίνακα του A , έχουμε την επόμενη σημαντική πρόταση:

Πρόταση 2.2.12. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Απόδειξη. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A A^{-1} = I_n \Leftrightarrow (A A^{-1})^T = I_n^T \Leftrightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n.$$

Άρα A^T είναι αντιστρέψιμος και

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Αντίστροφα, αν A^T είναι αντιστρέψιμος, τότε $A = (A^T)^T$ είναι αντιστρέψιμος από το προηγούμενο βήμα. \square

Η τελευταία παρατήρηση αυτής της ενότητας αφορά την επίλυση γραμμικών συστημάτων, όταν ο πίνακας των συντελεστών είναι αντιστρέψιμος.

Παρατήρηση 2.2.13. Αν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση, που προκύπτει από το γινόμενο $A^{-1}B$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} AX = B &\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\Rightarrow I_n X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

\square

Η προηγούμενη μέθοδος επίλυσης συστημάτων χρησιμοποιείται πρακτικά μόνο αν ο πίνακας A^{-1} είναι ήδη γνωστός. Συνήθως όμως ο αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για να υπολογιστεί ο A^{-1} είναι μεγάλος και η μέθοδος αυτή είναι χρονοβόρα.

Παράδειγμα 2.2.14. Θα βρούμε τη λύση του συστήματος $AX = B$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στο Παράδειγμα 2.2.11 είδαμε ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

και η μοναδική λύση του συστήματος $AX = B$ είναι $(7, -2, -2)$.

Ασκήσεις Ενότητας 2.2

1. Να βρείτε τον αντίστροφο για τους τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων, (Υπόδειξη: Πρόταση 2.2.6).
2. Να υπολογίσετε τους αντιστροφούς των εξής πινάκων, αν υπάρχουν.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Να βρείτε τις λύσεις των συστημάτων

$$AX_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad AX_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad BX_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad BX_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

όπου A και B είναι οι πίνακες της προηγούμενης άσκησης.

4. Αν $A^2 + 2A - I_n = \mathbf{0}$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του ως άθροισμα δυνάμεων του A . Ομοίως, να βρείτε τον αντίστροφο του $B \in \mathcal{M}_n(K)$, όπου $2B^3 + B^2 - 4B + 3I_n = \mathbf{0}$, και στη συνέχεια τον $(B^T)^{-1}$.

2.3 Ορίζουσες Πινάκων

Όπως θα δούμε στον Ορισμό 2.3.2, η ορίζουσα (determinant) είναι μία συνάρτηση

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k},$$

που σε κάθε πίνακα A του $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο του \mathbb{k} . Η τιμή της ορίζουσας του A συμβολίζεται με $\det A$ ή με $|A|$.

Η ορίζουσα ενός 1×1 πίνακα $[\alpha]$ είναι το α . Δηλ. $\det[\alpha] = \alpha$. Η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα δίνεται από τον τύπο των διαγωνίων

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Για $n > 2$, θα δώσουμε έναν αναδρομικό τύπο για την ορίζουσα με τη βοήθεια των ορίζουσών κάποιων $(n-1) \times (n-1)$ υποπινάκων του A . Οι πίνακες αυτοί, λέγονται **ελάσσονες** (minors) πίνακες του A και συμβολίζονται με A_{ij} . Ο A_{ij} είναι ο υποπίνακας του A που προκύπτει από τον A αν αγνοήσουμε την i γραμμή και την j στήλη του A .

Παραδείγματα 2.3.1.

1. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, τότε $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. □

2. Ο ελάσσων πίνακας $(I_n)_{11}$ του μοναδιαίου $n \times n$ πίνακα είναι ο πίνακας I_{n-1} .

3. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τον $(I_3)_{21}$. Αφού $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, έπεται ότι $(I_3)_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Έστω ο A ένας διαγώνιος $n \times n$ πίνακας. Αν $i \neq j$ τότε A_{ij} έχει (τουλάχιστον) μία μηδενική γραμμή και στήλη.

5. Έστω ο A ένας άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε ο πίνακας A_{11} είναι άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας.

Ορισμός 2.3.2. Η ορίζουσα του $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ δίνεται από τον τύπο

$$\det A = \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_{n1} \det A_{n1}.$$

Παραπάνω είδαμε την ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Όπως θα δούμε, η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογισθεί με αντίστοιχη ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μίας οποιασδήποτε στήλης ή γραμμής.

Παραδείγματα 2.3.3.

1. Αν $A = [2]$, τότε $\det A = 2$.

2. Η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ είναι $\det A = 4$.

3. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 0 = -7. \end{aligned}$$

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\det A = 2 \det A_{11} - 0 \det A_{21} + 0 \det A_{31} - 3 \det A_{41}.$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει λόγος να υπολογίσουμε τους πίνακες A_{21} , A_{31} και τις ορίζουσές τους, αφού θα πολλαπλασιαστούν με το 0. Ο πίνακας A_{41} είναι ο 3×3 πίνακας του Παραδείγματος 3 και είδαμε ότι $\det A_{41} = -7$. Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A_{11} .

$$\begin{aligned} \det A_{11} &= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 - 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\det A = -3 \cdot (-7) = 21.$$

5. Θα δούμε ότι $|I_n| = 1$. Θα γράφουμε I αντί για I_n , για ευκολία συμβολισμού. Έτσι,

$$\det I_n = \det I = 1 \det I_{11} - 0 \det I_{21} + \dots + (-1)^{n+1} 0 \det I_{n1} = \det I_{11}.$$

Όμως $I_{11} = (I_n)_{11} = I_{n-1}$. Έτσι, επαναλαμβάνοντας $n - 1$ φορές βρίσκουμε ότι

$$\det I_n = \det I_{n-1} = \dots = \det[1] = 1.$$

6. Έστω ο A ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + 0 \det A_{21} - \dots + (-1)^{n+1} 0 \det A_{n1} = a_{11} \det A_{11}.$$

Όμως ο A_{11} είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα $n - 1$ φορές βρίσκουμε ότι $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$. Αποδείξαμε λοιπόν το παρακάτω συμπέρασμα.

Αν ο A είναι άνω τριγωνικός πίνακας, τότε η ορίζουσα του A ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του A .

Αναφέρουμε κάποιες από τις ιδιότητες των ορίζουσών που αποδεικνύονται εύκολα από τον ορισμό και που ο αναγνώστης καλείται να βεβαιώσει.

Πρόταση 2.3.4. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε:

i) $\det E_{i+a,j} A = \det A$.

ii) $\det E_{i \leftrightarrow j} A = -\det A$.

iii) $\det E_{b,i} A = b \det A$.

Είναι φανερό ότι οι υπολογισμοί για την ορίζουσα του πίνακα A είναι απλούστεροι όταν ο A έχει πολλά μηδενικά και ιδιαίτερα αν ο A είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών. Η προηγούμενη πρόταση περιγράφει αναλυτικά την επίδραση των στοιχειωδών πράξεων γραμμών στην ορίζουσα. Αν E_1, \dots, E_s είναι στοιχειώδεις πίνακες, τότε εφαρμόζοντας s φορές την Πρόταση 2.3.4 είναι φανερό ότι

$$\det(E_1 E_2 \cdots E_s A) = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_s \det A. \quad (2.3.4.1)$$

Έτσι, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A , πρώτα φέρνουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή γραμμών και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.3.4.

Παραδείγματα 2.3.5.

1. Ας υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι

$$A \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A_3 είναι άνω τριγωνικός. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.3.3.6,

$$\det A_3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.4 και πηγαίνοντας ανάποδα από τον A_3 προς τον A , βλέπουμε ότι

$$\det A_2 = 2 \det A_3, \quad \det A_1 = -\det A_2, \quad \det A = \det A_1,$$

και άρα

$$\det A = -4.$$

2. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και $b \in \mathbb{k}$. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα bA , όταν γνωρίζουμε την ορίζουσα του A . Ο πίνακας bA προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας κάθε γραμμή του A με b . Άρα $\det(bA) = b \cdots b \det A = b^n \det A$ και αποδείξαμε την εξής ιδιότητα.

$$\text{Αν ο } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k}) \text{ και } b \in \mathbb{k}, \text{ τότε } \det(bA) = b^n \det A.$$

3. Αν $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{k})$ και $\det A = 3$, τότε $\det(2A) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

4. Αν $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{k})$ και $\det A = 3$, τότε $\det(2A) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής:

Πρόταση 2.3.6. $\det E_{i+a,j} = 1$, $\det E_{i \leftrightarrow j} = -1$, $\det E_{b,i} = b$.

Απόδειξη. Οι στοιχειώδεις πίνακες προκύπτουν από το μοναδιαίο πίνακα I_n με μία στοιχειώδη πράξη γραμμών. Έχουμε ότι $\det I_n = 1$. Επομένως

$$\det I_n = \det(E_{i+a,j} I_n) \Rightarrow \det I_n = \det E_{i+a,j} \Rightarrow \det E_{i+a,j} = 1.$$

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες ισότητες. □

Σημειώνουμε την επόμενη χρήσιμη παρατήρηση που προκύπτει με βάση όσα είπαμε προηγουμένως.

Παρατήρηση 2.3.7. Έστω R μία κλιμακωτή μορφή γραμμών του A . Τότε υπάρχει $b \in \mathbb{k}$, τέτοιο ώστε $b \neq 0$ και $\det R = b \det A$.

Η επόμενη σημαντική πρόταση δίνει ένα κριτήριο αντιστρεψιμότητας του A .

Πρόταση 2.3.8. Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$. Ισοδύναμα $\det A = 0$ αν και μόνο αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος δηλ. $\det A = 0$ αν και μόνο αν $\text{rank } A < n$.

Απόδειξη. Έστω R η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A . Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $R = I_n$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.3.7, $\det A \neq 0$ αν και μόνο αν $\det R \neq 0$. □

Σημειώνουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.9. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

i) Αν ο A έχει μία μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $\det A = 0$.

ii) Αν μία γραμμή του A είναι πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής του A , τότε $\det A = 0$.

Απόδειξη. i). Έστω ότι μία γραμμή ή στήλη του A είναι μηδενική. Τότε $\text{rank}(A) < n$ και ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Για το ii) παρατηρούμε ότι αν $\Gamma_i = b\Gamma_j$, τότε ο πίνακας $E_{i-b,j}A$ έχει μηδενική την i γραμμή και επομένως $\det A = \det E_{i-b,j}A = 0$. □

Όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.2.10, το γινόμενο AB των τετραγωνικών πινάκων A και B είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν κάθε ένας από τους πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμος. Αυτό, σε συνδυασμό με την σχέση 2.3.4.1 μας δίνει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.3.10. Έστω οι πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε ισχύει ότι:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.3.11. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

$$\text{Αν } \det A \neq 0, \text{ τότε } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Απόδειξη. Αφού $\det A \neq 0$, έπεται ότι υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} του A . Αφού $AA^{-1} = I_n$, από την Πρόταση 2.3.10 έχουμε ότι

$$\det(AA^{-1}) = \det I_n \Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

□

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του A^T . Καταρχήν παρατηρούμε ότι

$$(E_{i+a,j})^T = E_{j+a,i},$$

δηλαδή ο ανάστροφος ενός στοιχειώδη πίνακα αυτού τύπου 1 είναι και πάλι στοιχειώδης πίνακας τύπου 1. Ομοίως

$$(E_{i \leftrightarrow j})^T = E_{i \leftrightarrow j} \text{ και } (E_{b,i})^T = E_{b,i}.$$

Έτσι, προκύπτει η εξής πρόταση.

Πρόταση 2.3.12.

$$\det(E_{i+a,j})^T = 1, \det(E_{i \leftrightarrow j})^T = -1, \det(E_{b,i})^T = b.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.12, ο B είναι αντιστρέψιμος πίνακας αν και μόνο αν ο B^T είναι αντιστρέψιμος. Προκύπτει, λοιπόν, το επόμενο συμπέρασμα.

Πρόταση 2.3.13. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε

$$\det(A^T) = \det A.$$

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι $E_1 \cdots E_s A = R$, όπου R η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του A και E_1, \dots, E_s στοιχειώδεις πίνακες, βλ. Πρόταση 2.2.8. Είδαμε επίσης ότι ο E_i^{-1} είναι στοιχειώδης πίνακας, για $i = 1, \dots, s$. Άρα

$$A = E'_s \cdots E'_1 R \text{ όπου } E'_i = (E_i)^{-1}, \text{ για } i = 1, \dots, s.$$

Από την Πρόταση 2.3.10, έπεται ότι

$$\det A = \det E'_s \cdots \det E'_1 \det R.$$

Υπολογίζοντας τον ανάστροφο του A βλέπουμε ότι

$$A^T = R^T (E'_1)^T \cdots (E'_s)^T$$

και από την Πρόταση 2.3.10, έπεται ότι

$$\det A^T = \det R^T \det(E'_1)^T \cdots \det(E'_s)^T. \quad (2.3.13.1)$$

Παρατηρούμε ότι $\det E'_i = \det(E'_i)^T$. Έτσι, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $R = I_n$ και

$$\det A = \det E'_1 \cdots \det E'_s \cdot 1 = \det A^T.$$

Όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε η τελευταία γραμμή του R είναι μηδενική και $\det R = 0$. Ο πίνακας R^T δεν είναι αντιστρέψιμος, αφού ο R^T έχει μία μηδενική στήλη και $\text{rank}(R^T) < n$. Επομένως $\det R^T = 0$. Άρα από τη Σχέση (2.3.13.1) προκύπτει ότι $\det A^T = 0$ και συνεπώς

$$\det A = \det A^T = 0.$$

□

Παρατηρούμε ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών του A^T είναι στοιχειώδεις πράξεις στηλών του A . Συνεπώς, η ορίζουσα $\det A$ μπορεί να υπολογισθεί με την ανάπτυξη των στοιχείων του A ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη. Αποδείξαμε, λοιπόν, την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.14. Έστω ο πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Τότε, για κάθε στήλη $1 \leq j \leq n$ του A , ισχύει ότι

$$\det A = (-1)^{1+i} \alpha_{1i} \det A_{1i} + (-1)^{2+i} \alpha_{2i} \det A_{2i} + \cdots + (-1)^{n+i} \alpha_{ni} \det A_{ni}.$$

Για κάθε γραμμή $1 \leq i \leq n$ του A , ισχύει ότι

$$\det A = (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} \alpha_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} \alpha_{in} \det A_{in}.$$

Στα επόμενα παραδείγματα θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.3.14.

Παράδειγματα 2.3.15.

1. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αφαιρώντας τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη, προκύπτει ο πίνακας

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και $\det A_1 = \det A$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A_1 κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής, έχουμε ότι

$$\det A = \det A_1 = -3 \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Έτσι κάποιες φορές, ο υπολογισμός της ορίζουσας γίνεται πιο αποτελεσματικά με συνδυασμό στοιχειωδών πράξεων και της Πρότασης 2.3.14.

2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του A αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης του A . Προκύπτει ότι $\det A = \det A_{11}$. Έτσι

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας και πάλι κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης του νέου πίνακα βρίσκουμε ότι

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = -2.$$

Ο πίνακας A είναι πίνακας με στοιχεία πίνακες:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array} \right].$$

Ένας τέτοιος πίνακας λέγεται **μπλοκ** (block) πινάκων. Εύκολα βρίσκει κανείς ότι η ορίζουσα του A είναι ίση με το γινόμενο των ορίζουσών των δύο διαγώνιων υποπινάκων του A .

3. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του μπλοκ πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix},$$

όπου $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{k})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{k})$ και $C \in \mathcal{M}_{r \times (n-r)}(\mathbb{k})$. Αφού

$$A = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

θα υπολογίσουμε πρώτα τις ορίζουσες των

$$\begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Για τον πρώτο πίνακα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για το n και την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, προκύπτει ότι

$$\det \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} = \det D.$$

Για τον δεύτερο πίνακα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για το n και την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής, προκύπτει ότι

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{bmatrix} = \det B.$$

Επομένως αποδείξαμε το εξής συμπέρασμα.

Έστω ότι ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και ότι υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{k})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{k})$ και $C \in \mathcal{M}_{r \times (n-r)}(\mathbb{k})$ τέτοιοι ώστε $A = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$, τότε:

$$\det A = \det B \cdot \det D.$$

4. Έστω A ένας κάτω τριγωνικός πίνακας. Αφού A^T είναι άνω τριγωνικός πίνακας, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.13 και το Παράδειγμα 2.3.3.6, έπεται ότι

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Έστω ο πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ο πίνακας που στη θέση (i, j) έχει το στοιχείο $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$, λέγεται **προσαρτημένος** (adjoint) πίνακας του A και συμβολίζεται με $\text{adj}(A)$. Έτσι,

$$\text{adj}(A) = (a'_{ij})^T \text{ όπου } a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Παράδειγμα 2.3.16. Έστω ότι A είναι ο πίνακας του Παραδείγματος 2.3.15. Τότε

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\det A_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\det A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Έτσι, ο πίνακας $\text{adj}(A)$ προκύπτει από τις προηγούμενες οριζουσες με εναλασσόμενα πρόσημα και είναι ο πίνακας

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.3.14, μπορεί να δείξει κανείς ότι ισχύουν οι εξής δύο τύποι:

Πρόταση 2.3.17. Έστω ο $A = (\alpha_{ij})$ ένας $n \times n$ -πίνακας. Τότε:

i) $\text{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot I_n.$

ii) Αν $\det A \neq 0$, τότε $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A).$

Παραδείγματα 2.3.18.

1. Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A του Παραδείγματος 2.3.15. Όπως είδαμε $\det A = 3$. Επομένως

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ και ότι $\det A = 5$. Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του $\text{adj}(A)$. Αφού $\det A \neq 0$, ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και

$$\text{adj}(A) A = \det A I_n \Rightarrow \text{adj}(A) = (\det A) A^{-1}.$$

Επομένως $\det \text{adj}(A) = 5^3 \det(A^{-1})$, βλ. Παραδείγματα 2.3.5. Αφού $\det(A^{-1}) = 1/5$, έπεται ότι $\det \text{adj}(A) = 25$.

Έστω ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος πίνακας και έστω το γραμμικό σύστημα $AX = B$ όπου $B \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{k})$. Πολλαπλασιάζουμε με A^{-1} και τις δύο πλευρές της ισότητας $AX = B$. Έτσι,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A) B.$$

Από το γινόμενο αυτό προκύπτει ότι

$$x_i = \frac{(-1)^{1+i} \det A_{1i} \cdot \beta_1 + \cdots + (-1)^{n+i} \det A_{ni} \cdot \beta_n}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.3.18.1)$$

Έστω λοιπόν $A(i, B)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i στήλη του πίνακα A με τον πίνακα B . Αναπτύσσοντας την $\det A(i, B)$ κατά τα στοιχεία της i στήλης και συγκρίνοντας με την Έκφραση (2.3.18.1), προκύπτει ότι

$$x_i = \frac{\det A(i, B)}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.3.18.2)$$

Καταλήγουμε έτσι στο εξής συμπέρασμα :

Πρόταση 2.3.19 (Μέθοδος του Cramer). Έστω ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος πίνακας. Το σύστημα $AX = B$, n εξισώσεων με n αγνώστους, έχει μοναδική λύση (x_1, \dots, x_n) , όπου

$$x_i = \frac{\det A(i, B)}{\det A}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Η μέθοδος του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όταν μας ενδιαφέρει μόνο μία τιμή x_i , $1 \leq i \leq n$, των αγνώστων του συστήματος $AX = B$.

Παράδειγμα 2.3.20. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Στο Παράδειγμα 2.3.15 είδαμε ότι $\det(A) = 3$ και άρα το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση. Θα υπολογίσουμε το x_3 . Έχουμε ότι

$$A(3, B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την $\det(A(3, B))$ με την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά την τρίτη στήλη και βλέπουμε ότι

$$\det A(3, B) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -6.$$

Άρα

$$x_3 = \frac{\det A(3, B)}{\det A} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ασκήσεις Ενότητας 2.3

1. Να υπολογιστούν οι εξής ορίζουσες:

$$a_1 = \begin{vmatrix} 3+2i & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} 3 & i & 2 \\ -3+i & 3 & i \\ 7 & 2i & 5 \end{vmatrix},$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad a_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Να υπολογίσετε τις επόμενες ορίζουσες, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Παραδείγματος 2.3.15.3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ ο συζυγής πίνακας του A , όπου \bar{a}_{ij} είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του a_{ij} . Να αποδείξετε ότι $\det \bar{A} = \det A$.
4. Έστω $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ και ότι $\det A = i$. Να βρείτε $\det 2A$ και $\det(\text{adj}(A))$.
5. Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού πίνακα του $\mathcal{M}_n(K)$, όπου n περιττός, είναι ίση με μηδέν.
6. Ο πίνακας του **Vandermonde**, συμβολίζεται με V και είναι ο πίνακας

$$V = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

7. Να λυθούν με τη μέθοδο του Cramer τα εξής συστήματα:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & 2x_1 \qquad \qquad \qquad + x_4 = 3 \\ & -x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ & \qquad \qquad 2x_2 - x_3 \qquad \qquad = 9. \end{aligned}$$

2.4 Εφαρμογές Κεφαλαίου 2

Σε αυτήν την ενότητα, θα συζητήσουμε διάφορες εφαρμογές της θεωρίας των πινάκων, όπως την αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Γινόμενο Πινάκων και Συνολικό Κόστος

Έστω ότι μία βιοτεχνία παράγει n είδη. Η παραγωγή της βιοτεχνίας ανά ημέρα περιγράφεται από έναν $1 \times n$ πίνακα, $A = (a_j)$, όπου a_j είναι η ποσότητα του είδους j που παράγεται. Αν το κόστος παραγωγής του είδους j είναι b_j , τότε μπορούμε να αποθηκεύσουμε αυτήν την πληροφορία σε έναν $1 \times n$ πίνακα $B = (b_j)$. Το γινόμενο AB^T δίνει το συνολικό κόστος ανά ημέρα.

Γραφήματα και Δυνάμεις Πινάκων

Έστω $A = (a_{ij})$ ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας γειτνίασης ενός απλού κατευθυνόμενου γραφήματος με n κορυφές, βλ. Παράδειγμα 2.1.5. Θα ερμηνεύσουμε τη σημασία του πίνακα A^m , όπου $m \in \mathbb{N}$. Πρώτα θα μελετήσουμε τι συμβαίνει, όταν $m = 2$. Έστω ότι $A^2 = (g_{ij})$. Τότε

$$g_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{im}a_{mj} = \sum_{\kappa=1}^m a_{i\kappa}a_{\kappa j}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $a_{ik}a_{kj} \neq 0$, για $1 \leq k \leq n$, τότε $a_{ik} = 1$ και $a_{kj} = 1$, δηλ. $a_{ik}a_{kj} = 1$. Επομένως υπάρχει ένα βέλος από την κορυφή i στην κορυφή k ($a_{ik} = 1$) και ένα βέλος από την κορυφή k στην κορυφή j ($a_{kj} = 1$). Συνεπώς, υπάρχει μία διαδρομή από την κορυφή i στην κορυφή j με 2 βήματα:

$$i \mapsto k \mapsto j.$$

Δηλαδή, η τιμή g_{ij} στον πίνακα $A^2 = (g_{ij})$ μετρά τον αριθμό των διαδρομών από την κορυφή i στην κορυφή j με 2 βήματα. Γενικότερα, με χρήση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί ότι το στοιχείο g_{ij} του πίνακα $A^m = (g_{ij})$ μετρά τον αριθμό των διαδρομών από την κορυφή i στην κορυφή j με m βήματα.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω το γράφημα του Παραδείγματος 2.1.5 με πίνακα γειτνίασης τον A , όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο στη θέση $(1, 3)$ του A^2 έχει την τιμή 1. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακριβώς ένας τρόπος για να βρεθεί κανείς από τη κορυφή 1 στη κορυφή 3 του γραφήματος ακολουθώντας μία διαδρομή με δύο βήματα. Πράγματι η μόνη διαδρομή που έχει αυτήν την ιδιότητα είναι

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3.$$

Αντίστοιχα εξετάζοντας το στοιχείο στη θέση $(4, 4)$ του A^3 βλέπουμε ότι υπάρχουν 2 διαδρομές των 3 βημάτων που θα μας οδηγήσουν από την κορυφή 4 στη κορυφή 4. Ο αναγνώστης παροτρύνεται να τις προσδιορίσει.

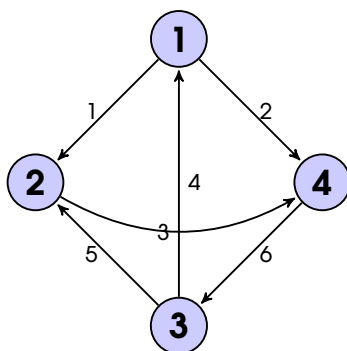
Γραφήματα και Γραμμικά Συστήματα

Έστω $A = (a_{ij})$ ο $m \times n$ πίνακας πρόσπτωσης ενός απλού κατευθυνόμενου γράφηματος με n κορυφές και m ακμές. Αν σε κάθε κορυφή προσδιορίσουμε μία τιμή x_i και πολλαπλασιάσουμε τον A με τον πίνακα $X = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$, τότε το γινόμενο AX περιγράφει τη διαφορά στις προσλαμβάνουσες τιμές για κάθε ακμή.

Έτσι, αν ο A είναι ο πίνακας πρόσπτωσης του Παραδείγματος 2.1.6 και οι κορυφές του γραφήματος είναι πόλεις σε υψόμετρο 100, 0, 200 και 50 μέτρα αντίστοιχα, τότε το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -50 \\ 50 \\ -100 \\ -200 \\ 150 \end{bmatrix}$$

δείχνει την υψομετρική διαφορά για κάθε μία από τις έξι απευθείας διαδρομές (δηλ. τις ακμές).



Για το ίδιο παράδειγμα παρατηρούμε ότι αν ξεκινήσουμε από την κορυφή 1 και ακολουθήσουμε τη διαδρομή που καθορίζεται από τις ακμές 1, 3, 6, 4, τότε θα επισκεφτούμε με τη σειρά τις κορυφές 2, 4, 3 και θα καταλήξουμε στην κορυφή 1. Δηλαδή θα έχουμε ολοκληρώσει μία κυκλική διαδρομή. Προσθέτοντας τις αντίστοιχες γραμμές του A βλέπουμε ότι

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_6 + \Gamma_4 = \mathbf{0}.$$

Πράγματι σε αυτήν τη διαδρομή επισκεφτήκαμε κάθε κορυφή μία φορά ξεκινώντας (από αυτήν) και μία φορά καταλήγοντας (σε αυτήν). Ας παρακολουθήσουμε τη διαδρομή μας με τον ανάστροφο του A , τον A^T . Παρατηρούμε ότι

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και ότι ως αναμενόμενο, το άθροισμα των στηλών 1, 3, 6, 4 του A^T είναι η μηδενική στήλη. Επομένως, μόλις βρήκαμε ότι $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$ είναι λύση του γραμμικού συστήματος $A^T X = \mathbf{0}$. Βασισμένοι στα προηγούμενα σημειώνουμε την εξής παρατήρηση.

Αν ο A είναι ο πίνακας πρόσπτωσης ενός γραφήματος, τότε οι λύσεις του γραμμικού συστήματος $A^T X = \mathbf{0}$ προσδιορίζουν τις κυκλικές διαδρομές του γραφήματος.

Στην Άσκηση 2.4.2 ζητείται από τον αναγνώστη να βρεί τις λύσεις του $A^T X = \mathbf{0}$ και να προσδιορίσει τις αντίστοιχες κυκλικές διαδρομές. Παραπέμπουμε στην Ενότητα 3.5 του συγγράμματος [5] για περισσότερες λεπτομέρειες επί του θέματος.

Δυνάμεις Πινάκων και Πληθυσμιακά Μοντέλα

Απλά πληθυσμιακά μοντέλα μπορούν να περιγραφούν με τετραγωνικούς πίνακες. Αν ο A είναι ένας πίνακας που αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο μοντέλο στην αρχική κατάσταση, τότε A^n περιγράφει την πληθυσμιακή κατάσταση μετά από χρόνο n . Για τέτοια μοντέλα είναι σημαντική η *πρόβλεψη* του A^m για μεγάλα m . Για παράδειγμα έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.6 & 1.4 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας που περιγράφει ένα ιδιαίτερα απλό πληθυσμιακό μοντέλο ενός κλειστού συστήματος γατών και ποντικών. Τι εννοούμε με αυτό: έστω ότι γ_k είναι ο πληθυσμός των γατών σε χρόνο k ενώ p_k είναι ο πληθυσμός των ποντικών σε χρόνο k . Σύμφωνα με τις πληροφορίες που έχουν καταγραφεί στον πίνακα A , σε χρόνο $k + 1$ οι αντίστοιχοι πληθυσμοί είναι

$$\gamma_{k+1} = 0.7\gamma_k + 0.2p_k, \quad p_{k+1} = -0.6\gamma_k + 1.4p_k.$$

Δηλαδή το μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση πινάκων

$$\begin{bmatrix} \gamma_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_k \\ p_k \end{bmatrix}.$$

Έστω λοιπόν ότι είναι γνωστός ο πληθυσμός στον χρόνο 0. Ποιός θα είναι ο πληθυσμός των γατών και ποντικών μετά από 10 ή 20 χρόνια; Παρατηρούμε ότι

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ p_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ p_0 \end{bmatrix}$$

και γενικότερα

$$\begin{bmatrix} \gamma_k \\ p_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

Η δυνατότητα λοιπόν να μελετήσουμε το A^m για μεγάλα m μας επιτρέπει να μελετήσουμε το μέλλον. Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι αν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, τότε ο A ικανοποιεί μία εξίσωση πινάκων, που ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του A . Αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της δύναμης A^m για $m \geq n$ ως συνδυασμούς μικρότερων δυνάμεων. Θα δούμε επίσης ότι ένας άλλος τρόπος για να μελετήσουμε τις δυνάμεις A^m προκύπτει από τη μελέτη των *ιδιοτιμών* και *ιδιοδιανυσμάτων* του A .

Πολυωνυμικές Καμπύλες II

Έστω n σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, στο \mathbb{R}^2 . Γενικεύοντας όσα είδαμε στην Ενότητα 1.5, θα δείξουμε ότι αν $x_i \neq x_j$, για $1 \leq i < j \leq n$, τότε από αυτά τα n σημεία του \mathbb{R}^2 περνά ακριβώς μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού $n - 1$. Θέλουμε, λοιπόν, να βρούμε τους συντελεστές $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, ενός πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, έτσι ώστε $f(x_i) = y_i$. Ισοδύναμα θέλουμε να λύσουμε το εξής γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους:

$$\begin{aligned} a_0 + x_1 a_1 + \dots + x_1^{n-1} a_{n-1} &= y_1 \\ \vdots & \\ a_0 + x_n a_1 + \dots + x_n^{n-1} a_{n-1} &= y_n \end{aligned} \quad (2.4.1.1)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος αυτού είναι ο πίνακας V του Vandermonde, βλ. Άσκηση 2.3.6. Το σύστημα που επιθυμούμε να επιλύσουμε είναι το σύστημα

$$VX = B,$$

όπου

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Αφού

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

σύμφωνα με την υπόθεση, προκύπτει ότι $\det V \neq 0$. Επομένως το σύστημα 2.4.1.1 έχει μοναδική λύση.

LU Ανάλυση Πινάκων

Για την *αποτελεσματική* εύρεση λύσεων ενός γραμμικού συστήματος, έχουν αναπτυχθεί διάφορες υπολογιστικές μέθοδοι. Σε αυτό το εδάφιο συζητούμε την **LU-ανάλυση** (LU-decomposition) ενός πίνακα A σε γινόμενο $A = LU$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας και U είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Θα εφαρμόσουμε την LU-ανάλυση του A , όταν ο A είναι ο πίνακας των συντελεστών ενός συστήματος $AX = B$. Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.4.2. Ο πίνακας A των συντελεστών του συστήματος

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

έχει την εξής LU-ανάλυση:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω ότι L και U είναι ο κάτω και άνω τριγωνικός πίνακας της προηγούμενης ανάλυσης του A . Στη συνέχεια:

- λύνουμε το σύστημα $LY = B$, και κατόπιν
- λύνουμε το σύστημα $UX = C$, όπου C αντιστοιχεί στη λύση του συστήματος $LY = B$.¹

Είναι φανερό ότι οι λύσεις του $UX = C$ είναι λύσεις του αρχικού συστήματος, $AX = B$. Πράγματι,

$$AX = L(UC) = LC = B.$$

Αφού οι πίνακες L και U είναι τριγωνικοί, τα αντίστοιχα συστήματα λύνονται με απλή αντικατάσταση. Το σύστημα $LY = B$ είναι το σύστημα :

$$\begin{aligned} 3y_1 &= 0 \\ -2y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}$$

και έχει μοναδική λύση την $(0, 1)$. Αντίστοιχα το σύστημα $UX = C$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την $(2, 1)$. Επομένως το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση την $(2, 1)$.

Πότε έχει ένας πίνακας A μία LU-ανάλυση; Έστω ότι μία ακολουθία από s στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, τύπου 1 και 3 (βλ. Ορισμό 1.2.1) μετατρέπει τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό πίνακα U . Αν E_1, \dots, E_s είναι οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες, τότε

$$E_s \cdots E_1 A = U$$

και ο πίνακας

$$L = (E_s \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

είναι κάτω τριγωνικός. Επομένως $A = LU$ είναι μία LU-ανάλυση.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

- $\Gamma_1 \rightarrow 1/3\Gamma_1$,
- $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 3\Gamma_1$,
- $\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1$,
- $\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 3\Gamma_2$,

μετατρέπουν τον A στον

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

¹Αν (c_1, c_2) είναι η λύση του συστήματος $LY = B$, τότε $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας L προκύπτει ως το γινόμενο τεσσάρων στοιχειωδών πινάκων

$$L = E_{3,1}E_{2,-3,1}E_{3+4,1}E_{3-3,2}.$$

Επομένως

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

και η LU-ανάλυση του A είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Όταν λοιπόν ο A έχει μία LU-ανάλυση, τότε ο αλγόριθμος για την επίλυση του συστήματος $AX = B$ έχει ως εξής:

Αλγόριθμος 2.4.1 Επίλυση του συστήματος $AX = B$ με χρήση της LU-ανάλυσης του A

Είσοδος: Ένα σύστημα $AX = B$ και μία LU-ανάλυση του A .

Έξοδος: Οι λύσεις του συστήματος $AX = B$.

Βήμα 1 Λύνουμε το σύστημα $LY = B$ με απλή αντικατάσταση.

Βήμα 2 Λύνουμε το σύστημα $UX = Y$, όπου Y είναι οι λύσεις του προηγούμενου συστήματος, με απλή αντικατάσταση. Οι λύσεις είναι λύσεις του αρχικού συστήματος.

Αν και οι πίνακες L , U μίας LU-ανάλυσης του A δεν είναι μοναδικοί, είναι φανερό ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι πίνακες L , U είναι αντιστρέψιμοι. Για περισσότερες λεπτομέρειες για την LU-ανάλυση του A παραπέμπουμε στην Ενότητα 9.9 του συγγράμματος [1].

Το Μοντέλο του Leontief για ένα Κλειστό Οικονομικό Σύστημα

Στο μοντέλο του Leontief, ένα (κλειστό) οικονομικό σύστημα αποτελείται από n οντότητες που υποδηλώνουμε ως οντότητα $1, 2, \dots, n$. Σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα, κάθε οντότητα παράγει κάποιο προϊόν ή υπηρεσία που χρησιμοποιείται πλήρως με έναν προκαθορισμένο τρόπο από τις n οντότητες συνολικά. Το πρόβλημα που τίθεται είναι ο προσδιορισμός της τιμής του κάθε προϊόντος έτσι ώστε το συνολικό κόστος να ισούται τα συνολικά έσοδα και το οικονομικό σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Έστω ότι p_i είναι η τιμή που χρεώνει η i οντότητα για το προϊόν της, ενώ e_{ij} είναι το ποσοστό του j προϊόντος που αγοράζει αυτή η οντότητα. Αφού όλα τα προϊόντα χρησιμοποιούνται πλήρως, ισχύει ότι:

$$e_{i1} + \dots + e_{in} = 1, \text{ για } i = 1, \dots, n.$$

Θα συστηματοποιήσουμε τα προηγούμενα χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των πινάκων. Έστω

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας E λέγεται πίνακας **εισόδου-εξόδου** (input-output). Ο πίνακας P λέγεται **πίνακας τιμών** (value matrix). Το ζητούμενο για την επιθυμητή ισορροπία του συστήματος είναι να βρεθεί πίνακας τιμών P , τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$EP = P \implies (E - I_n)P = \mathbf{0}. \quad (2.4.3.1)$$

Πρέπει, λοιπόν, να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.4. Σε ένα κλειστό μοντέλο n οντότητων με πίνακα εισόδου-εξόδου E όπου $e_{ij} > 0$, για $1 \leq i, j \leq n$, υπάρχει ένας πίνακας τιμών $P = (p_i) \neq \mathbf{0}$, για τον οποίο $EP = P$ και $p_i \geq 0$, για $i = 1, \dots, n$. Όλοι οι πίνακες Q με την ιδιότητα $EQ = Q$ είναι πολλαπλάσια του P .

Στο επόμενο παράδειγμα, μελετούμε τη συμπεριφορά ενός κλειστού οικονομικού συστήματος, βάσει των όσων είδαμε προηγουμένως.

Παράδειγμα 2.4.5. Τρεις επαγγελματίες, ένας ηλεκτρολόγος (1), ένας υδραυλικός (2) και ένας ξυλουργός (3), συμφωνούν να κάνουν επιδιορθώσεις ο ένας στο σπίτι του άλλου για 10 ακριβώς μέρες ο καθένας, σύμφωνα με το εξής πρόγραμμα.

- Ο (1) θα δουλέψει 7 μέρες στον (1), 1 μέρα στον (2) και 2 μέρες στον (3).
- Ο (2) θα δουλέψει 3 μέρες στον (1), 4 μέρες στον (2) και 3 μέρες στον (3).
- Ο (3) θα δουλέψει 2 μέρες στον (1), 4 μέρες στον (2) και 4 μέρες στον (3).

Ποιό πρέπει να είναι το μεροκάματο των (1), (2), (3), έτσι ώστε να μην χρειαστεί να διακινηθούν χρήματα στο τέλος;

Ο πίνακας εισόδου-εξόδου του συστήματος είναι ο

$$E = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τη λύση του ομογενούς συστήματος $(I_3 - E)X = \mathbf{0}$. Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του $I_3 - E$ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος $(I_3 - E)X = \mathbf{0}$ αποτελούν το σύνολο $\{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$. Επομένως οι τρεις επαγγελματίες συμφωνούν να χρεώσουν το ίδιο μεροκάματο, έτσι ώστε στο τέλος να μην χρειαστεί να διακινηθούν χρήματα.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην Ενότητα 11.9 του συγγράμματος [1] για περισσότερες λεπτομέρειες επί του θέματος. Ο οικονομολόγος Leontief έλαβε το 1973 το βραβείο Nobel στην Οικονομία, για την ανάπτυξη της μεθόδου εισόδου-εξόδου και τις εφαρμογές της σε σημαντικά οικονομικά προβλήματα.

Ασκήσεις Ενότητας 2.4

1. Να βρείτε το γράφημα που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να βρείτε τα γινόμενα A^2 και A^3 και να εξηγήσετε τι σημαίνουν οι απαντήσεις σας ως προς το προηγούμενο γράφημα.

2. Για το γράφημα και τον πίνακα πρόσπτωσης του Παραδείγματος 2.1.6, να βρείτε τις λύσεις του $A^T X = \mathbf{0}$ και να προσδιορίσετε τις αντίστοιχες κυκλικές διαδρομές.
3. Να βρεθεί ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής της πολυωνυμικής καμπύλης βαθμού 3 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$.
4. Να αποδείξετε ότι από n σημεία με διαφορετικές n συντεταγμένες, διέρχονται άπειρες καμπύλες βαθμού n .
5. Να χρησιμοποιήσετε την LU-ανάλυση του A για να λύσετε το σύστημα $AX = B$, όπου A ο πίνακας του Παραδείγματος 2.4.3 και $B = [1 \ 2 \ 3]^T$.
6. Να βρείτε τον πίνακα τιμών για να έρθει σε ισορροπία το κλειστό σύστημα με πίνακα εισόδου-εξόδου τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Η συνήθης χρέωση είναι περίπου €60.

2.5 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία

Στοιχεία της θεωρίας των πινάκων υπήρχαν αποσπασματικά στα έργα των δυτικών μαθηματικών από την εποχή της Αναγέννησης. Ο Leibniz (1646-1716) το 1693 είχε ανακαλύψει την έννοια της ορίζουσας για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Ο Gauss (1777-1855), το 1801, παρόλο που δεν χρησιμοποίησε την ορολογία των πινάκων, εξέθεσε τον κανόνα για το γινόμενο 2×2 και 3×3 πινάκων. Ο πρώτος, όμως, μαθηματικός που αναγνώρισε πλήρως τη σημασία της άλγεβρας των πινάκων και που ενοποίησε τα διάφορα κομμάτια της θεωρίας των πινάκων σε έναν ενιαίο ξεχωριστό μαθηματικό τομέα ήταν ο Άγγλος A. Cayley, (1821-1895). Παρόλο που ο Cayley έβγαζε τα προς το ζην ασκώντας δικηγορία, το πραγματικό του πάθος ήταν τα μαθηματικά. Το 1858 ο Cayley δημοσίευσε το σύγγραμμα «Μνημόνια στην Θεωρία των Πινάκων», (Memoir on the Theory of Matrices). Ο όρος «matrix» τον οποίο ο Cayley χρησιμοποίησε και που από τότε έχει επικρατήσει στη μαθηματική ορολογία οφείλεται στον φίλο του, επίσης Άγγλο μαθηματικό και δικηγόρο, τον J. Sylvester, (1814-1897), που τον πρωτοχρησιμοποίησε το 1850. Ο Cayley εισήγαγε τον συμβολισμό $|A|$ για την ορίζουσα του πίνακα A , όρισε την πρόσθεση πινάκων, τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, τον σκαλιανό πολλαπλασιασμό

και την έννοια του αντιστρόφου πίνακα. Βέβαια, νωρίτερα, στο έργο του Γάλλου μαθηματικού Cauchy (1789-1857) συναντούμε ήδη την έννοια της ορίζουσας καθώς και την πολλαπλασιαστική της ιδιότητα. Ο Cauchy εισήγαγε τον όρο «array» το 1826 που χρησιμοποιείται παράλληλα με τον όρο matrix. Στα Ελληνικά ο όρος matrix μεταφράζεται από πολλούς και ως «μητρώο». Το έργο του Γερμανού μαθηματικού Jacobi (1804-1851) το 1841 έστρεψε τη γενική προσοχή στις ορίζουσες και σε εφαρμογές τους. Οφείλουμε επίσης να αναφέρουμε τον Γερμανό μαθηματικό F. G. Frobenius (1849-1917) ο οποίος δούλεψε με τις αλγεβρικές δομές των πινάκων, χωρίς όμως να έχει γνώση του έργου του Cayley. Ανάμεσα σε άλλα σημαντικά αποτελέσματα, ο Frobenius όρισε πρώτος την έννοια της βαθμίδας ενός πίνακα το 1878. Όταν τελικά διάβασε το έργο του Cayley το 1896, ο Frobenius υιοθέτησε την ορολογία του Cayley και τίμησε το έργο του τελευταίου δίνοντας το όνομά του Cayley σε ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, το Θεώρημα των Cayley-Hamilton, που θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 5. Για περισσότερα ιστορικά στοιχεία παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [3].

Βιβλιογραφία

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley and Sons, 1994.
2. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Β. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 2006.
3. V. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
4. K. Nichololson, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.
5. Th. Shiffrin and M. R.Adams, *Linear Algebra, a Geometric Approach*, W. H. Freeman and Company, 2002.

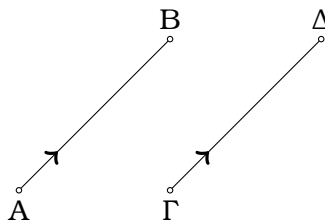
Κεφάλαιο 3

Διανυσματικοί Χώροι

Έστω \mathbb{k} όπως συνήθως το \mathbb{R} ή το \mathbb{C} . Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την αλγεβρική δομή που αποκτά το σύνολο των στοιχείων του \mathbb{k}^n και που οφείλεται στο άθροισμα και στο βαθμωτό γινόμενο με στοιχεία από το \mathbb{k} . Τα στοιχεία του \mathbb{k}^n είναι *διανύσματα* και το σύνολο \mathbb{k}^n είναι *διανυσματικός χώρος*. Για τη συνέχεια, η γεωμετρική εποπτεία είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς μας καθοδηγεί ορθά προς τα ισχύοντα. Θα επιχειρήσουμε να την αξιοποιήσουμε στο έπακρο. Εφόσον έχουμε αποκτήσει εξοικείωση με τον \mathbb{k}^n , θα μελετήσουμε αφηρημένους \mathbb{k} -διανυσματικούς χώρους.

3.1 Διανύσματα στον \mathbb{R}^n

Τα διανύσματα (vectors) στον \mathbb{R}^n , όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι ευθύγραμμα τμήματα που χαρακτηρίζονται από το μήκος, την κλίση και τη φορά τους. Το ίδιο διάνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικά αρχικά σημεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.1), όπου $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$.

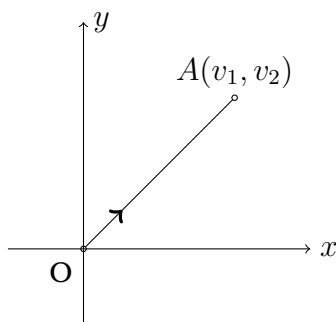


Σχήμα 3.1: Το ίδιο διάνυσμα με διαφορετικά αρχικά σημεία

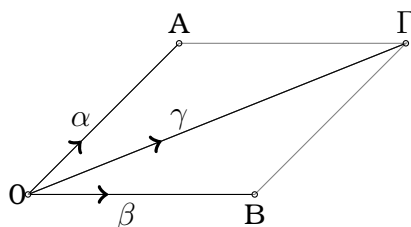
Αν $P(p_1, \dots, p_n)$ και $Q(q_1, \dots, q_n)$ είναι σημεία στον \mathbb{R}^n , τότε το διάνυσμα με αρχικό σημείο P και τελικό σημείο Q γράφεται \vec{PQ} και είναι η n -άδα

$$\vec{PQ} := (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n).$$

Το βέλος στο \vec{PQ} ορίζει το αρχικό και τελικό σημείο του διανύσματος, είναι όμως περιττό όταν δίνονται οι τιμές των *συντεταγμένων* του διανύσματος, δηλ. οι $q_i - p_i$, για $i = 1, \dots, n$. Αντίστροφα, έστω το διάνυσμα $v = (v_1, \dots, v_n)$ στον \mathbb{R}^n . Αν επιλέξουμε ως αρχικό σημείο του v την αρχή των αξόνων $O(0, \dots, 0)$, τότε το τελικό σημείο του v είναι το σημείο $A(v_1, \dots, v_n)$. Έτσι δημιουργούμε μία αμφιμονότιμη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του \mathbb{R}^n και στα διανύσματα στον \mathbb{R}^n , που έχουν αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται το διάνυσμα $\vec{OA} = (v_1, v_2)$, όπου A είναι το σημείο $A(v_1, v_2)$ του \mathbb{R}^2 .

Σχήμα 3.2: Το διάνυσμα (v_1, v_2)

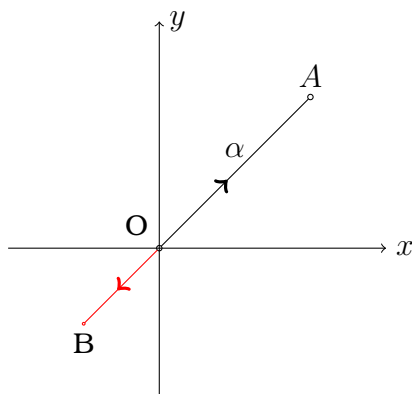
Αν $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ είναι δύο διανύσματα στον \mathbb{R}^n , τότε το **άθροισμα** (sum) των α και β είναι το διάνυσμα $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$. Γεωμετρικά, προσθέτουμε δύο διανύσματα στον \mathbb{R}^n με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.3). Έτσι, $\vec{OA} = \vec{B\Gamma}$, ενώ $\vec{OB} = \vec{A\Gamma}$.

Σχήμα 3.3: Το άθροισμα των α και β είναι το γ

Ο **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** (scalar product) του $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ με ένα στοιχείο c του \mathbb{R} , ορίζεται ως το διάνυσμα

$$c\alpha := (ca_1, \dots, ca_n).$$

Το διάνυσμα $c\alpha$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα α και το μήκος του αυξάνεται όταν $|c| > 1$, ενώ ελαττώνεται όταν $|c| < 1$. Όταν $c > 0$, η φορά του $c\alpha$ είναι ίδια με τη φορά του α , ενώ είναι η αντίστροφη όταν $c < 0$.

Σχήμα 3.4: Το διάνυσμα a και $-1/2a$

Όταν $c = -1$ γράφουμε $-\alpha$, δηλ. $-\alpha = (-a_1, \dots, -a_n)$. Έτσι, στο σύνολο των διανυσμάτων του \mathbb{R}^n ορίζονται δύο πράξεις, η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε τα εξής:

1. Ισχύει η **προσεταιριστική ιδιότητα** (associativity) για την πρόσθεση των διανυσμάτων, δηλ.

$$v + (u + w) = (v + u) + w ,$$

για όλα τα διανύσματα, v, u, w , στον \mathbb{R}^n .

2. Το διάνυσμα $0 = (0, \dots, 0)$ είναι το **μηδενικό στοιχείο** (zero element) της πρόσθεσης διανυσμάτων, δηλ.

$$0 + v = v = v + 0 ,$$

για όλα τα διανύσματα v στον \mathbb{R}^n .

3. Το διάνυσμα $-v$ είναι το **αντίθετο** (opposite) του v ως προς την πρόσθεση, για κάθε διάνυσμα v στον \mathbb{R}^n , δηλ.

$$-v + v = 0 = v + (-v) .$$

4. Ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα** (commutativity) για την πρόσθεση διανυσμάτων:

$$v + u = u + v ,$$

για όλα τα v, u , διανύσματα στον \mathbb{R}^n .

5. Ισχύει η **επιμεριστική ιδιότητα** (distributivity) για την πρόσθεση διανυσμάτων και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\kappa(v + u) = \kappa v + \kappa u ,$$

και

$$(\kappa + \lambda)v = \kappa v + \lambda v ,$$

για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε διάνυσμα v, u στον \mathbb{R}^n .

6. Ισχύει ότι

$$\kappa(\lambda v) = (\kappa\lambda)v ,$$

για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και v στον \mathbb{R}^n .

7. Ισχύει ότι

$$1v = v ,$$

για κάθε διάνυσμα v στον \mathbb{R}^n .

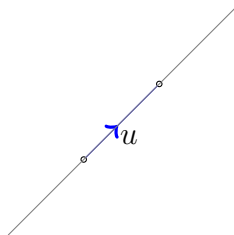
Τις ιδιότητες αυτές ονομάζουμε **ιδιότητες διανυσματικού χώρου** (properties of a vector space). Το σύνολο των διανυσμάτων στον \mathbb{R}^n είναι ο **διανυσματικός χώρος** \mathbb{R}^n , (vector space \mathbb{R}^n). Όταν γράφουμε « $u \in \mathbb{R}^n$ » εννοούμε το διάνυσμα u του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^n . Αν το U είναι ένα υποσύνολο διανυσμάτων στον \mathbb{R}^n και

1. $v + u \in U$, για κάθε $u, v \in U$,
2. $cu \in U$, για κάθε $u \in U$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$,

τότε λέμε ότι ο U είναι **διανυσματικός υποχώρος** (subspace) του \mathbb{R}^n . Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν $u \in \mathbb{R}^n$ είναι διάνυσμα στον \mathbb{R}^n , τότε το σύνολο

$$U = \{tu : t \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^n . Λέμε ότι ο U είναι η **ευθεία** (line) που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη προς το u .



Σχήμα 3.5: Η ευθεία $\{tu : t \in \mathbb{R}\}$

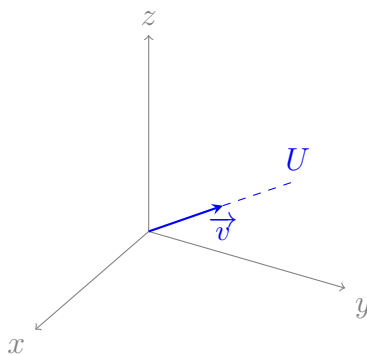
Παραδείγματα 3.1.1.

1. Έστω $v = (2, 3, 1)$. Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο v περιγράφεται από την εξίσωση

$$U = \{(2t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{tv : t \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία U είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX = 0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ βλ. Ενότητα 1.4.}$$



Σχήμα 3.6: Η ευθεία $\{t(2, 3, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

2. Έστω U το επίπεδο στον \mathbb{R}^3 που περιγράφεται ως το σύνολο

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 3a + b - 2c = 0\}.$$

Στο Σχήμα (3.7) βλέπουμε τη γραφική αναπαράσταση του U . Παρατηρούμε ότι το $(0, 0, 0)$ ανήκει στο U . Ταυτίζουμε λοιπόν το U με το σύνολο των διανυσμάτων του \mathbb{R}^3 , που έχουν αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων και τελικό σημείο επί του U .

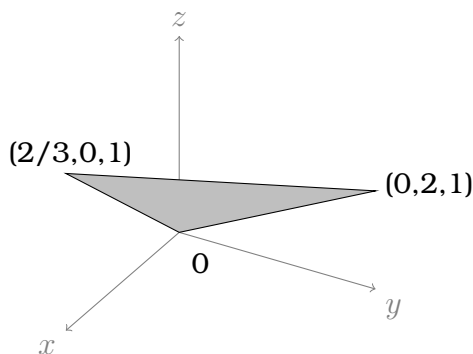
Αν $u = (u_1, u_2, u_3) \in U$, τότε $t(u_1, u_2, u_3) \in U$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$3u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \Rightarrow 3(tu_1) + (tu_2) - 2(tu_3) = 0.$$

Επίσης αν $u \in U$ και $w \in U$ τότε $u + w \in U$. Πράγματι, έστω $u = (u_1, u_2, u_3)$ και $w = (w_1, w_2, w_3)$. Τότε $3u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$ και $3w_1 + w_2 - 2w_3 = 0$. Επομένως

$$3(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) - 2(u_3 + w_3) = 0 \Rightarrow u + w \in U.$$

Συνεπώς το U είναι \mathbb{R} -διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^n .

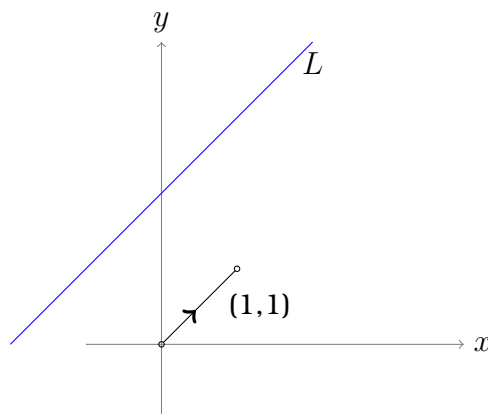


Σχήμα 3.7: Το επίπεδο $\{(a, b, c) : 3a + b - 2c = 0\}$

3. Έστω L η ευθεία που δίνεται από την εξίσωση

$$L = \{(1, 3) + t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Η ευθεία L είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(1, 1)$ και διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$, (για $t = 0$), και $B(2, 4)$, (για $t = 1$). Η ευθεία L δεν περνά από την αρχή των αξόνων. Έτσι το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει στην L και η L δεν είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^2 .



Σχήμα 3.8: Η ευθεία $\{(1, 3) + t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

4. Το επίπεδο $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2\}$ του Παραδείγματος 1.4.2.2, δεν είναι υποχώρος του \mathbb{R}^3 , αφού $\mathbf{0} \notin E$ (βλ. Σχήμα 1.4).

Με χρήση της θεωρίας των διανυσμάτων θα αποδείξουμε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της οριζουσας του πίνακα. Πρώτα παρατηρούμε ότι ένα παραλληλόγραμμο καθορίζεται πλήρως από τρεις κορυφές και δύο ακμές. Αν A, B είναι δύο σημεία του \mathbb{R}^2 , τότε γράφουμε AB για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία και $|AB|$ για το μήκος του AB .

Πρόταση 3.1.2. Έστω ο πίνακας

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

και P_M το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, και ακμές τα ευθύγραμμα τμήματα OA, OB . Τότε το εμβαδόν του P_M ισούται με $|\det M|$.

Απόδειξη. Ως γνωστόν

$$\text{Εμβαδόν } P_M = \text{Βάση του } P_M \cdot \text{Ύψος του } P_M .$$

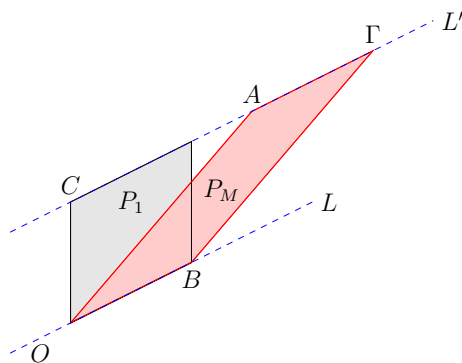
Έστω Γ η τέταρτη κορυφή του P_M . Θεωρούμε την ευθεία L που περνάει από τα σημεία O και B καθώς και την ευθεία L' που περνάει από τα σημεία A και Γ . Η ευθεία L' είναι παράλληλη προς το διάνυσμα \vec{OB} και περιγράφεται ως το σύνολο

$$L' = \{(a_1, a_2) + k(b_1, b_2) : k \in \mathbb{R}\}.$$

Έστω $C(c_1, c_2)$ τυχαίο σημείο επί της L' . Υπάρχει, λοιπόν, $k \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$(c_1, c_2) = (a_1 + kb_1, a_2 + kb_2) .$$

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο P_1 με κορυφές τα σημεία O, B, C , και ακμές OB, OC , βλ. Σχήμα (3.9).



Σχήμα 3.9: Τα παραλληλόγραμμο P και P_1

Παρατηρούμε ότι τα παραλληλόγραμμο P_M και P_1 έχουν την ίδια βάση $|OB|$. Αφού τα σημεία A και C ανήκουν στην L' και η L' είναι παράλληλη προς την L , έπεται ότι οι αποστάσεις των A και C από την L είναι ίσες. Άρα τα παραλληλόγραμμο P_M και P_1 έχουν ίσα ύψη. Συνεπώς

$$\text{Εμβαδόν } P_M = \text{Εμβαδόν } P_1 .$$

Σημειώνουμε ότι

$$M \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + k\Sigma_2} M_1 = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ και } P_1 = P_{M_1} \text{ ενώ } \det M = \det M_1 .$$

Αντίστοιχα, θεωρώντας τον ανάστροφο του M , παρατηρούμε ότι αν

$$M \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + k\Gamma_1} M_2, \text{ για } k \in \mathbb{R} ,$$

τότε

$$\det M = \det M_2 \text{ και } \text{Εμβαδόν } P_M = \text{Εμβαδόν } P_{M_2} .$$

Σημειώνουμε ότι το P_{M_2} έχει ακμή βάσης OA και δύο άλλες κορυφές επί της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ .

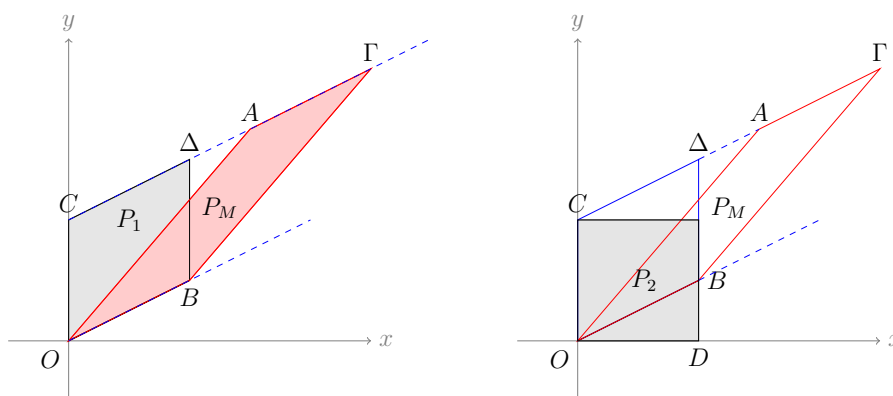
Θα εφαρμόσουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις διαδοχικά. Την πρώτη φορά επιλέγουμε ως $C(0, c)$ το σημείο τομής της L' με τον άξονα των y . Έτσι, το P_1 έχει ακμές OB και OC και αντιστοιχεί στον πίνακα :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c & b_2 \end{bmatrix} .$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το σημείο Δ , τη τέταρτη κορυφή του P_1 . Βρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας

$$\{\vec{OB} + t\vec{B\Delta} : t \in \mathbb{R}\},$$

με τον άξονα των x , έστω D . Έτσι, $D = (d, 0)$ και το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο P_2 έχει ως κορυφές τα σημεία O, C, D, B , βλ. Σχήμα (3.10).



Σχήμα 3.10: Τα παραλληλόγραμμο P_M, P_1, P_2

Παρατηρούμε ότι

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{bmatrix} \text{ και ότι } P_{M_2} = P_2.$$

Επομένως

$$\text{Εμβαδόν } P_M = \text{Εμβαδόν } P_1 = \text{Εμβαδόν } P_2$$

ενώ

$$\det M = \det M_1 = \det M_2 = -cd .$$

Αφού το P_2 είναι ορθογώνιο, έπεται ότι

$$\text{Εμβαδόν } P_2 = |c||d| \implies \text{Εμβαδόν } P_M = |\det M| .$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του M είναι ίση με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου P_M . □

Στον \mathbb{R}^3 , ένα παραλληλεπίπεδο καθορίζεται από τις συντεταγμένες τριών διανυσμάτων. Όπως προηγουμένως, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του 3×3 πίνακα των συντεταγμένων αυτών των τριών διανυσμάτων. Παρατηρούμε ότι τρία διανύσματα στον \mathbb{R}^3 ορίζουν ένα γνήσιο παραλληλεπίπεδο όταν δεν υπάρχει κάποιο επίπεδο που να περιέχει και τα τρία διανύσματα ταυτόχρονα. Σε αντίθετη περίπτωση, το στερεό παραλληλεπίπεδο καταρρέει και δεν έχει όγκο, ενώ η ορίζουσα του αντίστοιχου 3×3 πίνακα είναι ίση με μηδέν.

Ασκήσεις Ενότητας 3.1

1. Να δώσετε την εξίσωση της ευθείας $L = \{(1, 2) + k(1, 0) : k \in \mathbb{R}\}$ στη μορφή $ax + by = c$. Να εξετάσετε αν η L είναι υποχώρος του \mathbb{R}^2 . Ομοίως για την ευθεία $L' = \{(2, 4) + k(1, 2) : k \in \mathbb{R}\}$.
2. Να δώσετε την εξίσωση του επιπέδου $E_1 = \{k(1, 1, 1) + t(1, 0, 1) : k, t \in \mathbb{R}\}$ στη μορφή $ax + by + cz = d$. Να εξετάσετε αν το E_1 είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^3 . Ομοίως για τα επίπεδα $E_1 = \{k(1, 1, 1) + t(1, 0, 1) + (3, 1, 3) : k, t \in \mathbb{R}\}$ και $E_2 = \{k(1, 1, 1) + t(1, 0, 1) + (3, 2, 3) : k, t \in \mathbb{R}\}$.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 7)$.
4. Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$.
5. Να βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 0, 3)$.

3.2 Διανυσματικός Χώρος \mathbb{k}^n και Υποχώροι

Στην ενότητα αυτή θα γενικεύσουμε στον \mathbb{C}^n , όσα εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα για τον \mathbb{R}^n . Έτσι, θεωρούμε γενικότερα το σώμα \mathbb{k} , όπου $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} . Αν $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{k}^n$, τότε ορίζουμε το **άθροισμα** (sum), $v + w$, ως εξής:

$$v + w = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n).$$

Αντίστοιχα αν $c \in \mathbb{k}$, τότε ορίζουμε το **βαθμωτό γινόμενο** (scalar product), cv , ως εξής:

$$cv = (cv_1, \dots, cv_n).$$

Το σύνολο \mathbb{k}^n γίνεται **διανυσματικός χώρος** (vector space) όταν μελετάμε τη δομή που προκύπτει από αυτές τις δύο πράξεις. Τα στοιχεία του \mathbb{k}^n θα λέγονται εφεξής **διανύσματα** (vectors). Ο επόμενος πίνακας συγκεντρώνει τις ιδιότητες που ικανοποιούνται στον διανυσματικό χώρο \mathbb{k}^n . Με $\mathbf{0}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα $(0, \dots, 0) \in \mathbb{k}^n$.

Πίνακας 3.2.1: ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{k}^n

1. $v + (u + w) = (v + u) + w$, για όλα τα $v, u, w \in \mathbb{k}^n$.
2. $\mathbf{0} + v = v = v + \mathbf{0}$, για κάθε $v \in \mathbb{k}^n$.
3. $-v + v = \mathbf{0} = v + (-v)$, για κάθε $v \in \mathbb{k}^n$.
4. $v + u = u + v$, για όλα τα $v, u \in \mathbb{k}^n$.
5. $\kappa(v + u) = \kappa v + \kappa u$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{k}$ και όλα τα $v, u \in \mathbb{k}^n$,
 $(\kappa + \lambda)v = \kappa v + \lambda v$, για όλα τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$ και κάθε $v \in \mathbb{k}^n$.
6. $\kappa(\lambda v) = (\kappa\lambda)v$, για όλα τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$ και κάθε $v \in \mathbb{k}^n$.
7. $1v = v$, για κάθε $v \in \mathbb{k}^n$.

Για τη μελέτη μας εστιάζουμε σε κάποια υποσύνολα του \mathbb{k}^n που ικανοποιούν δύο σημαντικές ιδιότητες.

Ορισμός 3.2.1. Ένα μη κενό υποσύνολο U του \mathbb{k}^n λέγεται **διανυσματικός υποχώρος** (subspace) του \mathbb{k}^n (ή απλώς υποχώρος) αν

- i. $u + w \in U$, για κάθε $u, w \in U$,
- ii. $\kappa u \in U$, για κάθε $u \in U$ και κάθε $\kappa \in \mathbb{k}$,

Έστω ο U διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n . Από τις ιδιότητες του υποχώρου, προκύπτει ότι:

- αν $u \in U$, τότε $-u = (-1)u \in U$.
- $\mathbf{0} \in U$, αφού $u - u = \mathbf{0} \in U$.

Επομένως αν για κάποιο υποσύνολο A του \mathbb{k}^n μπορέσουμε και δείξουμε ότι $\mathbf{0} \notin A$, τότε το A δεν είναι υποχώρος του \mathbb{k}^n . Πως προκύπτουν, λοιπόν, οι υποχώροι; Σε αυτήν την ενότητα, θα μελετήσουμε τα διανύσματα που παράγουν τους διανυσματικούς υποχώρους του \mathbb{k}^n .

Παράδειγμα 3.2.2. Έστω $v \in \mathbb{k}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Το σύνολο

$$L = \{\kappa v : \kappa \in \mathbb{k}\}$$

είναι υποχώρος του \mathbb{k}^n . Πράγματι, δύο τυχαία στοιχεία του L είναι της μορφής $\kappa_1 v$ και $\kappa_2 v$ για κάποια $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{k}$. Επομένως

$$\kappa_1 v + \kappa_2 v = (\kappa_1 + \kappa_2)v \in L.$$

Αντίστοιχα για το βαθμωτό γινόμενο, έστω κv τυχαίο στοιχείο του L για κάποια $\kappa \in \mathbb{k}$, και έστω c τυχαίο στοιχείο του \mathbb{k} . Τότε

$$c(\kappa v) = (c\kappa)v \in L.$$

Γράφουμε $L = S(\{v\})$ και λέμε ότι το σύνολο $\{v\}$ παράγει την L . Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσει κάποιος ότι αν καθορίσουμε ένα μη μηδενικό $s \in \mathbb{k}$, τότε

$$L = S(\{s \cdot v\}) .$$

Σημειώνουμε ότι όταν $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ και $n = 2$ ή 3 , τότε L είναι ευθεία στον \mathbb{R}^n που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, βλ. Παράδειγμα 3.1.1.1. Έτσι, ο υποχώρος

$$S(\{(1, 2)\}) = \{(\kappa, 2\kappa) : \kappa \in \mathbb{R}\}$$

είναι η ευθεία στον \mathbb{R}^2 που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(1, 2)$. Αντίστοιχα, ο υποχώρος

$$S(\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}) \subset \mathbb{R}^n$$

είναι η ευθεία στον \mathbb{R}^n που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Έστω τώρα X είναι υποσύνολο διανυσμάτων του \mathbb{k}^n . Ορίζουμε το υποσύνολο $S(X) \subset \mathbb{k}^n$ ως εξής:

$$S(X) = \{ \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_s x_s : \kappa_j \in \mathbb{k}, x_j \in X, 1 \leq j \leq s, s \in \mathbb{N} \}.$$

Λέμε ότι το σύνολο $S(X)$ είναι ο χώρος που **παράγεται** από το X (space spanned by X) και λέμε ότι το X **παράγει** (spanning set) τον $S(X)$. Τα στοιχεία του $S(X)$ λέγονται **γραμμικοί συνδυασμοί** (linear combinations) των στοιχείων του X με συντελεστές από το \mathbb{k} . Παρατηρούμε ότι:

$$S(\emptyset) = \{0\} \text{ και } X \subset S(X).$$

Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε ότι το σύνολο $S(X)$ είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n . Πράγματι:

- αν $u \in S(X)$, τότε υπάρχουν $\kappa_1, \dots, \kappa_s \in \mathbb{k}$ και $x_1, \dots, x_s \in X$ τέτοια ώστε $v = \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_s x_s$. Αν $t \in \mathbb{k}$, τότε

$$tv = (t\kappa_1)x_1 + \cdots + (t\kappa_s)x_s \in S(X).$$

- αν $u, w \in S(X)$, τότε υπάρχουν $\kappa_1, \dots, \kappa_s$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{k}$ καθώς και διανύσματα x_1, \dots, x_s και $y_1, \dots, y_t \in X$ τέτοια ώστε $v = \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_s x_s$ και $w = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_t y_t$. Επομένως

$$v + w = \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_s x_s + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_t y_t \in S(X).$$

Σημειώνουμε ότι αν V είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n , τότε $S(V) \subset V$. Συνεπώς

$$V \subset S(V) \subset V \Rightarrow V = S(V).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2.3. Ένα υποσύνολο V διανυσμάτων στο \mathbb{k}^n είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n αν και μόνο αν $V = S(X)$ για κάποιο $X \subset \mathbb{k}^n$.

Όταν ο V είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n , επιθυμούμε να βρούμε όσο το δυνατόν μικρότερα σε πλήθος υποσύνολα του V που να παράγουν τον V .

Παραδείγματα 3.2.4.

1. Έστω $X = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{C}^2$. Θα δείξουμε ότι $S(X) = \mathbb{C}^2$. Πράγματι έστω $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Τότε $a, b \in \mathbb{C}$ και

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \in S(X).$$

Επομένως

$$\mathbb{C}^2 \subset S(X) \subset \mathbb{C}^2 \Rightarrow \mathbb{C}^2 = S(X).$$

Είναι φανερό ότι το διάνυσμα $(1, 0)$ δεν παράγει τον \mathbb{C}^2 αφού το διάνυσμα $(0, 1) \notin S(\{(1, 0)\})$. Αντίστοιχα, $S(\{(0, 1)\}) \neq \mathbb{C}^2$ αφού $(1, 0) \notin S(\{(0, 1)\})$. Επομένως δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του X που να παράγει τον \mathbb{C}^2 .

Αν δουλέψουμε στον \mathbb{R}^2 και θεωρήσουμε το $X = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$, προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ότι $\mathbb{R}^2 = S(X)$.

2. Έστω e_i το διάνυσμα στον \mathbb{k}^n που έχει μονάδα για την i συντεταγμένη και μηδέν σε όλες τις άλλες. Έτσι,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Θεωρούμε το υποσύνολο $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ του \mathbb{k}^n . Αν $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n$, τότε

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in S(X).$$

Επομένως

$$\mathbb{k}^n \subset S(X) \subset \mathbb{k}^n \Rightarrow \mathbb{k}^n = S(X).$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{k}^n = S(\{e_1, \dots, e_n\}).$$

3. Ο υποχώρος $\{0\} = S(\{0\})$ λέγεται ο **μηδενικός υποχώρος** του \mathbb{k}^n .

4. Θα αποδείξουμε ότι

$$S(\{(1, 2), (2, 4)\}) = S(\{(1, 2)\}).$$

Πράγματι είναι φανερό ότι $S(\{(1, 2)\}) \subset S(X)$. Επίσης,

$$\begin{aligned} S(X) &= \{\kappa(1, 2) + \lambda(2, 4) : \kappa, \lambda \in \mathbb{k}\} = \{(\kappa + 2\lambda, 2\kappa + 4\lambda) : \kappa, \lambda \in \mathbb{k}\} = \\ &= \{(\kappa + 2\lambda)(1, 2) : \kappa, \lambda \in \mathbb{k}\} = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{k}\}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$S(\{(1, 2)\}) \subset S(X) \subset S(\{(1, 2)\}) \Rightarrow S(\{(1, 2)\}) = S(X).$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$S(X) = S(\{(2, 4)\}) = S(\{(3, 6)\}),$$

και άρα το διάνυσμα που παράγει τον $S(X)$ δεν είναι μοναδικό.

5. Έστω $X = \{(1, 2), (0, 1)\}$. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων, θα δείξουμε ότι $S(X) = \mathbb{k}^2$. Πράγματι έστω $(\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2$. Θα βρούμε $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε

$$(\alpha, \beta) = x_1(1, 2) + x_2(0, 1).$$

Πρέπει, λοιπόν, να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ 2x_1 + x_2 &= \beta. \end{aligned}$$

Αφού

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta - 2\alpha \end{array} \right].$$

προκύπτει ότι $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta - 2\alpha$. Άρα

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 2\alpha + (\beta - 2\alpha)) = \alpha(1, 2) + (\beta - 2\alpha)(0, 1). \quad (3.2.4.1)$$

Επομένως $S(X) = \mathbb{k}^2$. Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι

$$e_1 = 1(1, 2) - 2(0, 1) \text{ και } e_2 = 0(1, 2) + 1(0, 1),$$

όπως προβλέπει η Σχέση (3.2.4.1).

6. Έστω $X = \{u, w\}$, όπου u, w είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του \mathbb{k}^2 και u δεν είναι πολλαπλάσιο του w . Θα αποδείξουμε ότι $S(X) = \mathbb{k}^2$.

Πράγματι, έστω ότι $u = (a_1, a_2)$, $w = (b_1, b_2)$ όπου $a_i, b_i \in \mathbb{k}$, για $i = 1, 2$ και έστω $h = (c_1, c_2) \in \mathbb{k}^2$. Παρατηρούμε ότι $h \in S(X)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $k, t \in \mathbb{k}$, έτσι ώστε

$$h = ku + tw .$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των u, w, h σε αυτήν την εξίσωση, βλέπουμε ότι η δυάδα (k, t) πρέπει να είναι λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 &= c_1 \\ xa_2 + yb_2 &= c_2 . \end{aligned} \tag{3.2.4.2}$$

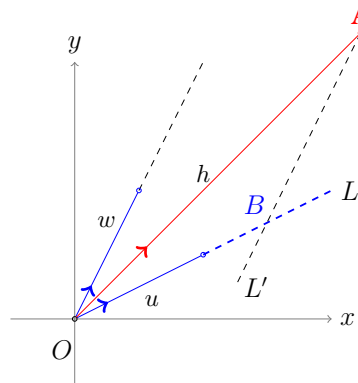
Αυτό θα συμβεί αν και μόνο αν σύστημα (3.2.4.2) είναι συμβατό. Ο πίνακας των συντελεστών είναι

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι αν η ορίζουσα $\det A = a_1b_2 - b_1a_2$ είναι μηδέν, τότε $(a_2, b_1) \neq k(b_2, b_1)$ για κάποιο $k \in \mathbb{k}$. Όμως, από την υπόθεση αυτό δεν συμβαίνει, άρα $\text{rank}(A) = 2$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, το Σύστημα (3.2.4.2) είναι συμβατό και έχει λύση. Άρα $h \in U$ και επομένως

$$\mathbb{k}^2 \subset U \subset \mathbb{k}^2 \Rightarrow U = \mathbb{k}^2 .$$

Σημειώνουμε ότι όταν $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικά επιχειρήματα για την απόδειξη. Πράγματι, έστω $h, u, w \in \mathbb{R}^2$, όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3.11: $S(\{u, w\}) = \mathbb{R}^2$

Σημειώνουμε A , το τελικό σημείο του h . Προεκτείνουμε το διάνυσμα u στην ευθεία L . Θεωρούμε L' , την ευθεία που είναι παράλληλη προς το w και διέρχεται από το A . Οι ευθείες L και L' δεν είναι παράλληλες, αφού τα διανύσματα u και w δεν είναι παράλληλα. Επομένως οι L και L' τέμνονται σε κάποιο σημείο, που σημειώνουμε με B . Αφού $\vec{OB} = ku$, $\vec{OA} = tw$ για κάποια $k, t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$h = \vec{OB} + \vec{BA} = ku + tw \in U .$$

7. Σε αυτό το παράδειγμα, θα βρούμε μία εξίσωση που ικανοποιείται από τα στοιχεία του $S(X) \subset \mathbb{R}^3$ όπου $X = \{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$. Αφού

$$S(X) = \{ \kappa(1, 0, 1) + \lambda(0, 2, 0) : \kappa, \lambda \in \mathbb{k} \},$$

το διάνυσμα $(a, b, c) \in S(X)$ αν και μόνο αν υπάρχουν κ, λ έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

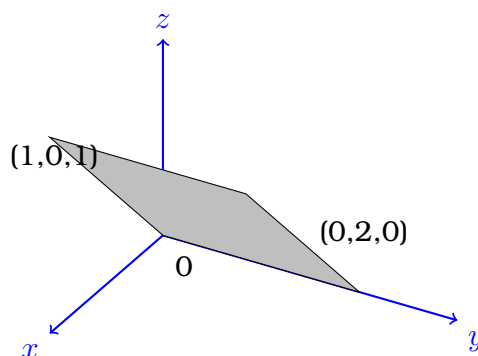
είναι συμβατό. Αφού

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 1 & 0 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c-a \end{array} \right]$$

συμπεραίνουμε ότι το προηγούμενο σύστημα είναι συμβατό αν και μόνο αν $a-c=0$, δηλ. αν $a=c$. Επομένως

$$S(X) = \{(a, b, a) : a, b \in \mathbb{k}\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{k}^3 : a-c=0\}.$$

Ο υποχώρος $S(X)$ είναι ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων και απεικονίζεται ως εξής:



Σχήμα 3.12: $S(\{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}) = \{(a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$

8. Αντίστροφα, ξεκινώντας από μία εξίσωση που περιγράφει τα διανύσματα ενός διανυσματικού υποχώρου U στον \mathbb{k}^3 , μπορούμε εύκολα να βρούμε δύο διανύσματα u_1, u_2 έτσι ώστε $U = S(\{u_1, u_2\})$. Θα δείξουμε τη διαδικασία για τον υποχώρο

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{k}^3 : 3x + y - 2z = 0 \}.$$

Αφού $3x + y - 2z = 0$, έπεται ότι $-3x + 2z = y$. Έτσι αν $(x, y, z) \in U$, τότε

$$(x, y, z) = (x, -3x + 2z, z) = x(1, -3, 0) + z(0, 2, 1).$$

Θέτουμε $u_1 = (1, -3, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ και παρατηρούμε ότι $u_1, u_2 \in U$. Επομένως, αν $X = \{u_1, u_2\}$, τότε

$$U = \{ xu_1 + zu_2 : x, z \in \mathbb{k} \} = S(X).$$

Το παράγον σύνολο X δεν είναι μοναδικό. Εάν λύσουμε την εξίσωση $3x + y - 2z = 0$ ως προς το z τότε βρίσκουμε ένα διαφορετικό σύνολο διανυσμάτων που παράγει το U . Πράγματι

$$z = 1/2(3x + y) \Rightarrow (x, y, z) = (x, y, \frac{3x + y}{2}) = x(1, 0, \frac{3}{2}) + y(0, 1, \frac{1}{2})$$

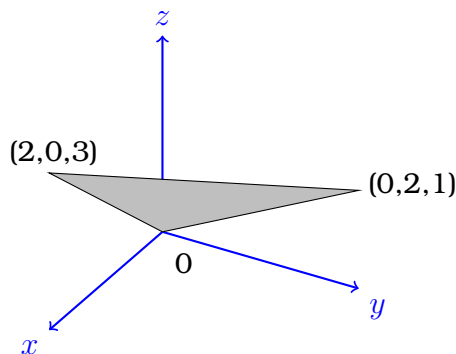
και

$$U = S(Y), \text{ όπου } Y = \{(1, 0, \frac{3}{2}), (0, 1, \frac{1}{2})\}.$$

Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι

$$U = S(\{(2, 0, 3), (0, 2, 1)\}).$$

Όταν $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, το Σχήμα 3.13 απεικονίζει τον U .



Σχήμα 3.13: $U = S(\{(2, 0, 3), (0, 2, 1)\})$

9. Έστω

$$U = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n : a_1 - a_2 = 0\}.$$

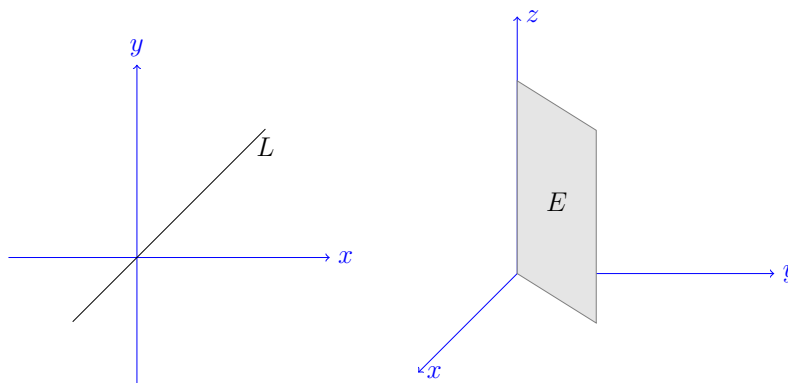
Στις ασκήσεις ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι το σύνολο U είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n , βλ. Άσκηση 3.4.2. Παρατηρούμε ότι στον \mathbb{k}^2 , ένα διάνυσμα παράγει τον U :

$$U = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{k}^2 : a_1 - a_2 = 0\} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{k}^2 : a_1 - a_2 = 0\} = \{(a_2, a_2) : a_2 \in \mathbb{k}\} = \{a_2(1, 1) : a_2 \in \mathbb{k}\} = S(\{(1, 1)\}).$$

Στον \mathbb{k}^3 , όμως, χρειαζόμαστε δύο διανύσματα:

$$U = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{k}^3 : a_1 - a_2 = 0\} = \{(a_2, a_2, a_3) : a_2, a_3 \in \mathbb{k}\} = \{a_2(1, 1, 0) + a_3(0, 1, 0) : a_2, a_3 \in \mathbb{k}\} = S(\{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}).$$

Αντίστοιχα, στον \mathbb{k}^n χρειαζόμαστε $n - 1$ διανύσματα για να παράξουμε τον U . Στο Σχήμα (3.14) βλέπουμε τη γραφική αναπαράσταση του U στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 .



Σχήμα 3.14: Οι λύσεις της εξίσωσης $x - y = 0$ στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3

Στη συνέχεια ορίζουμε το **άθροισμα** (sum) και την **τομή** (intersection) δύο υποχώρων του \mathbb{k}^n . Έστω U και W δύο υποχώροι του \mathbb{k}^n . Το άθροισμα $U + W$ των U και W ορίζεται ως εξής:

$$U + W = \{ u + w : u \in U \text{ και } w \in W \}.$$

Παρατηρούμε ότι $U \subset U + W$, αφού $0 \in W$ και $u = u + 0$. Ομοίως $W \subset U + W$. Η επόμενη πρόταση, προκύπτει εύκολα από τους σχετικούς ορισμούς:

Αν $U = S(X_1)$, $W = S(X_2)$ όπου X_1, X_2 είναι υποσύνολα του \mathbb{k}^n , τότε

$$U + W = S(X_1 \cup X_2)$$

και άρα το άθροισμα $U + W$ είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n .

Η τομή $U \cap W$ ορίζεται ως εξής:

$$U \cap W = \{ v : v \in U \text{ και } v \in W \}.$$

Προκύπτει εύκολα ότι $U \cap W$ είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n . Στα παραδείγματα θα δούμε ότι τα διανύσματα που ανήκουν στην τομή $U \cap W$ προκύπτουν ως λύσεις ενός ομογενούς συστήματος.

Παραδείγματα 3.2.5.

1. Έστω $v = (1, 2)$, $e_2 = (0, 1)$ και

$$V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{k}^2 : 2x - y = 0 \} = S(\{(1, 2)\}) = S(\{v\})$$

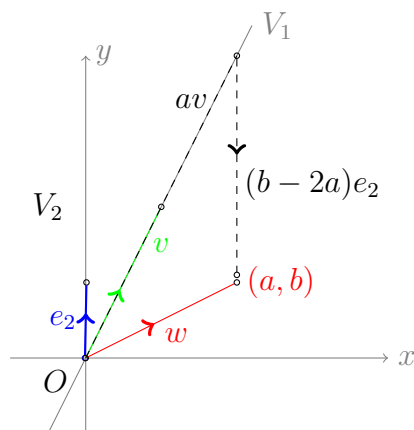
και

$$V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{k}^2 : x = 0 \} = S(\{0, 1\}) = S(\{e_2\}).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Στο Παράδειγμα 3.2.4.5 είδαμε ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{k}^2$. Συγκεκριμένα είδαμε ότι αν $w = (\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2$ τότε

$$w = \alpha \cdot v + (\beta - 2\alpha) \cdot e_2.$$

Στο Σχήμα (3.15), απεικονίζουμε τους χώρους V_1 και V_2 στον \mathbb{R}^2 .

Σχήμα 3.15: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$, $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$

2. Θεωρούμε τους υποχώρους

$$V_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{k}^3 : x - z = 0 \} = S(\{v_1, v_2\}) ,$$

$$V_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{k}^3 : x + y + z = 0 \} = S(\{w_1, w_2\}) ,$$

όπου $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ και $w_1 = (1, 0, -1)$, $w_2 = (0, 1, -1)$. Θα υπολογίσουμε την τομή $V_1 \cap V_2$. Είναι φανερό ότι $(x, y, z) \in V_1 \cap V_2$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 . \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ότι

$$V_1 \cap V_2 = \{ (x, -2x, x) : x \in \mathbb{k} \} = \{x(1, -2, 1) : x \in \mathbb{k}\}.$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{k}^3$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι $(a, b, c) \in V_1 + V_2$ αν και μόνο αν υπάρχουν (x_1, x_2, x_3, x_4) έτσι ώστε

$$(a, b, c) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 w_1 + x_4 w_4 ,$$

δηλ. αν και μόνο αν το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= a \\ x_2 + x_4 &= b \\ x_1 - x_3 - x_4 &= c \end{aligned}$$

είναι συμβατό. Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Αφού ο A έχει βαθμίδα 3, έπεται ότι το σύστημα είναι συμβατό, για κάθε διάνυσμα $(a, b, c) \in \mathbb{k}^3$. Επομένως $V_1 + V_2 = \mathbb{k}^3$.

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$. Ο **μηδενοχώρος** (nullspace) του A συμβολίζεται με $\text{null}(A)$ και είναι ο υποχώρος του \mathbb{k}^n που παράγεται από τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$. Ο **χώρος γραμμών** (row space) του A συμβολίζεται με $\Gamma(A)$ και είναι ο υποχώρος του \mathbb{k}^n που παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις m γραμμές του A , δηλ.

$$\Gamma(A) := S(\{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})\}) \subset \mathbb{k}^n.$$

Ο **χώρος στηλών** (column space) του A συμβολίζεται με $\Sigma(A)$ και είναι ο υποχώρος του \mathbb{k}^m που παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις n στήλες του A , δηλ.

$$\Sigma(A) := S(\{(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\}) \subset \mathbb{k}^m.$$

Σημειώνουμε την επόμενη χρήσιμη διαπίστωση.

Ο χώρος γραμμών του A είναι ο χώρος στηλών του A^T , ενώ ο χώρος στηλών του A είναι ο χώρος γραμμών του A^T , δηλ.

$$\Gamma(A) = \Sigma(A^T) \text{ και } \Sigma(A) = \Gamma(A^T).$$

Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι κάθε λύση του $AX = \mathbf{0}$ ανήκει στον $\text{null}(A)$. Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές, όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.1.3. Διατυπώνουμε αυτήν την διαπίστωση στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2.6. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$. Κάθε στοιχείο του $\text{null}(A)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$.

Σημειώνουμε ότι αν $B \neq \mathbf{0}$, τότε το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$ δεν είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n , αφού το $\mathbf{0}$ δεν ανήκει στο σύνολο των λύσεων.

Παράδειγμα 3.2.7. Θα υπολογίσουμε το μηδενοχώρο, το χώρο γραμμών και το χώρο στηλών του πίνακα A όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{C}).$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Οι λύσεις του $AX = \mathbf{0}$ είναι:

$$\begin{aligned} \{(x, y, z, w) : y + 2w = 0, z = 0, x, w \in \mathbb{k}\} &= \{(x, -2w, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\} = \\ &= \{x(1, 0, 0, 0) + w(0, -2, 0, 1) : x, w \in \mathbb{k}\}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\text{null}(A) = S(\{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 1)\}) .$$

Έστω, τώρα,

$$v_1 = (0, 1, 0, 2), v_2 = (0, 0, 1, 0)$$

τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές γραμμές του A και

$$w_1 = (1, 0, 0, 0), w_2 = (0, 1, 0, 0), w_3 = (2, 0, 0, 0)$$

τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές στήλες του A . Τότε

$$\Gamma(A) = S(\{v_1, v_2, \mathbf{0}\}) = S(\{v_1, v_2\}) \subset \mathbb{C}^4$$

και

$$\Sigma(A) = S(\{\mathbf{0}, w_1, w_2, w_3\}) = S(\{w_1, w_2, w_3\}) = S(\{w_1, w_2\}) \subset \mathbb{C}^3.$$

Για να εξηγήσουμε την τελευταία ισότητα σημειώνουμε ότι αν $u \in \Sigma(A)$, τότε υπάρχουν $k, t, s \in \mathbb{k}$, έτσι ώστε $u = kw_1 + tw_2 + sw_3$. Επομένως, $u = (k + 2s)w_1 + tw_2$, αφού $w_3 = 2w_1$. Ο αναγνώστης καλείται να βρει την εξίσωση της οποίας το σύνολο των λύσεων είναι ο $\Sigma(A)$.

Παρατήρηση 3.2.8. Πολλές φορές είναι χρήσιμο και βολικό να ταυτίζουμε τα στοιχεία του \mathbb{k}^m με $m \times 1$ πίνακες με στοιχεία από το \mathbb{k} . Θεωρούμε, λοιπόν, τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{k}^m \rightarrow \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{k})$, όπου

$$(b_1, \dots, b_m) \mapsto \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα προς ένα (one to one) και επί (onto), δηλ. κάθε διάνυσμα του \mathbb{k}^m αντιστοιχεί σε ακριβώς έναν πίνακα του $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{k})$ και αντίστροφα. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την αντιστοιχία πολλές φορές στη συνέχεια αυτού του συγγράμματος. Αν $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{k}^m$, γράφουμε

$$A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n],$$

εννοώντας τον $m \times n$ πίνακα με στήλες τους πίνακες $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$. Για παράδειγμα, αν $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, 2)$, $v_3 = (2, 4)$, τότε με $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ εννοούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$ και έστω $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{k})$. Το γινόμενο AX είναι το παρακάτω άθροισμα:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε πότε τα συστήματα $AX = B$ και $A^T X = C$ είναι συμβατά ως εξής:

Πρόταση 3.2.9. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό αν και μόνο $(b_1, \dots, b_m) \in \Sigma(A)$. Το σύστημα $A^T X = C$ είναι συμβατό αν και μόνο αν $(c_1, \dots, c_n) \in \Gamma(A)$.

Η χρησιμότητα της Πρότασης 3.2.9 έγκειται στο ότι μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το χώρο γραμμών και στηλών ενός πίνακα.

Παράδειγμα 3.2.10. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας του Παραδείγματος 3.2.7. Το σύστημα $AX = [1 \ 1 \ 1]^T$ δεν είναι συμβατό, όπως είναι φανερό από τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Επομένως το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ δεν ανήκει στον χώρο στηλών του πίνακα A . Το διάνυσμα $(0, 2, 2, 4)$ ανήκει στον χώρο γραμμών του πίνακα A , αφού το σύστημα

$$A^T X = [0 \ 2 \ 2 \ 4]^T$$

είναι συμβατό, όπως είναι φανερό από τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right].$$

Στα Παραδείγματα 3.2.4 είδαμε ότι το παράγον σύνολο X του υποχώρου U του \mathbb{k}^n δεν είναι μοναδικά ορισμένο. Για τον ίδιο υποχώρο U υπάρχουν (άπειρα τον αριθμό) σύνολα X έτσι ώστε $S(X) = U$. Τα σύνολα που παράγουν τον U μπορεί να διαφέρουν και ως προς το πλήθος τους. Στην επόμενη ενότητα θα μας απασχολήσουν ερωτήματα που αφορούν την εύρεση συνόλων που παράγουν τον U και έχουν το μικρότερο δυνατό πλήθος στοιχείων.

Ασκήσεις Ενότητας 3.2

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $L = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \}$ δεν είναι υποχώρος του \mathbb{R}^3 .
2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $U = \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n : a_1 - a_2 = 0 \}$ είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n . Για $n = 4$ να βρεθεί ένα παράγον σύνολο.
3. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $L = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \}$ είναι υποχώρος του \mathbb{R}^3 και να βρείτε ένα παράγον σύνολο.
4. Δίνονται τα υποσύνολα

$$U = \{ (k, k, k) : k \in \mathbb{R} \} \quad \text{και} \quad V = \{ (0, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

του \mathbb{R}^3 . Να αποδείξετε ότι οι U, V είναι υποχώροι του \mathbb{R}^3 . Να βρείτε σύνολα που παράγουν τους U και V . Να υπολογίσετε την τομή $U \cap V$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $S(\{(1, 2, 0), (1, 0, 1)\})$.

6. Να αποδείξετε ότι για τα υποσύνολα

$$X = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad \text{και} \quad Y = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

του \mathbb{R}^2 ισχύει ότι $S(X) = S(Y)$.

7. Να ελέγξετε αν το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ είναι στο χώρο στηλών και γραμμών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3.3 Βάσεις και Γραμμική Ανεξαρτησία, I

Στη προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι οι μη μηδενικοί υποχώροι του \mathbb{k}^n έχουν *άπειρα* το πλήθος παράγοντα σύνολα. Μας ενδιαφέρουν τα *ελαχιστοτικά* παράγοντα σύνολα. Τι εννοούμε με αυτό; Έστω ότι V είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n . Ένα παράγον σύνολο X του V είναι **ελαχιστοτικό** (minimal) αν δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο (δηλ. διάφορο του X) του X που να παράγει τον V . Θα δούμε ότι όλα τα ελαχιστοτικά παράγοντα σύνολα του V έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα για θεωρητικούς αλλά και υπολογιστικούς λόγους.

Ορισμός 3.3.1. Έστω ότι ο V είναι μη μηδενικός διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n και ότι B είναι ένα υποσύνολο διανυσμάτων του V έτσι ώστε $V = S(B)$. Αν δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο B' του B έτσι ώστε $V = S(B')$ να παράγει τον V , τότε λέμε ότι το σύνολο B είναι **βάση** (basis) του V . Ορίζουμε τη **βάση** του μηδενικού υποχώρου του \mathbb{k}^n να είναι το κενό σύνολο \emptyset .

Τονίζουμε ότι το κενό σύνολο είναι βάση *μόνο* για το μηδενικό υποχώρο του \mathbb{k}^n . Όταν η σειρά των στοιχείων σε μία βάση είναι καθορισμένη, τότε λέμε ότι η βάση είναι **διατεταγμένη** (ordered basis). Χρησιμοποιούμε παρενθέσεις αντί για αγκύλες για να δηλώνουμε τα διατεταγμένα σύνολα.

Παραδείγματα 3.3.2.

1. Έστω V η ευθεία $S(\{v\})$, όπου $v \neq 0$. Το $\{v\}$ παράγει τον V και $V \neq 0$. Αφού το μόνο γνήσιο υποσύνολο του $\{v\}$ είναι το κενό σύνολο \emptyset , έπεται ότι το σύνολο $\{v\}$ είναι βάση για το V .
2. Έστω $V = S(\{(1, 2), (2, 4)\})$, όπως στο Παράδειγμα 3.2.4.4. Αφού $V = S(\{(1, 2)\})$, το σύνολο $\{(1, 2), (2, 4)\}$ δεν είναι βάση του V . Το σύνολο $B = \{(1, 2)\}$ είναι βάση του V .
3. Στο Παράδειγμα 3.2.4.2, είδαμε ότι $\mathbb{k}^n = S(X)$ όπου $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ και

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Έστω $X' \subsetneq X$ και έστω ότι $e_i \notin X'$, για κάποιο i . Τότε είναι φανερό ότι e_i δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του X' και $e_i \notin S(X')$. Επομένως $S(X') \neq \mathbb{k}^n$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι βάση για τον \mathbb{k}^n .

Η **κανονική βάση** (canonical basis) για τον \mathbb{k}^n είναι η διατεταγμένη βάση $B = (e_1, \dots, e_n)$.

4. Έστω $X = \{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (2, 5, 2)\}$ και $V = S(X)$. Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι

$$v_3 = 2v_1 + v_2 \text{ και άρα } S(\{v_1, v_2\}) = V.$$

Αφού, το γνήσιο υποσύνολο $\{v_1, v_2\} \subsetneq X$ παράγει τον V , συμπεραίνουμε ότι το X δεν είναι βάση για τον V . Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι: (α) $V \neq S(\{v_2\})$, και (β) $V \neq S(\{v_1\})$, συνεπώς $\{v_1, v_2\}$ είναι βάση για τον V .

Πως όμως μπορούμε στη γενική περίπτωση, ξεκινώντας από ένα παράγον σύνολο X για το διανυσματικό υποχώρο V του \mathbb{k}^n , να βρούμε μία βάση για τον V ; Αναλύουμε τι συνέβη στο τελευταίο παράδειγμα. Έστω ότι το σύνολο X δεν είναι βάση για το χώρο $V = S(X)$. Υπάρχει, λοιπόν, $B \subsetneq X$, έτσι ώστε $S(B) = S(X)$. Αφού $B \neq X$ υπάρχει $v \in X \setminus B$. Τότε όμως $v \in S(B)$, (αφού $S(B) = S(X)$ και $v \in S(X)$). Συμπεραίνουμε ότι το v είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του B , δηλ.

$$v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_m v_m, \text{ για κάποια } v_i \in B \text{ και } \kappa_i \in \mathbb{k} \text{ όπου } 1 \leq i \leq m.$$

Επομένως

$$v - \kappa_1 v_1 - \kappa_2 v_2 - \dots - \kappa_m v_m = \mathbf{0}.$$

Υπάρχει λοιπόν ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του X που δίνει το μηδενικό διάνυσμα, όπου ο συντελεστής του v είναι μη μηδενικός. Αντίστροφα, αν $V = S(X)$ και υπάρχει μία σχέση της μορφής

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \dots + \kappa_m v_m = \mathbf{0}, \tag{3.3.2.1}$$

μεταξύ των v_1, \dots, v_n του X , όπου $\kappa_1 \neq 0$, τότε λύνοντας ως προς το v_1 και διαιρώντας με το κ_1 , προκύπτει ότι

$$v_1 = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1} v_2 - \dots - \frac{\kappa_m}{\kappa_1} v_m.$$

Επομένως, όταν και όπου εμφανίζεται το v_1 , μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με την προηγούμενη έκφραση. Άρα

$$V = S(X \setminus \{v_1\}).$$

Για να δηλώσουμε αυτήν την ιδιαιτερότητα, δίνουμε τους εξής ορισμούς.

Ορισμός 3.3.3. Έστω v_1, v_2, \dots, v_m στοιχεία του υποχώρου V του \mathbb{k}^n . Αν

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \dots + \kappa_m v_m = \mathbf{0}, \tag{3.3.3.1}$$

όπου τουλάχιστον ένα από τα $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m \in \mathbb{k}$ δεν είναι μηδέν, τότε η (3.3.3.1) λέγεται (μη μηδενική) **σχέση γραμμικής εξάρτησης** (linear dependence equation) ανάμεσα στα v_1, v_2, \dots, v_n και τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_n καλούνται **γραμμικά εξαρτημένα** (linearly dependent).

Όταν τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε κάθε σύνολο που τα περιέχει λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο σύνολο** (linearly dependent set). Παρατηρούμε ότι το $\mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού

$$1 \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

είναι μη μηδενική σχέση γραμμική εξάρτησης. Δεν είναι δύσκολο να συμπεράνει κανείς ότι το $\mathbf{0}$ είναι το μοναδικό διάνυσμα που είναι (μόνο του) γραμμικά εξαρτημένο.

Παρατήρηση 3.3.4. Έστω ότι v_1, v_2, \dots, v_m είναι διανύσματα του \mathbb{K}^n και έστω ότι

$$A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m] .$$

Τα $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ ικανοποιούν την Έκφραση (3.3.3.1) ακριβώς όταν $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$ είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.4, το σύστημα $AX = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενική λύση ακριβώς όταν $\text{rank}(A) \neq m$. Αποδειξαμε λοιπόν το εξής συμπέρασμα.

$$\text{Τα } v_1, \dots, v_m \text{ είναι γραμμικά εξαρτημένα} \iff \text{rank}([v_1 \ \cdots \ v_m]) < m.$$

Θυμίζουμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα είναι το πολύ ίση με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα, βλ. Ενότητα 1.2. Επομένως, αν μας δίνονται m διανύσματα στον \mathbb{K}^n και $m > n$, τότε τα διανύσματα είναι με βεβαιότητα γραμμικά εξαρτημένα.

Αν τα v_1, v_2, \dots, v_n δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε λέμε ότι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** (linearly independent) και ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο** (linearly independent set). Έστω ότι $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι $A = [v_1 \ \cdots \ v_n]$. Τότε $\text{rank}(A) = n$ και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Από την Πρόταση 3.2.9, συμπεραίνουμε ότι κάθε διάνυσμα του \mathbb{K}^n μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, \dots, v_n . Συνοψίζοντας, ισχύει το εξής συμπέρασμα:

Πρόταση 3.3.5. Έστω τα διανύσματα v_1, \dots, v_m του \mathbb{K}^n και $A = [v_1 \ \cdots \ v_m]$. Ισχύουν τα εξής:

- i)** Τα v_1, \dots, v_m είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = m$.
- ii)** Αν $n < m$, τότε τα v_1, \dots, v_m είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- iii)** Αν $n = m$, τότε τα v_1, \dots, v_m είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.
- iv)** Αν $n = m$ και $\det A \neq 0$, τότε $S(\{v_1, \dots, v_m\}) = \mathbb{K}^n$.

Θα εφαρμόσουμε αυτά τα κριτήρια στα επόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα 3.3.6.

1. Τα στοιχεία $v_1 = (1, 2)$ και $v_2 = (2, 4)$ του \mathbb{K}^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $v_2 = 2v_1$ και $2v_1 - v_2 = 0$. Η δυάδα $(2, -1)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$ όπου $A = [v_1 \ | \ v_2]$. Στη συνέχεια γράφουμε τον πίνακα A και τη μετάβαση του σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Είναι φανερό ότι $\text{rank} A = 1$.

2. Τα διανύσματα e_1, \dots, e_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού

$$[e_1 \ | \ e_2 \ | \ \cdots \ | \ e_n] = I_n$$

και $\text{rank}(I_n) = n$.

3. Έστω $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (2, 5, 2)$. Τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $v_3 = 2v_1 + v_2$ και άρα

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0. \quad (3.3.6.1)$$

Στη συνέχεια γράφουμε τον πίνακα $A = [v_1 \mid v_2 \mid v_3]$ και τη μετάβαση του σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις του συστήματος $AX = 0$ δίνουν το σύνολο

$$\{(-2t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

και ότι $t = -1$ δίνει τη σχέση γραμμικής εξάρτησης (3.3.6.1).

4. Τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (1, 3, 5)$, $v_3 = (0, 4, 9)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

έχει βαθμίδα τρία.

Έστω, λοιπόν, ότι $V = S(B)$. Πότε είναι το B βάση του V ; Έχουμε ήδη εξετάσει τι πρέπει να συμβαίνει και η επόμενη πρόταση δίνει την πλήρη απάντηση.

Πρόταση 3.3.7. Έστω ότι $V = S(B)$. Το B είναι βάση του V αν και μόνο αν τα στοιχεία του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω ότι $V = S(X)$. Για να βρούμε μία βάση για τον V , θα εστιάσουμε σε γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα B του X έτσι ώστε $B \cup \{v\}$ να είναι γραμμικά εξαρτημένο, για κάθε $v \in X \setminus B$.

Παράδειγμα 3.3.8. Στο Παράδειγμα 3.3.8.4, είδαμε ότι τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (1, 3, 5)$, $v_3 = (0, 4, 9)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως αν $D = \{v_1, v_2, v_3\}$, τότε το D είναι βάση για τον διανυσματικό χώρο $V = S(D)$. Ο πίνακας $A = [v_1 \mid v_2 \mid v_3]$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό για κάθε B . Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.9, κάθε διάνυσμα του \mathbb{k}^3 ανήκει στο χώρο στηλών του A . Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του \mathbb{k}^3 ανήκει στον V . Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$V = \mathbb{k}^3 \text{ και ότι το } D \text{ είναι βάση για τον } \mathbb{k}^3.$$

Είναι δυνατόν ο διανυσματικός υποχώρος V του \mathbb{k}^n να έχει δύο βάσεις με διαφορετικό αριθμό στοιχείων; Ας εξερευνήσουμε λίγο αυτήν την περίπτωση. Έστω ότι $B_1 = \{v\}$ και ότι $B_2 = \{w_1, w_2\}$ είναι δύο βάσεις του V . Αφού $w_1 \in V$ και B_1 είναι βάση του V , έπεται ότι $w_1 = t_1v$. Ομοίως $w_2 = t_2v$. Επίσης αφού $w_2 \neq 0$ (γιατί;) έχουμε ότι $t_2 \neq 0$. Τότε όμως

$$w_1 - \frac{t_1}{t_2}w_2 = t_1v - \frac{t_1}{t_2}t_2v = 0$$

είναι μία μη μηδενική σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στοιχείων της βάσης B_2 και αυτό είναι άτοπο. Αυτή είναι και η βασική ιδέα της απόδειξης του επόμενου πολύ σημαντικού θεωρήματος. Για την πλήρη απόδειξη, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία, βλ. για παράδειγμα το σύγγραμμα [2, Ενότητα 2.4].

Θεώρημα 3.3.9. Κάθε διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n έχει μία βάση. Όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού υποχώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης είναι εξαιρετικά σημαντική έννοια.

Ορισμός 3.3.10. Έστω V ένας διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n . Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του V λέγεται **διάσταση** (*dimension*) του V και συμβολίζεται $\dim_{\mathbb{k}}(V)$.

Η διάσταση του μηδενικού υποχώρου του \mathbb{k}^n είναι το μηδέν, γιατί δεχθήκαμε ότι το κενό σύνολο είναι βάση αυτού του υποχώρου. Κάθε άλλος υποχώρος έχει διάσταση ένα θετικό ακέραιο, δηλ. αν $V \neq 0$ τότε $\dim_{\mathbb{k}}(V) > 0$.

Παραδείγματα 3.3.11.

1. $\dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n) = n$
2. Έστω V υποχώρος του \mathbb{k}^2 . Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 2$, τότε $V = \mathbb{k}^2$. Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 1$, τότε ο $V = S(\{v\})$, όπου $v \neq 0$. Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 0$, τότε $V = \{0\}$. Αυτοί είναι και οι μοναδικοί τύποι υποχώρων που έχει ο \mathbb{k}^2 .
3. Οι γνήσιοι υποχώροι του \mathbb{k}^3 έχουν διάσταση μικρότερη του 3. Έστω V υποχώρος του \mathbb{k}^3 . Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 0$, τότε ο V είναι ο μηδενικός υποχώρος. Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 1$, τότε $V = S(\{v\})$ όπου $v \neq 0$. Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 2$, τότε $V = S(\{v_1, v_2\})$ όπου v_1, v_2 δεν είναι παράλληλα διανύσματα. Αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = 3$, τότε $V = \mathbb{k}^3$.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι για την εύρεση βάσης ενός διανυσματικού υποχώρου $V = S(X)$ του \mathbb{k}^n . Τους συνοψίζουμε στους αλγορίθμους (3.3.1) και (3.3.2).

Αλγόριθμος 3.3.1 Αλγόριθμος εύρεσης βάσης για τον υποχώρο $S(X) \subset \mathbb{k}^n$ ως υποσύνολο του X .

Είσοδος: $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{k}^n$

Έξοδος: Μία βάση B για τον $S(X)$ με $B \subset X$.

Βήμα 1 Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα $A = [v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_m]$.

Βήμα 2 Φέρνουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Βήμα 3 Έστω ότι οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες j_1, \dots, j_t . Τα διανύσματα v_{j_1}, \dots, v_{j_t} αποτελούν βάση του $S(X)$.

Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος (3.3.1) δίνει προτεραιότητα επιλογής στα πρώτα κατά σειρά διανύσματα. Έτσι αν θέλουμε να επιλέξουμε μία βάση που να περιέχει κάποια συγκεκριμένα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τα γράφουμε ως τις πρώτες στήλες του A .

Παράδειγμα 3.3.12. Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 3, -1)$, $v_3 = (1, 1, -3, 2)$ και $X = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V = S(X)$. Θα βρούμε μία βάση για τον V . Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα A είναι ο πίνακας

$$R = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι καθοδηγητικές μονάδες στον πίνακα R βρίσκονται στην πρώτη και δεύτερη στήλη του R . Έτσι $\{v_1, v_2\}$ είναι μία βάση για τον V και $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$.

Αφού $\{v_1, v_2\}$ είναι βάση για τον V , το v_3 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1 και v_2 . Επιθυμούμε, λοιπόν, να βρούμε $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $v_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2$. Για να βρούμε τους συντελεστές k_1, k_2 αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (3.3.12.1)$$

Παρατηρούμε ότι ο A είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (3.3.12.1). Οι λύσεις προκύπτουν από τον R . Το $(1, -1)$ είναι λύση και άρα

$$v_3 = v_1 - v_2.$$

Άρα

$$v_1 - v_2 - v_3 = 0$$

είναι μη μηδενική σχέση γραμμικής εξάρτησης των v_1, v_2, v_3 . Παρατηρούμε τον αναγνώστη να παρατηρήσει ότι η τρίτη στήλη του R είναι η διαφορά της δεύτερης στήλης του R από τη πρώτη και ότι οι αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις στήλες του A .

Είναι φανερό ότι η βάση που θα πάρουμε, όταν το X είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, εξαρτάται από τη διάταξη των στοιχείων του X και των αντίστοιχων στηλών του A . Η μέθοδος του αλγορίθμου αυτού στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η βάση του $V = S(X)$ είναι ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X . Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι η βάση που προκύπτει είναι υποσύνολο του X . Είναι επίσης πολύ εύκολο να βρούμε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των διανυσμάτων του X από την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A .

Παρατήρηση 3.3.13. Έστω ότι $S(X) = V$ και έστω ότι αλλάζουμε κάποιο από τα διανύσματα του X με έναν από τους εξής τρόπους:

- αλλάζοντας τη σειρά των διανυσμάτων του X ,
- προσθέτοντας σε ένα διάνυσμα του X πολλαπλάσιο ενός άλλου διανύσματος του X ,
- πολλαπλασιάζοντας ένα διάνυσμα του X με κάποιο $0 \neq \kappa \in \mathbb{k}$.

Αν X_1 είναι το νέο σύνολο που προκύπτει από αυτήν την αλλαγή, τότε είναι εύκολο να παρατηρήσει κάποιος ότι $S(X_1) = S(X) = V$.

Σε αυτήν την παρατήρηση στηρίζεται η επόμενη μέθοδος εύρεσης βάσης του $V = S(X)$.

Αλγόριθμος 3.3.2 Αλγόριθμος εύρεσης βάσης για τον υποχώρο $S(X) \subset \mathbb{k}^n$ σε κλιμακωτή μορφή.

Είσοδος: $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{k}^n$.

Έξοδος: Βάση για το διανυσματικό υποχώρο $S(X)$ του \mathbb{k}^n .

Βήμα 1 Θεωρούμε τον πίνακα $A = [v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_m]$.

Βήμα 2 Φέρνουμε τον A^T σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R .

Βήμα 3 Έστω ότι $t = \text{rank}(A^T)$ και ότι $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_t$ είναι οι μη μηδενικές γραμμές του R . Τα αντίστοιχα διανύσματα αποτελούν βάση για τον $S(X)$.

Εξαιτίας της θέσης των καθοδηγητικών μονάδων, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι τα διανύσματα με τις καθοδηγητικές μονάδες δεν μπορούν να προκύψουν από γραμμικούς συνδυασμούς των υπολοίπων. Η βάση που προκύπτει από τον προηγούμενο αλγόριθμο δεν είναι πάντα υποσύνολο του X . Το πλεονέκτημα, όμως, αυτής της μεθόδου είναι ότι τα στοιχεία της βάσης είναι σχετικά απλά, αφού οι συντεταγμένες τους έχουν πολλά μηδενικά.

Παράδειγμα 3.3.14. Έστω $V = S(X)$ ο διανυσματικός χώρος του Παραδείγματος 3.3.12. Τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A^T είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως το σύνολο $\{(1, 0, -6, 3), (0, 1, 3, -1)\}$ είναι βάση του V .

Ασκήσεις Ενότητας 3.3

1. Να εξετάσετε αν τα στοιχεία

$$u_1 = (1, 0, 2, 1), \quad u_2 = (0, 0, 2, 4), \quad u_3 = (0, 1, 0, 2), \quad u_4 = (2, 0, 4, 2)$$

του \mathbb{R}^4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να δώσετε τις σχέσεις εξάρτησης που υπάρχουν μεταξύ των διανυσμάτων.

2. Δίνονται τα στοιχεία

$$v_1 = (1, 2, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 3, -1), \quad v_3 = (1, 1, -3, 2)$$

του \mathbb{R}^4 . Να βρείτε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης για τα στοιχεία αυτά και μία βάση για το διανυσματικό υποχώρο $S(\{v_1, v_2, v_3\})$ του \mathbb{R}^3 .

3. Να βρείτε μία βάση, για κάθε έναν από τους εξής διανυσματικούς χώρους.

- (α) $U_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 0 \}$.
- (β) $U_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0 \}$.
- (γ) $U_3 = S\{(1, 0, 2, 1), (3, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 4)\}$.

3.4 Βάσεις και Γραμμική Ανεξαρτησία, II

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα της θεωρίας μας, για να αποδείξουμε μία πολύ σημαντική σχέση που συνδέει τη βαθμίδα ενός πίνακα A με τη βαθμίδα του αναστρέψιμου A^T και με τη διάσταση του $\text{null}(A)$. Θα δούμε, επίσης, πως συνδέεται η διάσταση του αθροίσματος με τη διάσταση της τομής δύο διανυσματικών υποχώρων του \mathbb{R}^n . Τέλος, θα ορίσουμε τον πίνακα των συντεταγμένων ενός διανύσματος ως προς μία διατεταγμένη βάση.

Έστω A είναι τυχαίος $m \times n$ πίνακας και $\Gamma(A) \subset \mathbb{R}^n$, ο χώρος γραμμών του A . Σύμφωνα με τον αλγόριθμο (3.3.1), για να βρούμε τη βάση του $\Gamma(A)$, γράφουμε τα διανύσματα που παράγουν τον $\Gamma(A)$ ως στήλες, δηλ. θεωρούμε τον A^T . Σύμφωνα με αυτόν τον αλγόριθμο, επιλέγουμε $\text{rank}(A^T)$ το πλήθος γραμμών από τις αρχικές γραμμές του A , για τη βάση του $\Gamma(A)$, δηλ.

$$\dim_{\mathbb{R}}(\Gamma(A)) = \text{rank}(A^T).$$

Σύμφωνα, όμως, με τον αλγόριθμο (3.3.2), για τη βάση του $\Gamma(A)$, κρατάμε τον A ως έχει και τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R . Στη συνέχεια επιλέγουμε τις μη μηδενικές γραμμές του R για τη βάση του $\Gamma(A)$. Επομένως η βάση του $\Gamma(A)$ που επιλέγουμε με αυτόν τον τρόπο έχει $\text{rank}(R) = \text{rank}(A)$ στοιχεία. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.7, όλες οι βάσεις του $\Gamma(A)$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Άρα

$$\dim_{\mathbb{R}}(\Gamma(A)) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A).$$

Η ίδια ανάλυση μπορεί να γίνει και για το χώρο στηλών του A , $\Sigma(A)$. Συνεπώς

$$\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma(A)) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A).$$

Αποδείξαμε λοιπόν την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.4.1. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Τότε

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$$

και οι διαστάσεις του χώρου γραμμών του A και του χώρου στηλών του A είναι ίσες με $\text{rank}(A)$.

Όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα, η διαφορά $n - \text{rank}(A)$ είναι η διάσταση του $\text{null}(A)$.

Παραδείγματα 3.4.2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο πίνακας R , όπου

$$R = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -6 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφού οι καθοδηγητικές μονάδες είναι στην πρώτη και δεύτερη στήλη, το σύνολο

$$\{(1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$$

είναι βάση για το χώρο στηλών του A και κατά συνέπεια είναι βάση για το χώρο γραμμών του A^T . Αντίστοιχα, το σύνολο

$$\{(1, 0, -6, 3), (0, 1, 3, -1)\}$$

είναι βάση για το χώρο γραμμών του A και για τον χώρο στηλών του A^T . Έστω τώρα

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (0, 3, -3), v_4 = (1, -1, 2)$$

τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις στήλες του A . Η τρίτη και τέταρτη στήλη του R , δηλ. οι στήλες του R χωρίς καθοδηγητική μονάδα, μπορούν να γραφούν ως συνδυασμός των άλλων δύο. Πράγματι, έστω Σ_i οι στήλες του R , για $i = 1, \dots, 4$. Βλέπουμε ότι

$$\Sigma_3 = -6 \Sigma_1 + 3 \Sigma_2 \text{ και } \Sigma_4 = 3 \Sigma_1 - \Sigma_2.$$

Επομένως

$$6 \Sigma_1 - 3 \Sigma_2 - \Sigma_3 = 0 \text{ και } \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_4 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε αντίστοιχες σχέσεις γραμμικής εξάρτησης για τις στήλες του A και ότι

$$6 v_1 - 3 v_2 - v_3 = 0 \text{ και } v_1 - v_2 - v_4 = 0.$$

Αυτό βέβαια είναι αναμενόμενο, γιατί όπως είδαμε, στην Παρατήρηση 3.3.4, οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των v_1, \dots, v_4 αντιστοιχούν σε λύσεις του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$ που είναι ίδιες με τις λύσεις του $RX = \mathbf{0}$ (Πρόταση 1.3.4).

Οι ελεύθερες μεταβλητές βρίσκονται στις στήλες τρία και τέσσερα. Άρα

$$\begin{aligned} \text{null}(A) = \{ & (6z - 3w, -3z + w, z, w) : z, w \in \mathbb{R} \} = \{ z(6, -3, 1, 0) + \\ & w(-3, 1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R} \} = S(\{(6, -3, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

Έστω $u_1 = (6, -3, 1, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 1)$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{u_1, u_2\}$ είναι βάση για τον $\text{null}(A)$. Πράγματι, είναι φανερό ότι τα διανύσματα αυτά δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου και άρα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Παρατηρούμε ότι για το συμπέρασμα αυτό ήταν αρκετό να σημειώσουμε τις τιμές των u_1, u_2 στην τρίτη και τέταρτη συντεταγμένη. Οι τιμές αυτές, 0 στο ένα διάνυσμα και 1 στο άλλο και το ανάπαλιν, είναι η κύρια αιτία που το ένα διάνυσμα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Τα προηγούμενα γενικεύονται εύκολα στους εξής συμπεράσματα.

Θεώρημα 3.4.3. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Τότε

$$\text{rank}(A) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{null}(A)) = n.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε την τομή δύο διανυσματικών υποχώρων του \mathbb{R}^n .

Παράδειγμα 3.4.4. Σε αυτό το παράδειγμα θα εξετάσουμε τον υπολογισμό της τομής δύο διανυσματικών χώρων. Έστω $V = S(\{v_1, v_2\})$ και $W = S(\{w_1, w_2\})$ όπου $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 0)$, $w_1 = (1, 2, 2, -2)$, $w_2 = (0, -1, -2, 1)$. Θεωρούμε τον πίνακα $A = [v_1 \ v_2 \ w_1 \ w_2]$, δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι $\Sigma(A) = V + W$. Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι ο πίνακας R :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Αφού $\text{rank}(A) = 3$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}}(V + W) = 3$. Από τη θέση των καθοδηγητικών μονάδων στον R βλέπουμε ότι μία βάση για τον $V + W$ είναι το σύνολο $\{v_1, v_2, w_1\}$. Από τον πίνακα R μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι

$$w_2 = v_1 - w_1 \Rightarrow v_1 - w_1 - w_2 = \mathbf{0} \Rightarrow v_1 = w_1 + w_2 .$$

Επομένως $v_1 \in W$ και άρα $v_1 \in V \cap W$. Αντίστροφα, κάθε διάνυσμα στην τομή $V \cap W$ δίνει μία σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του A . Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.4, οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης προκύπτουν από τον $\text{null}(A)$. Από τη μορφή του R όμως, είναι φανερό ότι όλες οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης είναι πολλαπλάσια της σχέσης που ήδη γράψαμε. Επομένως

$$V \cap W = S(\{v_1\}) .$$

Γενικεύοντας όσα είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, διατυπώνουμε την εξής πρόταση:

Θεώρημα 3.4.5. Έστω ότι U και W είναι υποχώροι του \mathbb{k}^n . Τότε

$$\dim_{\mathbb{k}}(U + W) = \dim_{\mathbb{k}}(U) + \dim_{\mathbb{k}}(W) - \dim_{\mathbb{k}}(U \cap W) .$$

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα A , όπου οι πρώτες $\dim_{\mathbb{k}}(U)$ στήλες του αντιστοιχούν στα διανύσματα μίας βάσης του U και οι επόμενες $\dim_{\mathbb{k}}(W)$ στήλες του αντιστοιχούν στα διανύσματα μίας βάσης του W . Έτσι, συνολικά ο A έχει n γραμμές και $(\dim_{\mathbb{k}}(U) + \dim_{\mathbb{k}}(W))$ στήλες. Φέρνουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R . Ο αριθμός των καθοδηγητικών μονάδων του A είναι ίσος με $\dim_{\mathbb{k}}(U + W)$. Για κάθε στήλη του R χωρίς καθοδηγητική μονάδα υπάρχει μία εξίσωση που περιγράφει αυτήν τη στήλη ως γραμμικό συνδυασμό των προηγούμενων στηλών. Η εξίσωση αυτή δίνει μία σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των διανυσμάτων της βάσης του U και της βάσης του W . Διαχωρίζοντας τα διανύσματα της βάσης του U από τη βάση του W , προκύπτει ένας συνδυασμός διανυσμάτων της βάσης του U που είναι επίσης συνδυασμός διανυσμάτων της βάσης του W , δηλ. ένα διάνυσμα στην τομή $U \cap W$. Αντίστροφα, κάθε διάνυσμα στην τομή $U \cap W$ δίνει μία σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ

των στηλών του A . Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.4, οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης προκύπτουν από τον $\text{null}(A)$. Έτσι, προκύπτει ότι

$$\dim_{\mathbb{k}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{k}}(\text{null}(A)) .$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.3, προκύπτει η ζητούμενη σχέση. \square

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.5 μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τον επόμενο αλγόριθμο εύρεσης βάσης για τους υποχώρους $U + W$ και $U \cap W$. Σημειώνουμε ότι $\dim_{\mathbb{k}}(U + W) \geq \dim_{\mathbb{k}}(U)$ και ότι $\dim_{\mathbb{k}}(U + W) = \dim_{\mathbb{k}}(U)$ αν και μόνο αν $W \subset U$.

Αλγόριθμος 3.4.1 Αλγόριθμος εύρεσης βάσεων για τους υποχώρους $U + W$ και $U \cap W$ του \mathbb{k}^n .

Είσοδος: Βάσεις $\{v_1, \dots, v_m\}$, $\{w_1, \dots, w_r\}$ για τους U και W αντίστοιχα.

Έξοδος: Βάσεις για τους $U + W$, $U \cap W$.

Βήμα 1 Θεωρούμε τον $n \times (m + r)$ πίνακα $A = [v_1 \ \dots \ v_m \ w_1 \ \dots \ w_r]$.

Βήμα 2 Φέρνουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R .

Βήμα 3 Έστω ότι οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες i_1, \dots, i_t , όπου $t = \text{rank}(A)$. Για τη βάση του $U + W$, επιλέγουμε τα αντίστοιχα διανύσματα από το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$.

Βήμα 4 Αν μία στήλη του R δεν έχει καθοδηγητική μονάδα, τότε γράφουμε τη στήλη ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών με καθοδηγητική μονάδα. Αποκόπτουμε το συνδυασμό που αφορά τις πρώτες m στήλες και γράφουμε τον αντίστοιχο συνδυασμό των $\{v_1, \dots, v_m\}$. Επαναλαμβάνουμε για όλες τις στήλες χωρίς καθοδηγητική μονάδα. Τα διανύσματα που προκύπτουν από αυτήν τη διαδικασία είναι βάση για τον $U \cap W$.

Παράδειγμα 3.4.6. Έστω U ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ και W ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (0, 0, 1)$. Τότε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ήδη σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Αφού $\text{rank } A = 3$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3$ και επομένως $U+W = \mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι οι καθοδηγητικές μονάδες του A είναι στη πρώτη, δεύτερη και τέταρτη στήλη και ότι τα αντίστοιχα διανύσματα v_1, v_2, w_2 είναι η συνήθης κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Αφού $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3$, έπεται ότι

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 4 - 3 = 1 .$$

Η τρίτη στήλη του A δεν έχει καθοδηγητική μονάδα. Επομένως

$$\Sigma_3 = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

και $w_3 = v_1 + v_2$. Άρα $U \cap W = S(\{v_1 + v_2\})$.

Σε κάποιες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να επεκτείνουμε τη βάση ενός υποχώρου σε βάση ολόκληρου του \mathbb{k}^n . Σημειώνουμε τον εξής αλγόριθμο για αυτές τις περιπτώσεις.

Αλγόριθμος 3.4.2 Αλγόριθμος επέκτασης βάσης του U σε βάση του \mathbb{k}^n .

Είσοδος: Βάση $\{v_1, \dots, v_m\}$ για τον U .

Έξοδος: Μία βάση D για τον \mathbb{k}^n τέτοια ώστε $\{v_1, \dots, v_m\} \subset D$.

Βήμα 1 Θεωρούμε τον $n \times (m+n)$ πίνακα $A = [v_1 \mid \dots \mid v_m \mid e_1 \mid \dots \mid e_n]$, όπου e_1, \dots, e_n τα στοιχεία της κανονικής βάσης του \mathbb{k}^n .

Βήμα 2 Φέρνουμε τον A σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών R .

Βήμα 3 Έστω ότι οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες i_1, \dots, i_n . Επιλέγουμε τα αντίστοιχα διανύσματα από το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n\}$.

Παράδειγμα 3.4.7. Έστω $v = (1, 1, 0)$ και $W = S(\{v\})$. Το $\{v\}$ είναι βάση για το W . Θα επεκτείνουμε τη βάση του W σε μία βάση του \mathbb{R}^3 . Αφού $\{e_1, e_2, e_3\}$ παράγει τον \mathbb{R}^3 , κάθε υπερσύνολο του $\{e_1, e_2, e_3\}$ παράγει τον \mathbb{R}^3 . Επομένως το σύνολο $X = \{v, e_1, e_2, e_3\}$ παράγει τον \mathbb{R}^3 . Θα χρησιμοποιήσουμε τον Αλγόριθμο (3.4.2). Αφού

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

έπεται ότι το σύνολο $\{v, e_1, e_3\}$ είναι βάση για τον \mathbb{R}^3 .

Έστω V ένας διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{k}^n , διάστασης m , και έστω B μία διατεταγμένη βάση του V : $B = (v_1, \dots, v_m)$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε διάνυσμα του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως συνδυασμός των στοιχείων της B . Έστω, λοιπόν, $v \in V$. Αφού B είναι βάση του V , υπάρχουν $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in \mathbb{k}$ έτσι ώστε

$$v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_m v_m. \tag{3.4.7.1}$$

Έστω επίσης ότι:

$$v = \kappa'_1 v_1 + \dots + \kappa'_m v_m. \tag{3.4.7.2}$$

Αφαιρώντας τη σχέση (3.4.7.2) από τη σχέση (3.4.7.1) προκύπτει ότι

$$0 = (\kappa_1 - \kappa'_1)v_1 + \dots + (\kappa_m - \kappa'_m)v_m.$$

Αφού το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, η σχέση αυτή πρέπει να είναι η μηδενική. Επομένως $\kappa_i = \kappa'_i$, για $i = 1, \dots, m$. Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in \mathbb{k}$ της σχέσης (3.4.7.1) είναι μοναδικοί. Αποδείξαμε λοιπόν το εξής συμπέρασμα:

Αν $B = (v_1, \dots, v_m)$ είναι μία διατεταγμένη βάση του V , τότε κάθε $v \in V$ μπορεί να γραφεί με **μοναδικό** τρόπο ως $v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_m v_m$.

Ο $m \times 1$ πίνακας $[\kappa_1 \ \dots \ \kappa_m]^T$ λέγεται **πίνακας των συντεταγμένων** (coordinate matrix) του v ως προς τη βάση $B = (v_1, \dots, v_m)$ και συμβολίζεται με $C_B(v)$. Τονίζουμε ότι ο πίνακας $C_B(v)$ έχει m γραμμές, όπου m είναι η διάσταση του V , παρότι $v \in \mathbb{k}^n$. Αντίστροφα, αν

$$C_B(v) = [\kappa_1 \ \dots \ \kappa_m]^T \text{ τότε } v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_m v_m.$$

Από τα προηγούμενα και την Πρόταση 3.2.9 προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

Αν το $v \in V$ και $B = (v_1, \dots, v_m)$ είναι διατεταγμένη βάση του V , τότε ο $C_B(v)$ προκύπτει ως η μοναδική λύση του συστήματος $AX = [v]$, όπου $A = [v_1 \ \dots \ v_m]$.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν υπολογίζουμε πίνακες συντεταγμένων σε διάφορες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 3.4.8.

1. Έστω $v = (1, 1)$, $B = \{v\}$ και $V = S(B)$. Το διάνυσμα $w = (3, 3)$ ανήκει στον V και $C_B(w) = [3]$, αφού $w = 3v$. Έστω τώρα τα σύνολα $B_1 = \{(1/2, 1/2)\}$, $B_2 = \{(-1, -1)\}$ και $B_3 = \{w\}$. Τότε το B_i είναι βάση του V , για $i = 1, \dots, 3$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

$$C_{B_1}(w) = [6], \quad C_{B_2}(w) = [-3], \quad C_{B_3}(w) = [1],$$

ενώ

$$C_B(v) = [1], \quad C_{B_1}(v) = [2], \quad C_{B_3}(v) = [1/3].$$

2. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 και $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_B(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

αφού

$$e_1 = 1e_1 + 0e_2, \quad e_2 = 0e_1 + 1e_2, \quad v = 1e_1 + 2e_2.$$

3. Έστω τώρα η διατεταγμένη βάση $D = (e_1, w)$ του \mathbb{R}^2 , όπου $w = (0, -1)$ και $v = (1, 2)$, όπως προηγουμένως. Τότε

$$C_D(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_D(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_D(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

αφού

$$e_1 = 1e_1 + 0w, \quad e_2 = 0e_1 - 1w, \quad v = 1e_1 - 2w.$$

4. Έστω $v = (1, 1)$ και $w = (2, 3)$. Το σύνολο $B = (v, w)$ είναι βάση για τον \mathbb{C}^2 . Θα βρούμε τις συντεταγμένες του $(4, 5i)$ ως προς αυτήν τη βάση. Θέλουμε να γράψουμε το $(4, 5i)$ ως συνδυασμό των v, w . Παίρνουμε τον πίνακα με στήλες τα τρία διανύσματα και τον φέρνουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5i \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 - 10i \\ 0 & 1 & -4 + 5i \end{array} \right].$$

Άρα $(4, 5i) = (-4 - 10i)v + (-4 + 5i)w$ και

$$C_B(4, 5i) = \begin{bmatrix} -4 - 10i \\ -4 + 5i \end{bmatrix}.$$

5. Έστω η βάση $B = (v, w)$ του επιπέδου E στον \mathbb{R}^3 που δίνεται από την εξίσωση $x + y - z = 0$ στον \mathbb{R}^3 , όπου $v = (1, 0, 1)$ και $w = (0, 1, 1)$. Το διάνυσμα $u = (2, 2, 4) \in E$ και αφού

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

έπεται ότι $C_B(u) = [2 \ 2]^T$.

Έστω τώρα ότι V είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^n . Κάθε γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του V ανήκει στο V . Έστω, λοιπόν, ότι D είναι μία διατεταγμένη βάση του V και ότι u_1, \dots, u_t είναι τυχαία διανύσματα του V , ενώ $\kappa_1, \dots, \kappa_t$ τυχαία στοιχεία του \mathbb{R} . Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι

$$C_D(\kappa_1 u_1 + \dots + \kappa_t u_t) = \kappa_1 C_D(u_1) + \dots + \kappa_t C_D(u_t).$$

Δηλώνουμε την παρατήρηση αυτή ως εξής:

$$\kappa_1 C_D(u_1) + \dots + \kappa_t C_D(u_t) = [C_D(u_1) \ \dots \ C_D(u_t)] \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_t \end{bmatrix} = C_D(\kappa_1 u_1 + \dots + \kappa_t u_t).$$

Η παρατήρηση αυτή θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη συνέχεια.

Ασκήσεις Ενότητας 3.4

1. Δίνονται οι υποχώροι V και W του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^5 με $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ και $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο $v \neq 0$ του \mathbb{R}^5 τέτοιο ώστε $v \in V \cap W$.
2. Να βρείτε μία βάση για τους υποχώρους $U + V$ και $U \cap W$ του \mathbb{R}^4 , όπου

$$U = S(\{(1, 0, 2, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\})$$

και

$$W = S(\{(0, 0, 2, 1), (2, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}).$$

3. Να βρείτε $C_B(e_1)$ και $C_B(e_2)$ όταν
 - (α) $B = (e_1, e_2)$,
 - (β) $B = (e_2, e_1)$,
 - (γ) $B = ((1, -1), (0, 2))$.
4. Έστω $D = (v_1, v_2)$ διατεταγμένη βάση του \mathbb{R}^2 . Να βρείτε $C_D(5w_1 - w_2)$ όταν

$$C_D(w_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_D(w_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

5. Να βρείτε το διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ με $C_B(v) = [1 \ 1 \ 2]^T$, όταν
 - (α) $B = (e_1, e_2, e_3)$.
 - (β) $B = (e_1 + e_2, e_3, e_2)$.
6. Έστω η διατεταγμένη βάση $D = ((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ για το επίπεδο $U = \{(x, y, z) : x - z = 0\}$. Να βρεθεί ο πίνακας των συντεταγμένων των $w_1 = (2, 2, 2)$ και $w_2 = (2, 5, 2)$ ως προς τη D .

7. Να βρείτε μία βάση για τους $\Gamma(A)$, $\Sigma(A)$ και $\text{null}(A)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 5}(\mathbb{k}).$$

Να ερμηνεύσετε τα στοιχεία της βάσης του $\text{null}(A)$ ως σχέσεις εξάρτησης των στηλών του A .

8. Για κάθε $m \times n$ πίνακα A και $n \times k$ πίνακα B με συντελεστές από το \mathbb{k} , να αποδείξετε ότι $\dim_{\mathbb{k}} \text{null}(AB) \geq \dim_{\mathbb{k}} \text{null}(B)$.

9. Για κάθε $m \times n$ πίνακα A και $n \times k$ πίνακα B , να αποδείξετε ότι $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$. (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση, το Θεώρημα 3.4.3 και την Πρόταση 3.4.1.)

3.5 \mathbb{k} -Διανυσματικοί Χώροι

Στις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου μελετήσαμε τον \mathbb{k}^n και τους υποχώρους του. Ο παρατηρητικός αναγνώστης ίσως έχει εντοπίσει τις ομοιότητες μεταξύ των ιδιοτήτων που περιγράφονται στον Πίνακα 3.2.1 και στις ιδιότητες του συνόλου των $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ πινάκων όπως περιγράφονται στις Προτάσεις 2.1.4 και 2.1.9. Η ανάλυση για τους υποχώρους και τις βάσεις στηρίχθηκε σε αυτές τις ιδιότητες. Έτσι εύλογα γενικεύουμε το προηγούμενο έργο μας.

Ορισμός 3.5.1. Έστω V ένα σύνολο με μία πράξη πρόσθεσης ($V \times V \rightarrow V$) και μία πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού ($\mathbb{k} \times V \rightarrow V$). Το V λέγεται **διανυσματικός χώρος επάνω από το \mathbb{k}** ή για συντομία **\mathbb{k} -διανυσματικός χώρος** (\mathbb{k} -vector space) αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

- i. $v + (u + w) = (v + u) + w$, για όλα τα $v, u, w \in V$.
- ii. Υπάρχει μοναδικό $\mathbf{0} \in V$, έτσι ώστε $\mathbf{0} + v = v = v + \mathbf{0}$, για κάθε $v \in V$.
- iii. Για κάθε $v \in V$, υπάρχει μοναδικό $-v \in V$, έτσι ώστε $-v + v = \mathbf{0} = v + (-v)$.
- iv. $v + u = u + v$ για όλα τα $v, u \in V$.
- v. $\kappa(v + u) = \kappa v + \kappa u$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{k}$ και όλα τα $v, u \in V$
 $(\kappa + \lambda)v = \kappa v + \lambda v$, για όλα τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$ και κάθε $v \in V$.
- vi. $\kappa(\lambda v) = (\kappa\lambda)v$, για όλα τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{k}$ και $v \in V$.
- vii. $1v = v$, για κάθε $v \in V$.

Παραδείγματα 3.5.2.

1. Όπως είδαμε ο \mathbb{k}^n είναι \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
2. Το σύνολο $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ είναι \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος με τη συνήθη πρόσθεση και σκαλιανό πολλαπλασιασμό.

3. Έστω $\mathbb{k}[x]$ το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{k} . Αν $f(x), g(x) \in \mathbb{k}[x]$, τότε ορίζουμε το άθροισμα $(f + g)(x)$ ως το πολυώνυμο $f(x) + g(x)$. Αν $f(x) = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{k}[x]$ και $c \in \mathbb{k}$, τότε ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο $r \cdot f(x)$ ως το πολυώνυμο $\sum_i (ca_i)x^i$. Ο $\mathbb{k}[x]$ είναι \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος.
4. Έστω $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων, δηλ. των συναρτήσεων από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} . Αν $f, g \in V$, τότε ορίζουμε το άθροισμα $f + g$ ως τη συνάρτηση $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, για $a \in \mathbb{R}$. Αν $f \in V$ και $r \in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο $r \cdot f$ ως τη συνάρτηση $r \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $(r \cdot f)(a) = f(ra)$, για $a \in \mathbb{R}$. Ο V είναι \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος.
5. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος, με τη συνήθη πρόσθεση και (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό.

Στη συνέχεια γενικεύουμε την έννοια του διανυσματικού υποχώρου.

Ορισμός 3.5.3. Ένα μη κενό υποσύνολο U του V λέγεται **\mathbb{k} -διανυσματικός υποχώρος** (\mathbb{k} -subspace) του V αν

- i. $u + w \in U$, για όλα τα $u, w \in U$,
- ii. $cu \in U$, για κάθε $u \in U$ και κάθε $c \in \mathbb{k}$,

Είναι εύκολο να δείξει κανείς την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.5.4. Το μη κενό υποσύνολο U του V είναι \mathbb{k} -διανυσματικός υποχώρος αν και μόνο αν U είναι \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος.

Για κάθε έναν από τους διανυσματικούς υποχώρους του προηγούμενου παραδείγματος, θα δώσουμε παραδείγματα υποχώρων.

Παραδείγματα 3.5.5.

1. Οι υποχώροι του \mathbb{k}^n είναι οι \mathbb{k} -διανυσματικοί υποχώροι.
2. Το σύνολο των πολυωνύμων στον $\mathbb{k}[x]$ που έχουν βαθμό $\leq m$ είναι \mathbb{k} -διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{k}[x]$.
3. Το σύνολο των διαγώνιων $n \times n$ πινάκων με συντελεστές από το \mathbb{k} είναι \mathbb{k} -διανυσματικός υποχώρος του $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Το ίδιο και τα σύνολα των άνω και κάτω τριγωνικών πινάκων.
4. Το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων είναι \mathbb{k} -διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. Ο \mathbb{R} είναι \mathbb{R} -διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{C} .

Έστω X ένα υποσύνολο του \mathbb{k} -διανυσματικού χώρου V . Τότε

$$S(X) = \{ \kappa_1 x_1 + \cdots + \kappa_s x_s : \kappa_j \in \mathbb{k}, x_j \in X, 1 \leq j \leq s, s \in \mathbb{N} \}.$$

Καλούμε τον αναγνώστη να παρατηρήσει ότι το s στην περιγραφή του $S(X)$ δεν είναι κάποιος σταθερός φυσικός αριθμός, αλλά είναι μεταβλητή και επιτρέπεται να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το \mathbb{N} . Τα στοιχεία του $S(X)$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του X με συντελεστές από το \mathbb{k} . Στην περίπτωση που $X = \emptyset$, τότε $S(X) = \{0\}$. Εύκολα αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Πρόταση 3.5.6. Το υποσύνολο U του V είναι \mathbb{k} -διανυσματικός υποχώρος του V αν και μόνο αν υπάρχει $X \subset V$ έτσι ώστε $U = S(X)$

Τονίζουμε ότι αν ο V είναι \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος, τότε

$$0v = \mathbf{0}.$$

Αν και στον \mathbb{k}^n η σχέση αυτή ήταν προφανής, για γενικούς διανυσματικούς χώρους χρήζει απόδειξης. Πράγματι, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.5.1 (Ιδιότητα ν) προκύπτει ότι

$$0v + 0v = (0 + 0)v = 0v,$$

ενώ από την μοναδικότητα του $\mathbf{0}$ (Ιδιότητα ii.), προκύπτει ότι

$$0v = \mathbf{0}.$$

Τα v_1, v_2, \dots, v_m του V λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** (linearly independent) αν δεν υπάρχει μη μηδενική σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των v_1, v_2, \dots, v_n , δηλ. αν

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \dots + \kappa_m v_m = \mathbf{0},$$

τότε $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_m = 0$. Μία **βάση** (basis) του \mathbb{k} -διανυσματικού χώρου V είναι ένα υποσύνολο B του V έτσι ώστε $V = S(B)$ και τα στοιχεία του V να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αποδεικνύεται (σχεδόν) όπως και για τους υποχώρους του \mathbb{k}^n το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.7. Έστω V ένας \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος. Ο V έχει μία βάση. Αν μία βάση του V είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Αν ο V έχει μία πεπερασμένη βάση, τότε ο πλήθος των στοιχείων της λέγεται **\mathbb{k} -διάσταση** (\mathbb{k} -dimension) του V και συμβολίζεται $\dim_{\mathbb{k}}(V)$. Αν ο V έχει μία άπειρη βάση, τότε λέμε ότι V έχει άπειρη διάσταση και γράφουμε $\dim_{\mathbb{k}}(V) = \infty$.

Παραδείγματα 3.5.8.

- $\dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n) = n$.
- Το σύνολο $B = \{1, i\}$ είναι μία βάση για τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{C} . Πράγματι $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. Αφού $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ βλέπουμε ότι $\mathbb{C} = S(B)$. Επίσης $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$. Άρα τα $1, i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως B είναι βάση για το \mathbb{C} και $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Παρατηρούμε ότι $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.
- Μία βάση του $\mathbb{R}[x]$ είναι το άπειρο σύνολο

$$\{1, x, x^2, \dots, \}$$

και $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[x] = \infty$.

- Θα γράψουμε μία βάση για τον \mathbb{k} -διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{k})$ και θα δείξουμε ότι $\dim_{\mathbb{k}}(\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{k})) = 6$. Θεωρούμε τους εξής έξι πίνακες:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένας τυχαίος πίνακας του $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{k})$ είναι γραμμικός συνδυασμός των πινάκων αυτών αφού

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6.$$

Είναι επίσης εύκολο να δείξει κανείς ότι οι πίνακες E_1, \dots, E_6 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{k})$, αφού

$$\kappa_1 E_1 + \dots + \kappa_6 E_6 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ \kappa_4 & \kappa_5 & \kappa_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_6 = 0$. Επομένως $\{E_1, \dots, E_6\}$ είναι βάση για τον $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{k})$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι από αλγεβρική σκοπιά δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο διανυσματικούς χώρους που έχουν την ίδια διάσταση επάνω από το \mathbb{k} . Έτσι, αρκεί να μελετήσουμε έναν από αυτούς για να βγάλουμε συμπεράσματα για όλους. Έστω $B = (v_1, \dots, v_m)$ μία **διατεταγμένη βάση** (ordered basis) του \mathbb{k} -διανυσματικού χώρου V , δηλ. μία βάση που είναι διατεταγμένο σύνολο. Αν

$$v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_m v_m,$$

τότε οι συντελεστές $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικοί και ο $m \times 1$ πίνακας

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_m \end{bmatrix},$$

λέγεται **πίνακας των συντεταγμένων** (coordinate matrix) του v ως προς τη βάση B .

Παραδείγματα 3.5.9.

1. Έστω $B = (E_1, \dots, E_6)$ και $B' = (E_2, E_1, E_3, \dots, E_6)$ δύο διατεταγμένες βάσεις του $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{k})$ όπου τα E_1, \dots, E_6 είναι όπως στο Παράδειγμα 3.5.8.4. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ τότε

$$C_B(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C_{B'}(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω $E = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}^2\}$ το επίπεδο στον \mathbb{R}^2 με διατεταγμένη βάση $B = ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Τότε για το $v = (2, 1, 3) \in E$ ισχύει ότι $C_B(v) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Σημειώνουμε την επόμενη σημαντική παρατήρηση, για τα $w, w_1, \dots, w_t \in V$.

$$\text{Αν } w = \kappa_1 w_1 + \dots + \kappa_t w_t, \text{ τότε } C_B(w) = \kappa_1 C_B(w_1) + \dots + \kappa_t C_B(w_t).$$

Ειδικότερα, αν

$$\kappa_1 w_1 + \dots + \kappa_t w_t = \mathbf{0},$$

τότε

$$\kappa_1 C_B(w_1) + \dots + \kappa_t C_B(w_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το αντίστροφο επίσης ισχύει. Σημειώνουμε, λοιπόν, το επόμενο συμπέρασμα.

Πρόταση 3.5.10. Έστω B μία διατεταγμένη βάση του \mathbb{k} -διανυσματικού χώρου W , όπου $\dim_{\mathbb{k}} W = m$. Τότε:

- i) Τα διανύσματα $w_1, \dots, w_t \in W$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν οι στήλες $C_B(w_1), \dots, C_B(w_t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{k})$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.
- ii) Τα διανύσματα $w_1, \dots, w_t \in W$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν οι στήλες $C_B(w_1), \dots, C_B(w_t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{k})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ασκήσεις Ενότητας 3.5

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} που έχουν βαθμό 6 δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}[x]$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{1, x, \dots, x^6\}$ είναι βάση για τον υποχώρο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} που έχουν βαθμό ≤ 6 . Να γενικεύσετε για τον υποχώρο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} που έχουν βαθμό $\leq m$.
2. Να βρείτε μία βάση για τον $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ και να αποδείξετε ότι

$$\dim_{\mathbb{k}}(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})) = nm.$$
3. Να βρείτε μία βάση για το χώρο των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων και να αποδείξετε ότι έχει διάσταση n .
4. Να βρείτε μία βάση για το χώρο των άνω τριγωνικών 2×2 πινάκων και να αποδείξετε ότι έχει διάσταση 3. Να γενικεύσετε για το χώρο των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων.

3.6 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία

Η Καρτεσιανή Γεωμετρία ανακαλύφθηκε το 1636 από τους Γάλλους μαθηματικούς Fermat (1601-1665) και Descartes (1596-1650) και επηρέασε βαθιά την εξέλιξη των μαθηματικών. Ενάμιση αιώνα αργότερα, το 1804, με το έργο του Βοημού μαθηματικού Bolzano (1782-1848) εμφανίστηκαν οι απαρχές της θεωρίας των διανυσμάτων. Ο Bolzano εισάγει την ιδέα των πράξεων σε ευθείες και επίπεδα χωρίς αναφορά σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, όπως επέβαλε έως τότε η αναλυτική Καρτεσιανή Γεωμετρία.

Η ιδέα για τους διανυσματικούς χώρους εμφανίστηκε αχνά στη δουλειά του Γερμανού μαθηματικού Möbius (1790-1868) με κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα το 1827 και το 1828. Ο Ελβετός λογιστής στο επάγγελμα και ερασιτέχνης μαθηματικός Argand (1768-1822) το 1814 παρουσίασε τους μιγαδικούς αριθμούς ως ζεύγη πραγματικών αριθμών, δηλ. αντιμετώπισε τον \mathbb{C} ως \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο διάστασης 2, αν και ο όρος διανυσματικός χώρος δεν είχε ακόμα εφευρεθεί. Ο Ιρλανδός μαθηματικός Hamilton (1805-1865) ανακάλυψε τον τετραδιάστατο διανυσματικό χώρο των τετραδικών αριθμών το 1843 και από την χαρά του, χάραξε την ανακάλυψή του σε έναν βράχο κατά τη διάρκεια του περιπάτου που έκανε μαζί με τη γυναίκα του στη γέφυρα του Broome. Στο έργο του Πολωνού μαθηματικού Grassman (1809-1877) το 1844 οφείλουμε τους κανόνες που ορίζουν τους διανυσματικούς χώρους. Το έργο αυτό φαίνεται να χρησιμοποίησε ο Γάλλος μαθηματικός Cauchy (1789-1857) το 1853 χωρίς αναφορά στον Grassman.

Ο πρώτος που έδωσε τον αξιωματικό ορισμό των διανυσματικών χώρων είναι ο Ιταλός μαθηματικός Peano (1858-1932) το 1888. Εκτός του ορισμού, ο Peano αποδεικνύει ότι κάθε διανυσματικός πεπερασμένης διάστασης έχει μία βάση και δίνει παραδείγματα διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης. Για περισσότερα ιστορικά στοιχεία παραπέμπουμε στα συγγράμματα [3] και [4].

Βιβλιογραφία

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley and Sons, 1994.
2. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Β. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 2006.
3. V. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
4. I. Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, 2007.
5. K. Nichololson, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.
6. Th. Shiffirin and M. R.Adams, *Linear Algebra, a Geometric Approach*, W. H. Freeman and Company, 2002.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικές Συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μία ειδική κατηγορία συναρτήσεων μεταξύ των \mathbb{k} -διανυσματικών χώρων. Θα δούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές καθορίζονται πλήρως από τις τιμές που λαμβάνουν τα στοιχεία των βάσεων. Για να τις μελετήσουμε θα αντιστοιχήσουμε πίνακες σε αυτές τις συναρτήσεις και θα χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματά μας από τη θεωρία πινάκων (Κεφάλαιο 2).

4.1 Γραμμικές Συναρτήσεις, I

Έστω V, W δύο \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι. Η δομή που έχουν αυτοί οι χώροι είναι σημαντική. Ποιές είναι, λοιπόν, οι ιδιότητες που επιθυμούμε να έχουν οι *καλές* συναρτήσεις $f : V \rightarrow W$; Δεν θέλει πολύ σκέψη για να αποφασίσουμε ότι θέλουμε οι ευθείες του V να απεικονίζονται σε ευθείες του W . Αφού, λοιπόν, οι ευθείες στο V περιγράφονται ως πολλαπλάσια ενός διανύσματος, θέλουμε για κάθε $v \in V$ να ισχύει ότι

$$f(\kappa v) = \kappa f(v), \quad \text{για } \kappa \in \mathbb{k}.$$

Σε αυτήν την ιδιότητα οφείλουν οι *γραμμικές συναρτήσεις* το όνομά τους. Η άλλη ιδιότητα των *καλών* συναρτήσεων σχετίζεται με το άθροισμα των διανυσμάτων. Αθροίσματα στον V οφείλουν να απεικονίζονται σε αθροίσματα στον W . Επομένως απαιτούμε

$$f(v + u) = f(v) + f(u)$$

για οποιαδήποτε δύο διανύσματα $v, u \in V$.

Ορισμός 4.1.1. Έστω V, W δύο \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ λέγεται **γραμμική συνάρτηση** (linear transformation) αν

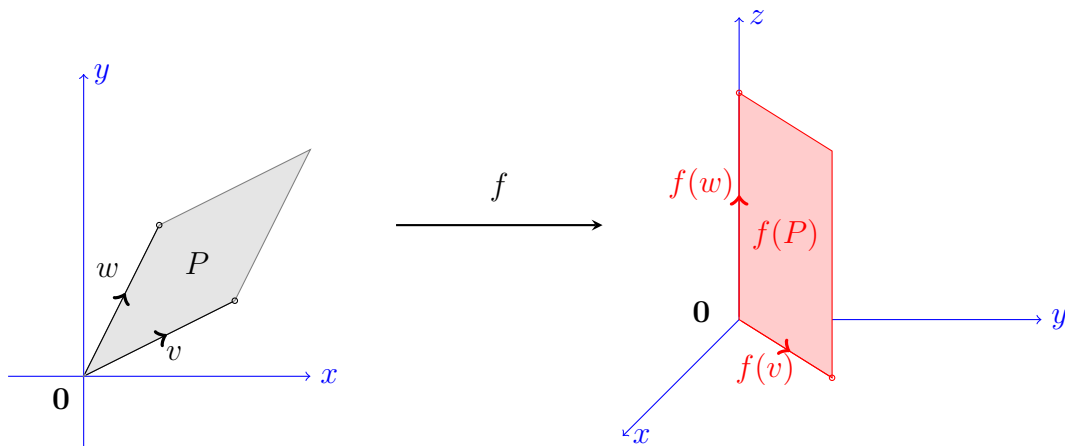
- i. $f(v + u) = f(v) + f(u)$,
- ii. $f(\kappa v) = \kappa f(v)$,

για όλα τα $\kappa \in \mathbb{k}, v, u \in V$. Ισοδύναμα η συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ είναι γραμμική συνάρτηση αν και μόνο αν

$$f(k \cdot v + t \cdot u) = k \cdot f(v) + t \cdot f(u), \quad k, t \in \mathbb{k}, v, u \in V.$$

Στο επόμενο σχήμα θα επιχειρήσουμε να δώσουμε τη γεωμετρική εποπτεία για μία γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Αφού ευθείες του \mathbb{R}^2 απεικονίζονται σε ευθείες του \mathbb{R}^3 και αθροίσματα στον \mathbb{R}^2 απεικονίζονται σε αθροίσματα στον \mathbb{R}^3 , είναι φανερό ότι πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- η εικόνα του μηδενικού διανύσματος (σημείο) του \mathbb{R}^2 στον \mathbb{R}^3 είναι το μηδενικό διάνυσμα του \mathbb{R}^3 ,
- όλα τα διανύσματα στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από δύο διανύσματα v, w απεικονίζονται σε διανύσματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $f(v), f(w)$.



Σχήμα 4.1: Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση. Γενικεύουμε την προηγούμενη παρατήρηση και θα δείξουμε ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Πράγματι αν $v \in V$, τότε

$$f(\mathbf{0}) = f(0v) = 0f(v) = \mathbf{0}.$$

Αποδειξάμε λοιπόν ότι:

Αν $f : V \rightarrow W$ είναι μία γραμμική συνάρτηση, τότε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Παραδείγματα 4.1.2.

1. Έστω V, W δύο \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι. Η συνάρτηση $V \rightarrow W, v \mapsto \mathbf{0}$ είναι γραμμική συνάρτηση και λέγεται **μηδενική** ή **τετριμμένη συνάρτηση** (trivial transformation) στον V .
2. Έστω V \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος. Η συνάρτηση $\text{id}_V : V \rightarrow V, v \mapsto v$ είναι γραμμική συνάρτηση και λέγεται **ταυτοτική συνάρτηση** (identity transformation) στον V .
3. Η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ δεν είναι γραμμική συνάρτηση, αφού $\mathbf{0} \mapsto (1, 0) \neq \mathbf{0}$.
4. Η συνάρτηση $f : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^2, (x, y, z) \mapsto (x - z, x + y)$ είναι γραμμική. Πράγματι:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \mapsto \\ &((x_1 + x_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 - z_1, x_1 + y_1) + (x_2 - z_2, x_2 + y_2) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

και

$$c(x, y, z) = (cx, cy, cz) \mapsto (cx - cz, cx + cy) = c(x - z, x + y) = cf(x, y, z).$$

5. Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι η συνάρτηση $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{k})$, $(b_1, \dots, b_n) \mapsto [b_1 \ \dots \ b_n]^T$, της Παρατήρησης 3.2.8, είναι γραμμική συνάρτηση.

Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση, B και D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι όλες οι πληροφορίες της $f : V \rightarrow W$ αποθηκεύονται σε έναν $m \times n$ πίνακα, όπου $m = \dim_{\mathbb{k}} W$ και $n = \dim_{\mathbb{k}} V$. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A_{D,B}^f$. Αν $B = (v_1, \dots, v_n)$, τότε η i στήλη του $A_{D,B}^f$ είναι ο $C_D(f(v_i))$, δηλ.

$$A_{D,B}^f = [C_D(f(v_1)) \ \dots \ C_D(f(v_n))] .$$

Θα υπολογίσουμε τους πίνακες $A_{D,B}^f$, για κάποιες από τις γραμμικές συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 4.1.2.

Παραδείγματα 4.1.3.

1. Έστω η μηδενική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Αν B και D είναι διατεταγμένες βάσεις των \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 ο πίνακας της f είναι ο μηδενικός 3×2 πίνακας:

$$A_{D,B}^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

2. Αν ο V είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n , ο W είναι διανυσματικός χώρος διάστασης m , B και D διατεταγμένες βάσεις των V και W και $f : V \rightarrow W$ η μηδενική συνάρτηση, τότε $A_{D,B}^f$ είναι ο μηδενικός πίνακας στον $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$.
3. Έστω $V = \mathbb{R}^2$, $B = (v_1, v_2)$ μία διατεταγμένη βάση του V και $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ταυτοτική συνάρτηση στον V . Αφού $\text{id}_V(v_1) = v_1$ και $\text{id}_V(v_2) = v_2$, προκύπτει ότι

$$A_{B,B}^{\text{id}_V} = I_2 .$$

Έστω τώρα $B = (e_1, e_2)$ και $D = (-e_2, 2e_1)$. Αφού $\text{id}_V(e_1) = e_1 = 0(-e_2) + 1/2(2e_1)$ και $\text{id}_V(e_2) = e_2 = -(-e_2)$, έπεται ότι

$$A_{D,B}^{\text{id}_V} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} .$$

Ο αναγνώστης μπορεί να διαπιστώσει ότι

$$A_{B,D}^{\text{id}_V} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και ότι } \left(A_{D,B}^{\text{id}_V} \right)^{-1} = A_{B,D}^{\text{id}_V} .$$

4. Αν ο V είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n και B είναι μία διατεταγμένη βάση του V , τότε

$$A_{B,B}^{\text{id}_V} = I_n .$$

5. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x - z, x + y) .$$

Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του \mathbb{k}^3 και $D = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{k}^2 . Τότε

$$f(e_1) = (1, 1) = \epsilon_1 + \epsilon_2, \text{ άρα } C_D(f(e_1)) = [1 \ 1]^T .$$

Επίσης

$$f(e_2) = (0, 1) = 0\epsilon_1 + 1\epsilon_2, \text{ \acute{a}\rho\alpha } C_D(f(e_2)) = [0 \ 1]^T .$$

Τέλος

$$f(e_3) = (-1, 0) = -1\epsilon_1 + 0\epsilon_2, \text{ \acute{a}\rho\alpha } C_D(f(e_3)) = [-1 \ 0]^T .$$

\text{\acute{A}\rho\alpha}

$$A_{D,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι

$$A_{D,B}^f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ x + y \end{bmatrix} .$$

Η επόμενη πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Πρόταση 4.1.4. Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση, B και D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Τότε, για κάθε $v \in V$, ισχύει ότι

$$C_D(f(v)) = A_{D,B}^f C_B(v).$$

Απόδειξη. Έστω ότι $B = (v_1, \dots, v_n)$ και ότι $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n$, δηλ.

$$C_B(v) = [k_1 \ \dots \ k_n]^T .$$

Αφού f είναι γραμμική συνάρτηση, προκύπτει ότι

$$f(v) = f(k_1v_1 + \dots + k_nv_n) = f(k_1v_1) + \dots + f(k_nv_n) = k_1f(v_1) + \dots + k_nf(v_n).$$

Αν $D = (w_1, \dots, w_m)$, τότε γράφοντας τα $f(v_i)$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των w_j , για $1 \leq j \leq m$ και $1 \leq i \leq n$, και συγκεντρώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές, προκύπτει ότι

$$C_D(f(v)) = k_1C_D(f(v_1)) + \dots + k_nC_D(f(v_n)) = A_{D,B}^f \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} .$$

□

Αντίστροφα αν καθορίσουμε διατεταγμένες βάσεις $B = (v_1, \dots, v_n)$ και $D = (w_1, \dots, w_m)$ για τους χώρους V και W , τότε σε κάθε πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ αντιστοιχεί μία γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ που ορίζεται από τη σχέση

$$C_D(f(v)) = A C_B(v) . \tag{4.1.4.1}$$

Η i στήλη του A είναι ίση με $C_D(f(v_i))$. Για παράδειγμα, η εικόνα του $f(v_1)$ βρίσκεται από την πρώτη στήλη του A :

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n .$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις εικόνες $f(v_i)$ για κάθε $v_i \in B$. Προκύπτει, λοιπόν, το εξής συμπέρασμα.

Πρόταση 4.1.5. Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$, και B, D διατεταγμένες βάσεις για τους V και W αντίστοιχα. Τότε υπάρχει γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ έτσι ώστε $A_{D,B}^f = A$. Αντίστροφα, σε κάθε γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ αντιστοιχεί ένας $m \times n$ πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$.

Στα επόμενα παραδείγματα θα εντυπώσουμε σε αυτές τις έννοιες.

Παράδειγμα 4.1.6.

1. Έστω ότι $f : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$ γραμμική συνάρτηση και ότι $f(e_1) = (1, 1)$ και $f(e_2) = (1, 2)$. Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{k}^2 . Τότε

$$A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Θα υπολογίσουμε την εικόνα του $v = (a, b)$. Από τη Σχέση (4.1.4.1) έχουμε ότι

$$C_B(f(v)) = A_{B,B}^f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ a + 2b \end{bmatrix}$$

και $f(a, b) = (a + b, a + 2b)$.

2. Έστω ότι η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^3$ έχει πίνακα

$$A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ως προς την κανονική βάση $B = (e_1, e_2, e_3)$ του \mathbb{R}^3 . Έπεται ότι

$$f(e_1) = (1, 0, 3), \quad f(e_2) = (2, 1, 0), \quad f(e_3) = (5, 1, 2).$$

Άρα, αν $v = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3$, τότε

$$C_B(v) = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix}, \quad C_B(f(v)) = A C_B(v) = \begin{bmatrix} \kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3 \\ \kappa_2 + \kappa_3 \\ 3\kappa_1 + 2\kappa_3 \end{bmatrix},$$

και $f(v) = (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3, \kappa_2 + \kappa_3, 3\kappa_1 + 2\kappa_3)$.

3. Θεωρούμε τους \mathbb{R} -διανυσματικούς χώρους \mathbb{k}^3 και \mathbb{k}^4 με αντίστοιχες διατεταγμένες κανονικές βάσεις $B = (e_1, e_2, e_3)$ και $D = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$. Έστω η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^4$ με πίνακα

$$A_{D,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

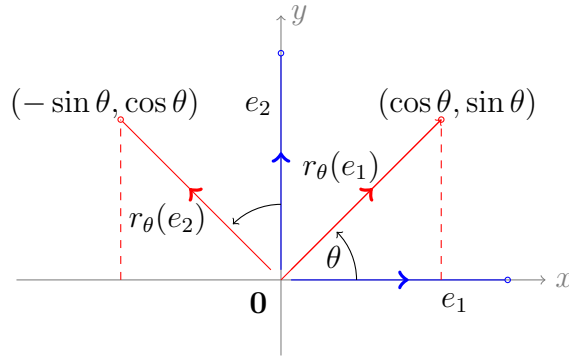
Για τον αναλυτικό τύπο της f έχουμε ότι

$$A_{D,B}^f \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b + 3c \\ 4a + 5b + 6c \\ 7a + 8b + 9c \\ 10a + 11b + 12c \end{bmatrix}$$

και άρα

$$f(a, b, c) = (a + 2b + 3c, 4a + 5b + 6c, 7a + 8b + 9c, 10a + 11b + 12c).$$

4. Η **αριστερόστροφη περιστροφή** (counterclockwise rotation) κατά γωνία θ , είναι η συνάρτηση r_θ του \mathbb{R}^2 που περιστρέφει το διάνυσμα OA κατά γωνία θ με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Η γεωμετρική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα (4.2).



Σχήμα 4.2: Αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ

Επομένως

$$r_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha', \beta').$$

Από τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσει κάποιος ότι $(1, 0) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$, ενώ $(0, 1) \mapsto (-\sin \theta, \cos \theta)$. Έτσι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην r_θ ως προς τη κανονική βάση είναι

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

και

$$r_\theta(a, b) = (\cos \theta a - \sin \theta b, \sin \theta a + \cos \theta b).$$

5. Η συνάρτηση

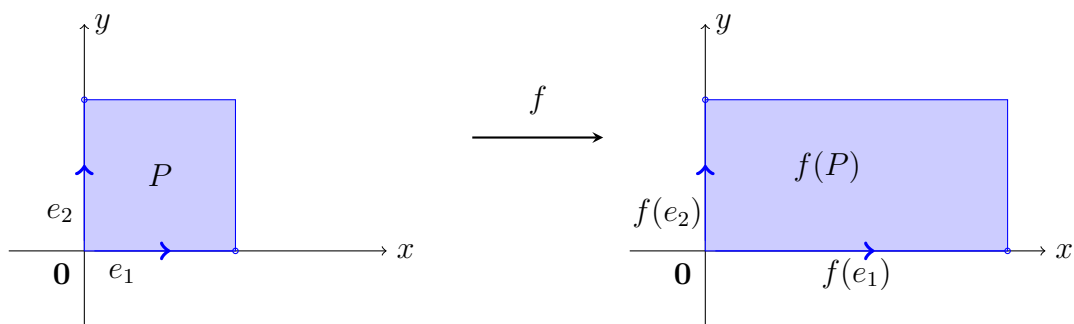
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto (k\alpha, \beta),$$

για κάποιο θετικό πραγματικό αριθμό k , λέγεται **διαστολή** (dilation) ως προς τον άξονα των X αν $k \geq 1$, ενώ αν $0 < k < 1$, τότε η f λέγεται **συστολή** (contraction) ως προς τον άξονα των X . Ο πίνακας της f ως προς τη κανονική βάση του \mathbb{R}^2 είναι ο

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

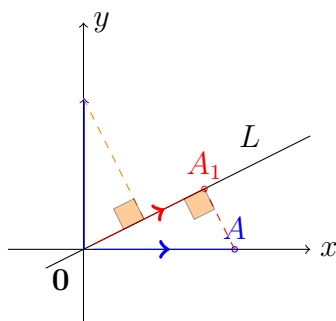
και ο τύπος της f είναι $f(a, b) = (ka, b)$. Ανάλογα ορίζεται η συνάρτηση διαστολής ή συστολής ως προς τον άξονα των Y .

Στη συνέχεια βλέπουμε το αποτέλεσμα της διαστολής ως προς τον άξονα των X με $k = 2$.



Σχήμα 4.3: Διαστολή ως προς τον άξονα των X με συντελεστή 2

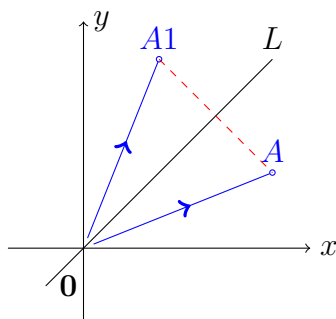
6. Έστω m κάποιος πραγματικός αριθμός. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που απεικονίζει το διάνυσμα OA στο διάνυσμα OA_1 επί της ευθείας με εξίσωση $y = mx$ έτσι ώστε OA_1 να είναι ορθογώνιο στο $A\bar{A}_1$, λέγεται **προβολή** (projection) στην προαναφερθείσα ευθεία. Γεωμετρικά η συνάρτηση αναπαριστάται όπως στο Σχήμα (6.1):



Σχήμα 4.4: Προβολή στην ευθεία $y = mx$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως να υπολογίζουμε τις προβολές με τη βοήθεια των εσωτερικών γινομένων.

7. Η συνάρτηση f του \mathbb{k}^2 που αντιστοιχεί το OA στο OA' που απέχει από την ευθεία με εξίσωση $y = mx$ όσο και το OA λέγεται **αντικατοπτρισμός** (reflection):

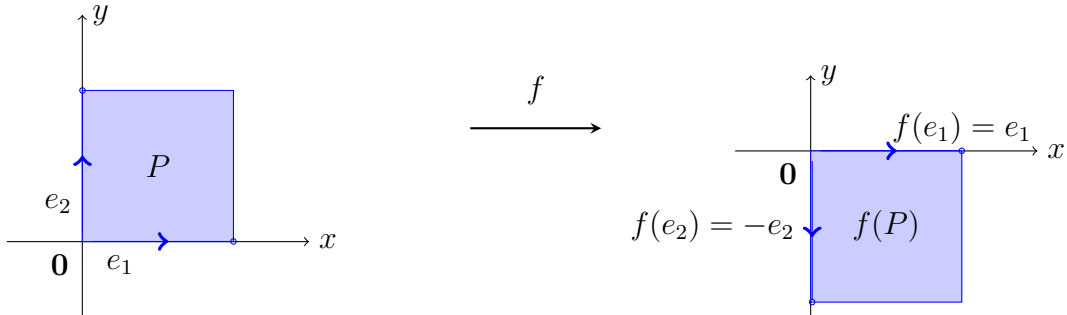


Σχήμα 4.5: Αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$

Θα βρούμε τον πίνακα του αντικατοπτρισμού f ως προς τον άξονα των X για τη κανονική βάση $B = \{e_1, e_2\}$ του \mathbb{R}^2 , βλ. Σχήμα (4.6). Παρατηρούμε ότι $f(e_1) = e_1$

ενώ $f(e_2) = (0, -1)$. Άρα

$$A_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ και επομένως } f(a, b) = (a, -b).$$



Σχήμα 4.6: Αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα των X

Έστω ότι V_1, V_2, V_3 είναι \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι και ότι $f : V_1 \rightarrow V_2, g : V_2 \rightarrow V_3$ είναι γραμμικές συναρτήσεις. Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσει κάποιος ότι η σύνθεση $g \circ f : V_1 \rightarrow V_3$ είναι γραμμική συνάρτηση. Αν B, D, E είναι βάσεις για τους V_1, V_2, V_3 αντίστοιχα, τότε προκύπτει ο επόμενος μνημονικός τύπος:

$$A_{E,B}^{(g \circ f)} = A_{E,D}^g A_{D,B}^f.$$

Παραδείγματα 4.1.7.

1. Έστω οι γραμμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2, f(a, b) = (a, -b), g : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^3, g(a, b) = (a, b, a - b)$ και B, D οι κανονικές βάσεις των χώρων \mathbb{k}^2 και \mathbb{k}^3 αντίστοιχα. Τότε

$$A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_{D,B}^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_{D,B}^{g \circ f} = A_{D,B}^g \circ A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$g \circ f : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^3, (g \circ f)(a, b) = (a, -b, a + b).$$

2. Θα υπολογίσουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που προκύπτει από τις συνθέσεις των εξής γραμμικών συναρτήσεων:

- f_1 : την αριστερόστροφη περιστροφή του \mathbb{R}^2 με γωνία $\theta = \pi/2$,
- f_2 : τον αντικατοπτρισμό του \mathbb{R}^2 ως προς τον άξονα των X ,
- f_3 : τη διαστολή ως προς τον άξονα των Y με συντελεστή 2.

Αντί να βρούμε τους πίνακες για κάθε μία από τις συναρτήσεις και στη συνέχεια να τους πολλαπλασιάσουμε, θα υπολογίσουμε την εικόνα για κάθε ένα από τα διανύσματα της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^2 μετά από τη σύνθεση των τριών συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \xrightarrow{f_1} & e_2 & \xrightarrow{f_2} & -e_2 & \xrightarrow{f_3} & (0, -2) \\ e_2 & \xrightarrow{f_1} & -e_1 & \xrightarrow{f_2} & -e_1 & \xrightarrow{f_3} & (-1, 0) \end{array}.$$

Αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 , έπεται ότι $A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Επομένως

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (a, b) \mapsto (-b, -2a).$$

Ασκήσεις Ενότητας 4.1

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γραμμική συνάρτηση, όπου $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, y, 3x)$. Να αποδείξετε ότι αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{K}^2 και D η κανονική βάση του \mathbb{K}^3 , τότε

$$A_{B,D}^f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με πίνακα τον A .

3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να οριστεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με πίνακα A . Να οριστεί η γραμμική συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με πίνακα A^T .

4. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ όπου $f(a, b, c) = (a + b + c, b + c, a + 2c, b + 3c)$. Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

5. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας μίας γραμμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Να υπολογίσετε το $f(4, -3)$.

6. Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που πρώτα περιστρέφει δεξιόστροφα ως προς γωνία $\pi/2$, μετά διαστέλλει ως προς τον άξονα των X με συντελεστή 3, στη συνέχεια διαστέλλει ως προς τον άξονα των Y με συντελεστή 2 και τέλος αντικατοπτρίζει ως προς τον άξονα των Y . (Υπόδειξη: Να κάνετε το σχήμα και να βρείτε τις εικόνες των e_1 και e_2).

4.2 Γραμμικές Συναρτήσεις, II

Σε αυτήν την ενότητα εισάγουμε την έννοια της εικόνας και του πυρήνα μίας γραμμικής συνάρτησης.

Ορισμός 4.2.1. Έστω ότι V, W είναι \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι και ότι $f : V \rightarrow W, v \mapsto f(v)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση. Η **εικόνα** (image) της f συμβολίζεται με $\text{Im } f$ και είναι το σύνολο

$$\text{Im } f = \{ f(v) : v \in V \} \subseteq W.$$

Ο **πυρήνας** (kernel) της f συμβολίζεται $\text{Ker } f$ και είναι το σύνολο

$$\text{Ker } f = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \subseteq V.$$

Θα υπολογίσουμε τον πυρήνα και την εικόνα σε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παραδείγματα 4.2.2.

1. Έστω

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto \mathbf{0},$$

η τετριμμένη συνάρτηση στον \mathbb{R}^n . Τότε $\text{Ker } f = \mathbb{R}^n$, ενώ $\text{Im } f = \{0\}$.

2. Έστω

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, 0, 0).$$

Τότε

$$\text{Ker } f = S(\{(0, 1)\}) \text{ και } \text{Im } f = \{S(\{(1, 0, 0)\})\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσει κάποιος ότι τα σύνολα $\text{Im } f$ και $\text{Ker } f$ είναι υποχώροι των W και V αντίστοιχα. Πως ελέγχουμε όμως αν ένα διάνυσμα w του W είναι μέσα στην $\text{Im } f$ ή αν ένα διάνυσμα v του V είναι μέσα στον $\text{Ker } f$; Έστω ότι B και D είναι διατεταγμένες βάσεις των V και W . Θα υποθέσουμε ότι $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n, \dim_{\mathbb{k}}(W) = m$ και ότι $B = (v_1, \dots, v_n)$. Στην Πρόταση 4.1.4 είδαμε ότι

$$A_{D,B}^f C_B(v) = C_D(f(v)).$$

Επομένως $w \in \text{Im } f$, δηλ. υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $f(v) = w$, αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα

$$A_{D,B}^f X = B, \text{ όπου } B = C_D(w)$$

είναι συμβατό. Εάν αυτό συμβαίνει και (x_1, \dots, x_n) είναι λύση του συστήματος, τότε

$$C_D(w) = x_1 C_D(f(v_1)) + \dots + x_n C_D(f(v_n)).$$

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα $v \in V$ προκύπτει ως ο γραμμικός συνδυασμός

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $v \in \text{Ker } f$, δηλ. $f(v) = \mathbf{0}$, αν και μόνο αν

$$A_{D,B}^f C_B(v) = \mathbf{0}.$$

Επομένως για να βρούμε τα στοιχεία του $\text{Ker } f$ υπολογίζουμε τον $\text{null}(A_{D,B}^f)$. Αν το διάνυσμα $v = (x_1, \dots, x_n)$ είναι λύση του $AX = \mathbf{0}$, τότε το $v \in \text{null}(A_{D,B}^f)$ και

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \text{Ker } f.$$

Συγκεντρώνουμε αυτές τις παρατηρήσεις στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.3. Έστω $f : V \rightarrow W$, $v \mapsto f(v)$ μία γραμμική συνάρτηση, B και D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Τότε:

- i)** το $w \in W$ ανήκει στον $\text{Im} f$ αν και μόνο αν $C_D(w)$ παράγεται από τις στήλες του $A_{D,B}^f$
- ii)** το $v \in V$ ανήκει στον $\text{Ker} f$ του V αν και μόνο αν $A_{D,B}^f C_B(v) = \mathbf{0}$.

Έχουμε δει ότι η βαθμίδα $\text{rank}(A_{D,B}^f)$ είναι ίση με τη διάσταση του χώρου στηλών του $A_{D,B}^f$, βλ. Πρόταση 3.4.1. Επομένως ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του $A_{D,B}^f$ έχει διάσταση $\text{rank}(A_{D,B}^f)$. Ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.2.3, σημειώνουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.4. Έστω $f : V \rightarrow W$, $v \mapsto f(v)$ μία γραμμική συνάρτηση, B και D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Τότε:

- i)** $\dim_{\mathbb{k}}(\text{Im} f) = \text{rank}(A_{D,B}^f)$.
- ii)** $\dim_{\mathbb{k}}(\text{Ker} f) = \dim_{\mathbb{k}}(\text{null}(A))$

Το επόμενο παράδειγμα θα ξεκαθαρίσει αυτές τις έννοιες.

Παράδειγμα 4.2.5. Έστω η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x - z, x + y),$$

και έστω B, D οι κανονικές βάσεις του \mathbb{R}^3 και του \mathbb{R}^2 . Τότε

$$A_{D,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι $\text{rank}(A_{D,B}^f) = 2$. Επομένως, ο χώρος στηλών του $A_{D,B}^f$ είναι υποχώρος του \mathbb{R}^2 με διάσταση δύο, άρα $\Sigma(A_{D,B}^f) = \mathbb{R}^2$ και κατά συνέπεια, $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$. Ας βρούμε αναλυτικά για ένα τυχαίο στοιχείο $w = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, ένα στοιχείο $v = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $f(v) = w$. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A_{D,B}^f \mid C_D(w)]$ και τον φέρουμε σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \end{array} \right].$$

Επομένως $v = (b_1 + t, b_2 - b_1 - t, t)$ έχει την ιδιότητα $f(v) = w$, όπου $t \in \mathbb{R}$ και υπάρχουν άπειρα διανύσματα του \mathbb{R}^3 που απεικονίζονται μέσω της f στο w .

Είδαμε ότι ο $\text{Ker} f$ είναι ο μηδενοχώρος του $A_{D,B}^f$ και αποτελείται από τις λύσεις του συστήματος $A_{D,B}^f X = \mathbf{0}$. Επομένως

$$\text{Ker} f = \{(x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = S(\{(1, -1, 1)\}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\dim_{\mathbb{k}}(\text{Ker} f) + \dim_{\mathbb{k}}(\text{Im} f) = 3 = \dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{R}^3).$$

Η γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν διαφορετικά διανύσματα απεικονίζονται σε διαφορετικά στοιχεία. Έτσι αν f είναι ένα προς ένα και $f(v_1) = f(v_2)$, συμπεραίνουμε ότι $v_1 = v_2$.

Πρόταση 4.2.6. Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση. Τότε η f είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\text{Ker } f = \{0\}$.

Απόδειξη. Αν $0 \neq v \in \text{Ker } f$ τότε $f(v) = f(0) = 0$ και επομένως η f δεν είναι ένα προς ένα. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\text{Ker } f = \{0\}$ και έστω ότι $f(v_1) = f(v_2)$. Τότε

$$f(v_1) - f(v_2) = 0 \Leftrightarrow f(v_1 - v_2) = 0 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \text{Ker } f = \{0\}.$$

Επομένως $v_1 - v_2 = 0$ και $v_1 = v_2$. □

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο πυρήνας μίας γραμμικής συνάρτησης f μετράει πόσο απέχει η γραμμική συνάρτηση f από το να είναι ένα προς ένα. Η $f : V \rightarrow W$ λέγεται **επιμορφισμός** (epimorphism) όταν $\text{Im } f = W$.

Πρόταση 4.2.7. Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση, B και D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Τότε η f είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{k}}(W) = \text{rank}(A_{D,B}^f)$.

Απόδειξη. Όμως η f είναι επιμορφισμός ακριβώς όταν $\text{Im } f = W$. Από το Πόρισμα 4.2.4 έπεται ότι η f είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{k}}(W) = \text{rank}(A_{D,B}^f)$. □

Η $f : V \rightarrow W$ λέγεται **ισομορφισμός** (isomorphism) αν είναι ένα προς ένα και επιμορφισμός.

Παράδειγμα 4.2.8. Έστω

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y).$$

Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 . Τότε

$$A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αφού $\det(A_{B,B}^f) = -1$, ο πίνακας $A_{B,B}^f$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $\text{null}(A_{B,B}^f) = \{0\}$. Ο χώρος στηλών του $A_{B,B}^f$ είναι ο \mathbb{R}^2 . Άρα η f είναι ένα προς ένα και επιμορφισμός, επομένως f είναι ισομορφισμός.

Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση. Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων $\text{Im } f$ του W και $\text{Ker } f$ του V .

Θεώρημα 4.2.9. Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση. Τότε:

$$n = \dim_{\mathbb{k}}(V) = \dim_{\mathbb{k}}(\text{Ker } f) + \dim_{\mathbb{k}}(\text{Im } f).$$

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$ ο πίνακας της συνάρτησης f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις B και D των V και W αντίστοιχα. Από το Θεώρημα 3.4.3, γνωρίζουμε ότι

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{null}(A)) = n. \quad (4.2.9.1)$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.4 $\text{rank}(A) = \dim_{\mathbb{k}}(\text{Im } f)$ και $\dim_{\mathbb{k}}(\text{null}(A)) = \dim_{\mathbb{k}}(\text{Ker } f)$, επομένως προκύπτει το ζητούμενο. □

Τα επόμενα πορίσματα είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 4.2.9.

Πόρισμα 4.2.10. Αν $f : V \rightarrow W$ είναι ισομορφισμός, τότε

$$\dim_{\mathbb{k}} V = \dim_{\mathbb{k}} W .$$

Απόδειξη. Αφού f είναι ισομορφισμός, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{k}}(\text{Ker } f) = 0$ και $\dim_{\mathbb{k}}(\text{Im } f) = \dim_{\mathbb{k}}(W)$. Επομένως

$$\dim_{\mathbb{k}}(V) = 0 + \dim_{\mathbb{k}}(W) = \dim_{\mathbb{k}}(W) .$$

□

Μπορούμε, λοιπόν, να αποφασίσουμε αν $f : V \rightarrow W$ είναι ισομορφισμός, ελέγχοντας αν ο πίνακας της συνάρτησης είναι αντιστρέψιμος.

Πόρισμα 4.2.11. Έστω V και W διανυσματικοί χώροι με την ίδια διάσταση, B διατεταγμένη βάση του V και D διατεταγμένη βάση του W . Αν $f : V \rightarrow W$ είναι γραμμική συνάρτηση τότε η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας $A_{D,B}^f$ είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη. Ο πίνακας $A_{D,B}^f$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\text{null } A_{D,B}^f = \{\mathbf{0}\}$, ισοδύναμα αν και μόνο αν $\text{rank}(A_{D,B}^f) = \dim_{\mathbb{k}}(W)$, δηλ. αν $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ και $\text{Im } f = W$. □

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι αν B, D, E είναι διατεταγμένες βάσεις για τους V_1, V_2 , και V_3 αντίστοιχα, τότε

$$A_{E,B}^{g \circ f} = A_{E,D}^g A_{D,B}^f .$$

Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση μίας γραμμικής συνάρτησης που είναι ισομορφισμός. Τονίζουμε ότι αν μία γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ είναι ισομορφισμός, τότε η συνάρτηση $f^{-1} : W \rightarrow V$ υπάρχει, αφού f είναι αμφιμονότιμη και επιμορφισμός.

Πρόταση 4.2.12. Έστω $f : V \rightarrow W$ ισομορφισμός, B, D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα, $A = A_{D,B}^f$. Τότε $f^{-1} : W \rightarrow V$ είναι η γραμμική συνάρτηση με πίνακα A^{-1} ως προς τις διατεταγμένες βάσεις D και B των W και V αντίστοιχα, δηλ.

$$A_{B,D}^{f^{-1}} = (A_{D,B}^f)^{-1} .$$

Απόδειξη. Έστω ότι $g : W \rightarrow V$ είναι η γραμμική συνάρτηση με πίνακα $A_{B,D}^g = A^{-1}$. Τότε

$$A_{B,B}^{g \circ f} = A_{B,D}^g A_{D,B}^f = A^{-1} A = I_n$$

και επομένως

$$C_B(g \circ f(v)) = I_n C_B(v) = C_B(v) .$$

Συνεπώς, $g \circ f : V \rightarrow V, v \mapsto v$, δηλ. $g = f^{-1}$. □

Παράδειγμα 4.2.13. Θα υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της γραμμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y)$. Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 . Τότε

$$A = A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow A_{B,B}^{f^{-1}} = (A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} .$$

Επομένως $f^{-1}(x, y) = (-3x + 2y, 2x - y)$.

Έστω ότι οι \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι V, W έχουν την ίδια διάσταση n , και έστω B, D διατεταγμένες βάσεις των V και W αντίστοιχα. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ έτσι ώστε $A_{D,B}^f = I_n$. Αφού ο πίνακας $A_{D,B}^f$ είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός. Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο συμπέρασμα.

Θεώρημα 4.2.14. Έστω ότι V, W είναι \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι και ότι $\dim_{\mathbb{k}}(V) = \dim_{\mathbb{k}}(W)$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $f : V \rightarrow W$. Ειδικότερα, αν $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n$, τότε ο V είναι ισομορφος με τον \mathbb{k}^n .

Αυτό σημαίνει ότι όταν δύο \mathbb{k} -διανυσματικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση, τότε από αλγεβρική σκοπιά είναι πανομοιότυποι: μελετώντας τον έναν από τους δύο, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα που ισχύουν και για τους δύο. Παρατηρούμε επίσης ότι ο ισομορφισμός του Θεωρήματος 4.2.14 δεν είναι μοναδικός. Αν κρατήσουμε τη βάση B του V σταθερή, τότε κάθε φορά που αλλάζουμε τη διάταξη σε οποιαδήποτε βάση του W , παίρνουμε και έναν διαφορετικό ισομορφισμό. Υπάρχει λόγος να προτιμήσουμε κάποιον από τους ισομορφισμούς; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική, λόγω των εφαρμογών, και η επιλογή της βάσης εξαρτάται κυρίως από τις γραμμικές συναρτήσεις που θέλουμε να μελετήσουμε. Θα δούμε, λοιπόν, την επίδραση που έχουν οι αλλαγές βάσεων (στις γραμμικές συναρτήσεις μεταξύ των δύο χώρων) στην επόμενη ενότητα.

Παραδείγματα 4.2.15.

1. Έστω $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 0, 1)$, $V = S(\{v_1, v_2\})$. Ο χώρος V είναι επίπεδο του \mathbb{R}^3 , $D = (v_1, v_2)$ είναι διατεταγμένη βάση του V και $\dim V = 2$. Θα βρούμε έναν ισομορφισμό μεταξύ του \mathbb{R}^2 και του V . Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 . Παίρνουμε τη γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, όπου $f(e_1) = (1, 2, 0)$ και $f(e_2) = (0, 0, 1)$. Ο αναλυτικός τύπος της f προκύπτει από τη σχέση $f(a, b) = f(ae_1 + be_2) = af(e_1) + bf(e_2) = (a, 2a, 0) + (0, 0, b) = (a, 2a, b)$, ενώ

$$A_{D,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $A_{D,B}^f$ είναι αντιστρέψιμος και η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός.

2. Έστω τώρα $V = S(\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\})$ και $W = S(\{(1, 4, 0), (0, 0, 1)\})$. Παρατηρούμε ότι $\dim(V) = \dim(W) = 2$. Θα βρούμε έναν ισομορφισμό $f : V \rightarrow W$. Έστω η βάση $D = (v_1, v_2)$ του V , όπου $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ και η βάση $E = (w_1, w_2)$ του W , όπου $w_1 = (1, 4, 0)$, $w_2 = (0, 0, 1)$. Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και τη γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow W$ έτσι ώστε $A_{E,D}^f = A$. Έχουμε ότι $f(v_1) = w_2$ και $f(v_2) = w_1$, ενώ $f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$ άρα $f(a, 2a, b) = (b, 4b, a)$. Η γραμμική συνάρτηση f είναι ισομορφισμός.

Συγκεντρώνουμε τους ορισμούς και τα κυριότερα αποτελέσματα των γραμμικών συναρτήσεων στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 4.2.1: Γραμμικές συναρτήσεις, Σύνοψη

- i. Η $f : V \rightarrow U$ λέγεται *γραμμική συνάρτηση* αν $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ και $f(\kappa v) = \kappa f(v)$ για όλα τα $\kappa \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, v \in V$.
- ii. Αν B και D είναι διατεταγμένες βάσεις των V και U αντίστοιχα, τότε η f ορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων της B . Ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις D και B συμβολίζεται $A_{D,B}^f$ και είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$A_{D,B}^f = [C_D(f(v_1)) \quad \cdots \quad C_D(f(v_n))],$$

όπου $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ και $m = \dim_{\mathbb{K}}(U)$. Ισχύει ότι

$$C_D(f(v)) = A_{D,B}^f C_B(v).$$

- iii. Η f είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\text{Ker } f = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $\text{null}(A_f) = \{0\}$. Η f είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\text{Im } f = U$, δηλ. αν και μόνο αν $\text{rank}(A_{D,B}^f) = \dim_{\mathbb{K}}(U)$. Ισχύει ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im } f) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker } f) = \dim_{\mathbb{K}}(V).$$

- iv. Όταν $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(U)$, συγκρίνοντας διαστάσεις προκύπτει ότι

$$f \text{ ισομορφισμός} \Leftrightarrow f \text{ ένα προς ένα} \Leftrightarrow f \text{ επιμορφισμός}.$$

Επομένως η $f : V \rightarrow U$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας $A_{D,B}^f$ είναι αντιστρέψιμος και σε αυτήν την περίπτωση

$$A_{B,D}^{f^{-1}} = (A_{D,B}^f)^{-1}.$$

Ασκήσεις Ενότητας 4.2

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \rightarrow (x + 2y, y - z, x + 2z).$$

Να υπολογίσετε μία βάση των $\text{Ker } f$ και $\text{Im } f$.

2. Έστω η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με

$$f(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y + 5z, -y + 2z),$$

για $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

3. Να βρεθεί ισομορφισμός $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, όπου $V = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

4. Να βρεθεί ισομορφισμός $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου $V = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

4.3 Πίνακες Αλλαγής Βάσης

Έστω ότι οι B, B' είναι δύο διατεταγμένες βάσεις του \mathbb{k} -διανυσματικού χώρου V και ότι αντίστοιχα οι D, D' είναι διατεταγμένες βάσεις του \mathbb{k} -διανυσματικού χώρου U . Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow U$. Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των πινάκων $A_{D,B}^f$ και $A_{D',B'}^f$; Με αυτό το ερώτημα θα ασχοληθούμε σε αυτή την ενότητα. Πρώτα, εξετάζουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στην ταυτοτική συνάρτηση $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ως προς δύο διατεταγμένες βάσεις B και B' . Ονομάζουμε τον πίνακα $A_{B',B}^{\text{id}_V}$ **πίνακα μετάβασης** (change of basis matrix) και τον συμβολίζουμε με $S_{B' \leftarrow B}$. Ο πίνακας $S_{B' \leftarrow B}$ είναι τετραγωνικός. Ο αριθμός γραμμών (και στηλών) του $S_{B' \leftarrow B}$ είναι ίσος με n όπου $n = \dim_{\mathbb{k}}(V)$. Αν $B = (v_1, \dots, v_n)$, τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 4.2.1.ii, ισχύει ότι:

$$S_{B' \leftarrow B} = [C_{B'}(v_1) \quad \cdots \quad C_{B'}(v_n)].$$

Παρατηρούμε ότι

$$S_{B' \leftarrow B} = I_n \Leftrightarrow B = B'.$$

Έτσι, σύμφωνα πάλι με τον Πίνακα 4.2.1.iv, αφού

$$S_{B \leftarrow B'} S_{B' \leftarrow B} = S_{B \leftarrow B} = I_n,$$

έπεται ότι:

$$(S_{B' \leftarrow B})^{-1} = S_{B \leftarrow B'}.$$

Παραδείγματα 4.3.1.

1. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 και $B' = (v_1, v_2)$ όπου $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (1, 1)$. Είναι πολύ εύκολο να βρούμε τον πίνακα $S_{B \leftarrow B'}$. Αφού $v_1 = e_1 + 2e_2$ και $v_2 = e_1 + e_2$, έπεται ότι

$$S_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$S_{B' \leftarrow B} = (S_{B \leftarrow B'})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε την ερμηνεία των στηλών του $S_{B' \leftarrow B}$, ως τους πίνακες των συντεταγμένων των στοιχείων της βάσης B ως προς τη βάση B' . Αφού

$$S_{B' \leftarrow B} = [C_{B'}(v_1) \quad C_{B'}(v_2)],$$

έπεται ότι $e_1 = -v_1 + 2v_2$ και ότι $e_2 = v_1 - v_2$.

2. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και $B' = (v_1, v_2, v_3)$ όπου $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = e_3$. Θα βρούμε τους πίνακες μετάβασης από τη μία βάση στην άλλη. Θα ξεκινήσουμε με τον απλούστερο από τους δύο πίνακες, τον $S_{B \leftarrow B'}$, που οι στήλες του είναι οι συντεταγμένες των στοιχείων της B' . Στη συνέχεια, βρίσκουμε τον $S_{B' \leftarrow B}$ παίρνοντας τον αντίστροφο του $S_{B \leftarrow B'}$. Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι

$$S_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } S_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από τις στήλες του $S_{B' \leftarrow B}$ συμπεραίνουμε ότι $e_1 = -v_1 + 2v_2$, $e_2 = v_1 - v_2$ και βέβαια $e_3 = v_3$.

3. Στον $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ θεωρούμε τον επόμενο πίνακα A και τον αντίστροφό του :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, άρα $v_1 = (3, 1)$, $v_2 = (2, 1)$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον \mathbb{C}^2 και $B' = (v_1, v_2)$ είναι διατεταγμένη βάση, βλ. Πρόταση 3.5.10. Παρατηρούμε ότι :

$$A = S_{B \leftarrow B'} \text{ και } A^{-1} = S_{B' \leftarrow B}.$$

Επομένως $e_1 = v_1 - v_2$ και $e_2 = -2v_1 + 3v_2$.

Μία χρήσιμη σχέση, συνέπεια της θεώρησης του πίνακα $S_{B' \leftarrow B}$ ως πίνακα της ταυτοτικής συνάρτησης του V και της Πρότασης 4.1.4 είναι η εξής :

$$\boxed{C_{B'}(v) = S_{B' \leftarrow B} C_B(v)}. \quad (4.3.1.1)$$

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 , $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (1, -1)$ και $B' = (w_1, w_2)$. Παρατηρούμε ότι $w_1 = e_1 + e_2$, $w_2 = e_1 - e_2$. Άρα

$$S_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } S_{B' \leftarrow B} = (S_{B \leftarrow B'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $e_1 = 1/2 w_1 + 1/2 w_2$, $e_2 = 1/2 w_1 - 1/2 w_2$. Έστω $v = (2, 1)$. Θα βρούμε τις συντεταγμένες του v ως προς τη βάση B' . Αφού $v = 2e_1 + e_2$, έπεται ότι

$$C_{B'}(v) = S_{B' \leftarrow B} C_B(v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

δηλ. $v = 3/2 w_1 + 1/2 w_2$.

Έστω τώρα $w = 3w_1 + w_2$. Τότε

$$C_B(w) = S_{B \leftarrow B'} C_{B'}(w) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

άρα

$$w = 4e_1 + 2e_2 = (4, 2).$$

Έστω, λοιπόν, $f : V \rightarrow U$ γραμμική συνάρτηση. Στη συνέχεια περιγράφουμε τη σχέση μεταξύ των πινάκων $A_{D,B}^f$ και $A_{D',B'}^f$.

Πρόταση 4.3.3. Έστω $f : V \rightarrow W$ μία γραμμική συνάρτηση, B, B' δύο διατεταγμένες βάσεις του V και D, D' δύο διατεταγμένες βάσεις του W . Τότε

$$A_{D',B'}^f = S_{D' \leftarrow D} A_{D,B}^f S_{B \leftarrow B'}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $B' = (v_1, \dots, v_n)$, όπου $n = \dim_{\mathbb{k}}(V)$. Τότε

$$A_{D',B'}^f = \begin{bmatrix} C_{D'}(f(v_1)) & \cdots & C_{D'}(f(v_n)) \end{bmatrix}.$$

Για την i στήλη του $A_{D',B'}^f$, από τη σχέση (4.3.1.1), έχουμε ότι

$$C_{D'}(f(v_i)) = S_{D' \leftarrow D} C_D(f(v_i)) . \quad (4.3.3.1)$$

Από την Πρόταση 4.1.4 έχουμε ότι

$$C_D(f(v_i)) = A_{D,B}^f C_B(v_i) .$$

Αντικαθιστώντας στην Έκφραση (4.3.3.1) προκύπτει ότι

$$C_{D'}(f(v_i)) = S_{D' \leftarrow D} A_{D,B}^f C_B(v_i) .$$

Παρατηρούμε ότι $C_B(v_i)$ είναι η i στήλη του $S_{B \leftarrow B'}$, δηλ. η i στήλη του $A_{D',B'}^f$ προκύπτει ως την i στήλη του γινομένου πινάκων

$$S_{D' \leftarrow D} A_{D,B}^f S_{B \leftarrow B'} .$$

Η πρότασή μας λοιπόν αποδείχθηκε. □

Ως ειδική περίπτωση της Πρότασης 4.3.3 εξετάζουμε τι συμβαίνει όταν $V = W$ και $B = D$ ενώ $B' = D'$. Θέτοντας $S = S_{B \leftarrow B'}$, προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα :

Πόρισμα 4.3.4. Έστω $f : V \rightarrow V$ μία γραμμική συνάρτηση και B, B' δύο διατεταγμένες βάσεις του V . Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S , έτσι ώστε

$$A_{B',B'}^f = S^{-1} A_{B,B}^f S . \quad (4.3.4.1)$$

Οι πίνακες $A_{B,B}^f, A_{B',B'}^f$ είναι όμοιοι. Γενικότερα δύο πίνακες $A, A' \in M_n(\mathbb{k})$ λέγονται **όμοιοι** (similar) αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{k})$ έτσι ώστε

$$A' = P^{-1} A P .$$

Σημειώνουμε την επόμενη χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 4.3.5. Έστω A, A' δύο όμοιοι πίνακες. Τότε $\det A = \det A'$.

Απόδειξη. Έστω ότι $A' = P^{-1} A P$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα P . Αφού $\det(P^{-1}) \det P = 1$, έπεται ότι

$$\det A' = \det (P^{-1} A P) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A .$$

□

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν $f : V \rightarrow V$ είναι μία γραμμική συνάρτηση και B, B' δύο διατεταγμένες βάσεις του V , τότε

$$\det(A_{B',B'}^f) = \det(A_{B,B}^f) .$$

Παραδείγματα 4.3.6.

1. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 , \quad (x, y, z) \mapsto (x + 3y - z, 2x - y, y + 2z) .$$

Έστω $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Αφού $f(e_1) = (1, 2, 0)$, $f(e_2) = (3, -1, 1)$ και $f(e_3) = (-1, 0, 2)$,

$$A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έστω τώρα $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 0, -1)$. Τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $D = (v_1, v_2, v_3)$ είναι διατεταγμένη βάση του \mathbb{R}^3 . Επίσης,

$$S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$S_{D \leftarrow B} = (S_{B \leftarrow D})^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$A_{D,B}^f = S_{D \leftarrow B} A_{B,B}^f S_{B \leftarrow D} = S_{D \leftarrow B} A_{B,B}^f I_3 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & -8 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Αφού

$$A_{D,B}^f = [C_D(f(e_1)) \quad C_D(f(e_2)) \quad C_D(f(e_3))]^T,$$

έπεται ότι

- $f(e_1) = v_1 + v_2$,
- $f(e_2) = \frac{1}{5}(-8v_1 + 3v_2 + 6v_3)$,
- $f(e_3) = \frac{1}{5}(-35v_1 + 3v_2 - 4v_3)$.

Επίσης,

$$A_{D,D}^f = S_{D \leftarrow B} A_{B,B}^f S_{B \leftarrow D} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -5 & -6 & 13 \\ 0 & 11 & 7 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

- $f(v_1) = -v_1 + 2v_3$,
- $f(v_2) = \frac{1}{5}(-6v_1 + 11v_2 + 2v_3)$, και
- $f(v_3) = \frac{1}{5}(13v_1 + 7v_2 + 4v_3)$.

2. Έστω $v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1) \in \mathbb{C}^2$, B η κανονική βάση του \mathbb{C}^2 και D η βάση (v_1, v_2) . Δίνεται η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, με την πληροφορία ότι $f(v_1) = v_1$ και $f(v_2) = 2v_2$. Ο πίνακας, λοιπόν, της f ως προς τη βάση D είναι ιδιαίτερα απλός:

$$A_{D,D}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επιθυμούμε να βρούμε τον τύπο της f . Αφού

$$S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{D \leftarrow B} = (S_{B \leftarrow D})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

έπεται ότι

$$A_{B,B}^f = S_{B \leftarrow D} A_{D,D}^f S_{D \leftarrow B} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αφού $C_B f(a, b) = A_{B,B}^f C_B(a, b)$, έχουμε ότι:

$$C_B f(a, b) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3a + b \\ b + 3a \end{bmatrix}$$

και άρα

$$f(a, b) = \frac{1}{2}(3a + b, b + 3a).$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας της f ως προς τη βάση D είναι σαφώς απλούστερος από τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση B .

Ένας $n \times n$ πίνακας A με συντελεστές από το \mathbb{k} είναι **διαγωνιοποιήσιμος** (diagonalizable), αν ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα. Η γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow V$ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμη** (diagonalizable) αν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση D του V , έτσι ώστε ο $A_{D,D}^f$ να είναι διαγώνιος πίνακας. Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο, είναι η εύρεση κριτηρίων για το πότε ένας τετραγωνικός πίνακας και αντίστοιχα μία γραμμική συνάρτηση είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

Ασκήσεις Ενότητας 4.3

1. Έστω $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ η συνήθης βάση του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^4 , $e_1 = e_1 + e_4$, $e_2 = e_1 + 3e_2$, $e_3 = 3e_1 + e_2$, $e_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $D = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Να βρεθούν οι πίνακες $S_{D \leftarrow B}$ και $S_{B \leftarrow D}$.

2. Έστω $C = ((1, 1), (1, -1))$ και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, όταν $A = A_f = A_{C,C}$.

3. Δίνεται ο ενδομορφισμός του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 ,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x e_1 + y e_2 + z e_3 \mapsto y e_1 + z e_2 + x e_3,$$

όπου $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 0)$. Να ορίσετε την f ως προς τη συνήθη βάση του \mathbb{R}^3 , δηλ. να περιγράψετε $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ και να δώσετε τον τύπο $f(a, b, c)$. Εάν η f είναι ισομορφισμός να βρεθεί η f^{-1} .

4.4 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία

Η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων, ως (γραμμική) αλλαγή του συστήματος των συντεταγμένων απασχόλησε τους γεωμέτρους τον 17ο και 18ο αιώνα για το πραγματικό επίπεδο και τον τρισδιάστατο χώρο. Ο Gauss (1777-1855) στο έργο του για τις τετραγωνικές μορφές, δηλ. τις συναρτήσεις της μορφής $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, το 1801 μελέτησε πότε (γραμμικές) αλλαγές του συστήματος των συντεταγμένων δίνουν ισοδύναμες τετραγωνικές μορφές. Αποθήκευσε άτυπα τις πληροφορίες της αλλαγής συντεταγμένων σε έναν πίνακα, αυτόν που σήμερα καλούμε πίνακα της γραμμικής συνάρτησης, και απέδειξε ότι η ορίζουσα του πίνακα πρέπει να είναι ίση με το 1. Εφεξής, η εξέλιξη της ιστορίας των γραμμικών συναρτήσεων παρακολουθεί στενά και παράλληλα την ιστορία της θεωρίας των πινάκων και των διανυσματικών χώρων.

Για περισσότερα ιστορικά στοιχεία παραπέμπουμε στα συγγράμματα [3] και [4].

Βιβλιογραφία

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley and Sons, 1994.
2. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Β. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 2006.
3. V. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
4. I. Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser Boston, 2007.
5. K. Nichololson, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.
6. Th. Shiffirin and M. R.Adams, *Linear Algebra, a Geometric Approach*, W. H. Freeman and Company, 2002.

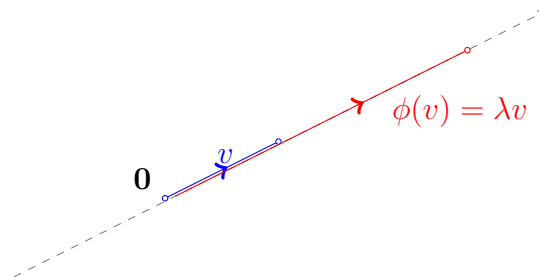
Κεφάλαιο 5

Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα. Ως συνήθως, \mathbb{k} είναι το σώμα \mathbb{R} ή το σώμα \mathbb{C} .

5.1 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Έστω V ένας \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος και $\phi : V \rightarrow V$ μία γραμμική συνάρτηση. Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πως εντοπίζουμε μη μηδενικά διανύσματα v που οι εικόνες τους, $\phi(v)$, είναι διανύσματα παράλληλα προς τα ίδια τα v . Τα διανύσματα αυτά τα ονομάζουμε *ιδιοδιανύσματα* της ϕ . Στο Σχήμα 5.1 με μπλε χρώμα απεικονίζεται ένα ιδιοδιάνυσμα v της ϕ , ενώ με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η εικόνα του.



Σχήμα 5.1: Ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ

Ορισμός 5.1.1. Έστω V ένας \mathbb{k} -διανυσματικός χώρος και $\phi : V \rightarrow V$ μία γραμμική συνάρτηση. Το $\lambda \in \mathbb{k}$ λέγεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) της ϕ , αν υπάρχει $v \in V$, $v \neq 0$, έτσι ώστε

$$\phi(v) = \lambda v. \quad (5.1.1.1)$$

Το v της Σχέσης (5.1.1.1) λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) της ϕ για την ιδιοτιμή λ .

Παραδείγματα 5.1.2.

1. Η ταυτοτική συνάρτηση $\text{id}_V : V \rightarrow V$, $\text{id}_V(v) = v$ έχει το 1 για ιδιοτιμή, ενώ κάθε $v \neq 0 \in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Είναι φανερό ότι η γραμμική συνάρτηση $\text{id}_V : V \rightarrow V$ δεν έχει άλλη ιδιοτιμή.

2. Κάθε μη μηδενικό στοιχείο v του V είναι ιδιοδιάνυσμα για τη μηδενική (τετριμμένη) συνάρτηση $f : V \rightarrow V$ για την ιδιοτιμή 0 αφού $f(v) = \mathbf{0}$. Είναι φανερό ότι η μόνη ιδιοτιμή της μηδενικής συνάρτησης είναι το 0 .

Έχοντας μελετήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο τη στενή σχέση μεταξύ των γραμμικών συναρτήσεων και των πινάκων, δίνουμε στη συνέχεια τους αντίστοιχους ορισμούς για τους τετραγωνικούς πίνακες.

Ορισμός 5.1.3. Αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, τότε $b = [b_1 \ \cdots \ b_n]^T \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του A για την **ιδιοτιμή** (eigenvalue) λ , αν $b \neq \mathbf{0}$ και $A b = \lambda b$, δηλ.

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (5.1.3.1)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.14, κάθε \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος V διάστασης n είναι ισόμορφος με τον \mathbb{K}^n . Για να απλοποιήσουμε, λοιπόν, τους συμβολισμούς μας, θα περιοριστούμε στην περίπτωση που $V = \mathbb{K}^n$. Σημειώνουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1.4. Έστω $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ μία γραμμική συνάρτηση, D μία διατεταγμένη βάση του \mathbb{K}^n . Το $v \in \mathbb{K}^n$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν ο $C_D(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A_{D,D}^\phi$ για την ιδιοτιμή λ . Ειδικότερα, αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{K}^n , τότε το (b_1, \dots, b_n) είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ αν και μόνο αν το $b = [b_1 \ \cdots \ b_n]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A_{B,B}^\phi$.

Απόδειξη. Έστω ότι το v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή λ , δηλ. $\phi(v) = \lambda v$. Τότε $v \neq \mathbf{0}$, άρα $C_D(v) \neq \mathbf{0}$. Είναι φανερό ότι $C_D(\lambda v) = \lambda C_D(v)$. Από την Πρόταση 4.1.4, έχουμε ότι:

$$A_{D,D}^\phi C_D(v) = C_D(\phi(v)) = C_D(\lambda v) = \lambda C_D(v).$$

Άρα το $C_D(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A_{D,D}^\phi$. Το αντίστροφο προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Για το τελευταίο συμπέρασμα της πρότασης σημειώνουμε ότι αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{K}^n και $v = (b_1, \dots, b_n)$, τότε $C_B(v) = [b_1 \ \cdots \ b_n]^T$. \square

Στα επόμενα παραδείγματα θα δούμε πως βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση αυτή και τη γεωμετρική εποπτεία για το πραγματικό επίπεδο και τον πραγματικό τρισδιάστατο χώρο.

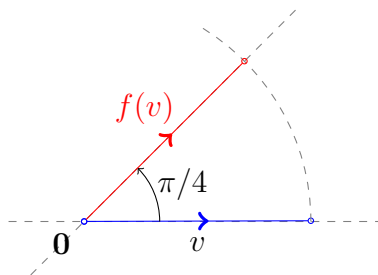
Παραδείγματα 5.1.5.

1. Ο μοναδιαίος πίνακας I_n έχει την ιδιοτιμή 1 με ιδιοδιάνυσμα κάθε $v \neq \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$. Σημειώνουμε ότι ο I_n είναι ο πίνακας της ταυτοτικής συνάρτησης $\text{id}_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\text{id}(v) = v$ ως προς την κανονική βάση.
2. Ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

έχει την ιδιοτιμή 0 με ιδιοδιάνυσμα κάθε $v \neq \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$. Σημειώνουμε ότι ο $\mathbf{0}$ είναι ο πίνακας της μηδενικής συνάρτησης $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $v \mapsto \mathbf{0}$ ως προς οποιαδήποτε βάση.

3. Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που περιστρέφει αριστερόστροφα κατά γωνία $\pi/4$ τα στοιχεία του \mathbb{R}^2 (βλ. Σχήμα 5.2) δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Για το συμπέρασμα αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης: όταν $v \neq 0$ τότε $f(v)$ και v ορίζουν δύο ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\pi/4$. Άρα δεν υπάρχει λ έτσι ώστε $f(v) = \lambda v$.



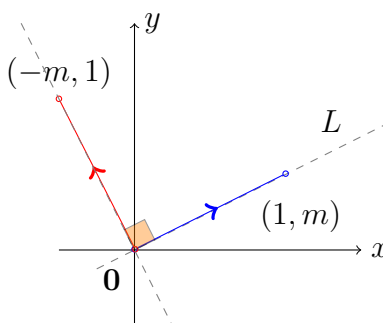
Σχήμα 5.2: Αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία $\pi/4$

Έστω

$$A = A_{BB}^f = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αφού η f δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα, ούτε ο A έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα στον \mathbb{R} .

4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η προβολή στην ευθεία $y = mx$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 5.3: Προβολή στον \mathbb{R}^2 στην ευθεία $y = mx$

Η ευθεία $y = mx$ περνά από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $(1, m)$. Είναι λοιπόν παράλληλη προς το διάνυσμα $(1, m)$ και κάθετη προς το διάνυσμα $(-m, 1)$. Από τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης, συμπεραίνουμε ότι η f έχει δύο ιδιοτιμές: το 1 και το 0. Πράγματι αν $v_1 = (1, m)$ τότε $f(v_1) = v_1$ και άρα το v_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για το 1. Αντίστοιχα αν $v_2 = (-m, 1)$ τότε $f(v_2) = 0$ και το v_2 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0. Γενικότερα, τα πολλαπλάσια του v_1 είναι όλα ιδιοδιανύσματα για την τιμή 1, ενώ τα πολλαπλάσια του v_2 είναι ιδιοδιανύσματα της f για την ιδιοτιμή 0.

Στη συνέχεια θα βρούμε τον τύπο της f . Έστω $D = (v_1, v_2)$. Ο πίνακας $A_{D,D}^f$ είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές να εμφανίζονται ως στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Πράγματι $f(v_1) = v_1$ και $f(v_2) = 0$, επομένως

$$C_D(f(v_1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } C_D(f(v_2)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$A_{D,D}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω τώρα $B = (e_1, e_2)$,

$$S = S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A_{B,B}^f = S A_{D,D}^f S^{-1} = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}.$$

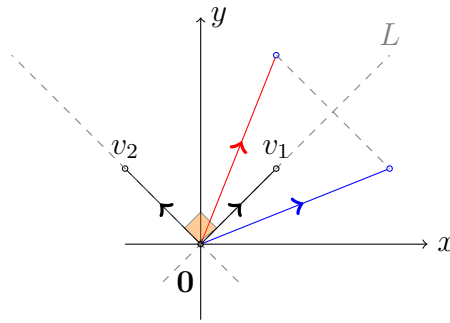
Αφού

$$A_{B,B}^f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} a+mb \\ ma+m^2b \end{bmatrix},$$

έπεται ότι

$$f(a, b) = \frac{1}{1+m^2} (a+mb, ma+m^2b).$$

5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ο αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$

Η f έχει την ιδιοτιμή 1 με ιδιοδιανύσματα τα πολλαπλάσια του $v_1 = (1, m)$, και την ιδιοτιμή -1 με ιδιοδιανύσματα τα πολλαπλάσια του $v_2 = (-m, 1)$. Έτσι ως προς τη βάση $D = (v_1, v_2)$ έχουμε ότι

$$A_{D,D}^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 και $S = S_{B \leftarrow D}$. Τότε

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$A_{B,B}^f = S A_{D,D}^f S^{-1} = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}.$$

Αφού

$$A_{B,b}^f \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} a(1-m^2) + 2bm \\ 2am + b(m^2-1) \end{bmatrix},$$

ο αναλυτικός τύπος της f είναι

$$f(a, b) = \frac{1}{1+m^2} (a(1-m^2) + 2bm, 2am + b(m^2-1)).$$

Αν το λ είναι ιδιοτιμή της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, τότε ο **ιδιοχώρος** (eigenspace) της ϕ , $V_\lambda(\phi)$, είναι το σύνολο

$$V_\lambda(\phi) := \{v \in \mathbb{K}^n : \phi(v) = \lambda v\}.$$

Ο $V_\lambda(\phi)$ είναι, λοιπόν, το σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων της ϕ για την ιδιοτιμή λ , μαζί με το 0 . Αντίστοιχα, αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας,

$$V_\lambda(A) := \{b \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : Ab = \lambda b\}.$$

Αφού σε κάθε $n \times n$ πίνακα αντιστοιχεί μία γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ και αντίστροφα, είναι φανερό ότι ιδιότητες του $V_\lambda(\phi)$ μεταφράζονται σε ιδιότητες του $V_\lambda(A)$ και τανάπαλιν. Παρατηρούμε ότι ο $V_\lambda(\phi)$ είναι διανυσματικός χώρος. Πράγματι:

- αν $v_1, v_2 \in V_\lambda(\phi)$, τότε $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$ και επομένως $v_1 + v_2 \in V_\lambda(\phi)$.
- Επίσης, αν $v \in V_\lambda(\phi)$ και $\kappa \in \mathbb{K}$, τότε $\phi(\kappa v) = \kappa \phi(v) = \kappa(\lambda v) = (\kappa \lambda)v = \lambda(\kappa v) = \lambda \phi(v)$ και επομένως $\kappa v \in V_\lambda(\phi)$.

Τέλος, μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των χώρων $V_\lambda(\phi)$, είναι ότι παραμένουν **αναλλοίωτοι** (invariant) από τη δράση της ϕ , δηλ.

$$\phi(V_\lambda(\phi)) \subset V_\lambda(\phi).$$

Παραδείγματα 5.1.6.

1. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x + y, 4x + 2y).$$

Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 . Τότε

$$A_{B,B}^\phi = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi(1, -2) = (0, 0) = 0(1, -2),$$

δηλ. το 0 είναι ιδιοτιμή και $v_1 = (1, -2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για την ιδιοτιμή 0 όπως βέβαια και κάθε άλλο (μη μηδενικό) στοιχείο του $\text{Ker } \phi$. Επίσης,

$$\phi(1, 2) = (4, 8) = 4(1, 2),$$

δηλ. το 4 είναι ιδιοτιμή του ϕ και $v_2 = (1, 2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 4 . Τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον \mathbb{R}^2 . Άρα $D = (v_1, v_2)$ είναι βάση του \mathbb{R}^2 . Επομένως

$$A_{D,D}^\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

και

$$A_{D,D}^\phi = S^{-1} A_{B,B}^\phi S \text{ όπου } S = S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει ότι $V_0(\phi) = S(\{v_1\})$ και ότι $V_4(\phi) = S(\{v_2\})$.

2. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x, 3y).$$

Έστω $B = (e_1, e_2)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 . Παρατηρούμε ότι

$$A = A_{B,B}^\phi = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιος πίνακας.: $\phi(e_1) = 2e_1$ και $\phi(e_2) = 3e_2$. Επομένως, e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 2, ενώ το e_2 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 3. Ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει ότι

$$V_2(\phi) = S(\{e_1\}) \text{ και } V_3(\phi) = S(\{e_2\}).$$

3. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi(x, y, z) = (3x, 3y, z)$ και $B = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Παρατηρούμε ότι

$$A_{B,B}^\phi = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο $A_{B,B}^\phi$ είναι διαγώνιος και τα e_1, e_2 είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 3, ενώ το e_3 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει ότι

$$V_3(\phi) = S(\{e_1, e_2\}), \quad V_1(\phi) = S(\{e_3\}).$$

4. Θα γενικεύσουμε τις παρατηρήσεις μας για τους διαγώνιους πίνακες και τις ιδιοτιμές τους. Έστω ότι $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση με την ιδιότητα ότι υπάρχει $D = (v_1, \dots, v_n)$ διατεταγμένη βάση του \mathbb{K}^n έτσι ώστε το v_i να είναι ιδιοδιάνυσμα της f , για $i = 1, \dots, n$. Έστω ότι λ_i είναι η ιδιοτιμή της f που αντιστοιχεί στο v_i , για $i = 1, \dots, n$. Αφού $f(v_i) = \lambda_i v_i$, ο πίνακας των συντεταγμένων του $f(v_i)$ ως προς τη βάση D έχει την εξής μορφή:

$$C_D(f(v_i)) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

\uparrow
i-θέση

και επομένως ο $A_{D,D}^f$ είναι διαγώνιος πίνακας,

$$A_{D,D}^f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Αντίστροφα, αν $D = (v_1, \dots, v_n)$ είναι βάση του \mathbb{K}^n , $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ και

$$A_{D,D}^f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

τότε $f(v_i) = \lambda_i v_i$, για $i = 1, \dots, n$. Επομένως το v_i είναι ιδιοδιάνυσμα της f για την ιδιοτιμή λ_i , για $i = 1, \dots, n$.

5. Έστω $\phi : V \rightarrow V$ μία γραμμική συνάρτηση του V και έστω ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του ϕ . Υπάρχει λοιπόν $\mathbf{0} \neq v \in V$ έτσι ώστε $\phi(v) = 0$ $v = \mathbf{0}$. Επομένως $v \in \text{Ker } \phi$ και $\text{Ker } \phi \neq \{\mathbf{0}\}$. Αντίστροφα, αν $v \in \text{Ker } \phi$ και $v \neq \mathbf{0}$, τότε $\phi(v) = \mathbf{0}$ και το v είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 . Καταλήγουμε έτσι στο εξής συμπέρασμα:

Το 0 είναι ιδιοτιμή της γραμμικής συνάρτησης $\phi : V \rightarrow V$ αν και μόνο αν η ϕ δεν είναι ένα προς ένα. Ισοδύναμα, το 0 είναι ιδιοτιμή του τετραγωνικού πίνακα A αν και μόνο αν $\det A = 0$.

6. Έστω ότι $\phi : V \rightarrow V$ είναι ισομορφισμός. Αν το λ είναι ιδιοτιμή της ϕ και v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ για το λ , τότε (όπως θα δούμε) το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της ϕ^{-1} και το v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ^{-1} για το λ^{-1} . Πράγματι, έστω ότι το v είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Αφού η γραμμική συνάρτηση $\phi : V \rightarrow V$ είναι ισομορφισμός, έπεται ότι $\lambda \neq 0$. Επομένως

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}((\lambda^{-1}\lambda)v) = \lambda^{-1}\phi^{-1}(\phi(v)) = \lambda^{-1}\text{id}_V(v) = \lambda^{-1}v.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι:

Αν ο $\phi : V \rightarrow V$ είναι ισομορφισμός και το λ είναι ιδιοτιμή της ϕ με ιδιοδιάνυσμα v , τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του $\phi^{-1} : V \rightarrow V$ με ιδιοδιάνυσμα το v .

7. Δίνεται η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $\phi(x, y) = (y, -2x + 3y)$. Ο πίνακας A της ϕ ως προς την κανονική βάση B του \mathbb{R}^2 είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι το 2 είναι ιδιοτιμή του A και της ϕ και ότι κάθε μη μηδενικό διάνυσμα επί της ευθείας $\{t(1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 2 . Η $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, δίνεται από τον τύπο $\phi^{-1}(x, y) = \frac{1}{2}(3x - y, 2x)$.

Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι το $\frac{1}{2}$ είναι ιδιοτιμή της ϕ^{-1} .

8. Έστω ο 2×2 μιγαδικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}.$$

Το e_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή i και το $(1, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $1+i$.

9. Έστω ο 2×2 μιγαδικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι ± 1 είναι ιδιοτιμές του A .

10. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και λ ιδιοτιμή του A . Τότε το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του \bar{A} . Πράγματι, έστω ότι b είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ . Τότε $A b = \lambda b$ και συνεπώς

$$\overline{A b} = \overline{\lambda b} \Rightarrow \bar{A} \bar{b} = \bar{\lambda} \bar{b},$$

δηλ. το \bar{b} είναι ιδιοδιάνυσμα του \bar{A} για την ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

11. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ένας πίνακας, τέτοιος ώστε $A = \bar{A}^T$. Ο A λέγεται **αυτοπροσαρτημένος** (self-adjoint). Θα αποδείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη. Έστω ότι το b είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Για να δείξουμε ότι το λ είναι πραγματικός αριθμός, θα αποδείξουμε ότι $\lambda = \bar{\lambda}$. Υπολογίζουμε το γινόμενο $(Ab)^T \bar{b}$:

$$(Ab)^T \bar{b} = (\lambda b)^T \bar{b} = \lambda (b^T \bar{b}). \quad (5.1.6.1)$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του \bar{A} και ότι \bar{b} είναι ιδιοδιάνυσμα για το $\bar{\lambda}$. Από την υπόθεση, $\bar{A}^T = A$. Συνεπώς $\bar{A} = A^T$. Θα υπολογίσουμε τώρα το γινόμενο $(Ab)^T \bar{b}$, χρησιμοποιώντας αυτές τις παρατηρήσεις.

$$(Ab)^T \bar{b} = (b^T A^T) \bar{b} = b^T (\bar{A} \bar{b}) = b^T (\bar{\lambda} \bar{b}) = \bar{\lambda} (b^T \bar{b}). \quad (5.1.6.2)$$

Από τις Εκφράσεις (5.1.6.1) και (5.1.6.2) προκύπτει ότι

$$\lambda (b^T \bar{b}) = \bar{\lambda} (b^T \bar{b}) \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) (b^T \bar{b}) = 0.$$

Όμως, $b^T \bar{b} \neq 0$ (βλ. Παράδειγμα 2.1.10.2) και άρα $\lambda = \bar{\lambda}$. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. \square

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Αν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ είναι αυτοπροσαρτημένος πίνακας τότε οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

12. Ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$$

δεν είναι αυτοπροσαρτημένος, (προσοχή: $A = A^T$, όμως $A \notin \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Οι ιδιοτιμές του A είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $i, 2i$.

Στη συνέχεια γενικεύουμε το συμπέρασμα του Παραδείγματος 5.1.5.5.

Πρόταση 5.1.7. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Αντίστοιχα, αν $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ είναι μία γραμμική συνάρτηση και A είναι ο πίνακας της ϕ ως προς οποιαδήποτε διατεταγμένη βάση του \mathbb{k}^n , τότε το λ είναι ιδιοτιμή της ϕ αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A , τότε τα ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ , είναι οι μη μηδενικές λύσεις του $A - \lambda I_n = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι b είναι ιδιοδιάνυσμα για τον A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Τονίζουμε ότι $b \neq \mathbf{0}$. Ισχύει ότι

$$Ab = \lambda b \Leftrightarrow Ab - \lambda b = \mathbf{0} \Leftrightarrow Ab - \lambda I_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)b = \mathbf{0}.$$

Συνεπώς το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)X = \mathbf{0}$ έχει τη μη μηδενική λύση, b . Αυτό μπορεί να γίνει μόνο όταν $A - \lambda I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος και $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι όλες οι συνεπαγωγές στον συλλογισμό μας αντιστρέφονται. \square

Παραδείγματα 5.1.8.

1. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα στον \mathbb{R} . Πράγματι,

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

δεν έχει ρίζες στον \mathbb{R} , αφού η διακρίνουσα του $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ είναι αρνητικός αριθμός. Το πολυώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ έχει όμως δύο μιγαδικές ρίζες, τις $1 \pm i$. Επομένως, $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ έχει δύο ιδιοτιμές στον \mathbb{C} . Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι $(i, 1) \in \mathbb{C}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $1 + i$, ενώ $(-i, 1) \in \mathbb{C}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $1 - i$.

2. Έστω ότι A, B είναι δύο όμοιοι $n \times n$ πίνακες και ότι $B = P^{-1}AP$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα P . Αν b είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ , τότε $P^{-1}b$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B για την ιδιοτιμή λ .

Απόδειξη. Αφού b είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ , $Ab = \lambda b$. Επομένως:

$$\begin{aligned} B(P^{-1}b) &= (P^{-1}AP)(P^{-1}b) = (P^{-1}A)(P P^{-1}b) = (P^{-1}A)(I_n b) \\ &= P^{-1}(A b) = P^{-1}(\lambda b) = \lambda(P^{-1}b). \end{aligned}$$

\square

Σημειώνουμε το συμπέρασμα που προκύπτει από τα προηγούμενα.

Όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.7,

$$V_\lambda(\phi) = \text{null}(A - \lambda I_n)$$

και μάλιστα, αφού ο $V_\lambda(\phi)$ περιέχει ένα τουλάχιστον μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα, ισχύει ότι

$$\dim_{\mathbb{k}} V_\lambda(\phi) \geq 1.$$

Ασκήσεις Ενότητας 5.1

1. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που περιστρέφει τα διανύσματα αριστερόστροφα κατά γωνία π . Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της ϕ .
2. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που αντικατοπτρίζει τα διανύσματα ως προς το επίπεδο $y = 0$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της ϕ .
3. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των εξής γραμμικών συναρτήσεων

$$(\alpha) \phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 4y, 2x + 3y).$$

$$(\beta) \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a, b, c) \mapsto (b, c, a).$$

$$(\gamma) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

4. Να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των εξής πινάκων:

$$(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\beta) \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, λ μία ιδιοτιμή του A και X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Να αποδείξετε ότι το $\lambda + k$ είναι μία ιδιοτιμή του $A + kI_n$ και ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα του $A + kI_n$. Επίσης να αποδείξετε ότι το λ^m είναι μία ιδιοτιμή του A^m και ότι X είναι ιδιοδιάνυσμα του A^m που αντιστοιχεί στο λ^m .
6. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και λ είναι μία ιδιοτιμή του $3A$. Να αποδείξετε ότι το $\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $3A^2 - A + 2I_n$.

5.2 Ιδιοχώροι και το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

Έστω $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ μία γραμμική συνάρτηση. Για να βρούμε τις ιδιοτιμές της ϕ , βασίζομαστε στις Προτάσεις 5.1.4 και 5.1.7 και προχωράμε ως εξής:

- βρίσκουμε τον πίνακα A της ϕ , ως προς την κανονική (ή οποιαδήποτε άλλη διατεταγμένη βάση) του \mathbb{k}^n ,
- υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - xI_n$,
- βρίσκουμε τις τιμές των λ που μηδενίζουν την ορίζουσα $\det(A - xI_n)$.

Για να βρούμε τα τα ιδιοδιανύσματα της ϕ όταν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές, μπορούμε να λύσουμε τα συστήματα $AX = \lambda X$ για κάθε ιδιοτιμή του A . Υπάρχει μήπως κάποιος αποτελεσματικότερος τρόπος; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, θα ορίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A . Σημειώνουμε ότι ο πίνακας $A - xI_n$ είναι ο $n \times n$ πίνακας

$$A - xI_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - x \end{bmatrix} .$$

Επομένως $\det(A - xI_n)$ είναι ένα πολυώνυμο στον $\mathbb{k}[x]$, βαθμού n . Το πολυώνυμο αυτό συμβολίζεται με $P_A(x)$ και λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (characteristic polynomial) του A , δηλ.

$$P_A(x) := \det(A - xI_n).$$

Γράφουμε $P_\phi(x)$ για το $P_A(x)$ όταν θέλουμε να δώσουμε την έμφαση στην ϕ . Οι ιδιοτιμές του A μηδενίζουν το $P_A(x)$ και είναι οι ρίζες του $P_A(x)$. Παρατηρούμε ότι το $P_A(x)$ έχει την εξής μορφή:

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 .$$

Ο σταθερός όρος του $P_A(x)$, α_0 , είναι ίσος με την ορίζουσα του A . Πράγματι,

$$P_A(0) = \alpha_0 = \det(A - 0I_n) = \det A .$$

Ενδιαφέρον επίσης έχει ο συντελεστής α_{n-1} του $P_A(x)$. Από τον υπολογισμό της ορίζουσας του $A - xI_n$ προκύπτει ότι ο α_{n-1} είναι με προσέγγιση προσήμου το ίχνος του A :

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}) = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) .$$

Παραδείγματα 5.2.1.

1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix} .$$

Τότε

$$A - xI_2 = \begin{bmatrix} 1 - x & 2 \\ 0 & i - x \end{bmatrix} \Rightarrow P_A(x) = (1 - x)(i - x) = x^2 - (1 + i)x + i .$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι 1 και i . Έστω $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\phi(a, b) = (a, 2a + ib)$. Αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{C}^2 , τότε $A = A_{B,B}^\phi$. Επομένως

$$P_\phi(x) = x^2 - (1 + i)x + i .$$

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Τότε

$$A - xI_3 = \begin{bmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 2-x & 3 \\ 0 & 2 & 3-x \end{bmatrix}$$

και $\det(A - xI_3) =$

$$(1-x)((2-x)(3-x) - 6) = -x(x-1)(x-5) = -x^3 + 6x^2 - 6x.$$

3. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε

$$\det(A - xI_n) = \det(A - xI_n)^T = \det(A^T - xI_n).$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

Οι πίνακες A και A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

4. Είδαμε ότι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P_A(x)$ είναι ίσος με την ορίζουσα του A . Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.7, το 0 είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det A = 0$. Επομένως

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι διάφορος του μηδενός.

Πόσες ιδιοτιμές έχει μία γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$; Αντίστοιχα πόσες ιδιοτιμές έχει ένας $n \times n$ πίνακας A ; Σύμφωνα με τα όσα έχουμε εξετάσει προηγουμένως ο αριθμός των ιδιοτιμών του ϕ και αντίστοιχα του A είναι ακριβώς ο ο αριθμός των ριζών του $P_\phi(x)$ και αντίστοιχα του $P_A(x)$). Πόσες λοιπόν ρίζες έχει ένα πολυώνυμο βαθμού n ; Η απάντηση εξαρτάται από το σώμα επάνω από το οποίο δουλεύουμε και δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2.2. *Αν $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ είναι μία γραμμική συνάρτηση, τότε η ϕ έχει ακριβώς n μιγαδικές ιδιοτιμές. Αν $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μία γραμμική συνάρτηση, τότε η ϕ έχει το πολύ n πραγματικές ιδιοτιμές. Αντίστοιχα αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ τότε ο A έχει ακριβώς n μιγαδικές ιδιοτιμές. Αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ τότε ο A έχει το πολύ n πραγματικές ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη, πρέπει να αναφερθούμε στο *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ βαθμού n με συντελεστές από το \mathbb{C} έχει ακριβώς n ρίζες στο \mathbb{C} , μετρημένες σύμφωνα με την πολλαπλότητα τους. Βεβαίως, αν $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. Επομένως το $p(x)$ έχει ακριβώς $\deg p(x)$ μιγαδικές ρίζες και κάποιες από αυτές μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί, ίσως όμως όχι όλες. Συνεπώς αν $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $p(x)$ έχει το πολύ $\deg p(x)$ πραγματικές ρίζες. Αφού $P_A(x)$ έχει βαθμό n , το συμπέρασμα της πρότασης και για τις δύο περιπτώσεις προκύπτει από τις προηγούμενες παρατηρήσεις. \square

Στα επόμενα παραδείγματα θα κάνουμε χρήση αυτής της πληροφορίας.

Παράδειγματα 5.2.3.

1. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Αφού λοιπόν ο αρχικός συντελεστής του $P_A(x)$ είναι το $(-1)^n$, έπεται ότι

$$P_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n).$$

Αναπτύσσοντας αυτό το γινόμενο, προκύπτει ότι ο συντελεστής του όρου x^{n-1} είναι ίσος με το

$$(-1)^{n-1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n),$$

ενώ ο σταθερός όρος του $P_A(x)$, ο $P_A(0)$, είναι ίσος με το γινόμενο

$$(-1)^n(0 - \lambda_1) \cdots (0 - \lambda_n) = (-1)^n(-1)^n(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Προηγουμένως είδαμε ότι ο συντελεστής του όρου x^{n-1} είναι $(-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$ και ότι ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι ίσος με την ορίζουσα του A . Επομένως αποδείξαμε την επόμενη σχέση μεταξύ της ορίζουσας του A και της ιδιοτιμής του A .

Αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τότε
 $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ και $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 - a & 3b & c \\ c & a & i \\ i & c + i & -1 \end{bmatrix}$$

μαζί με την πληροφορία ότι $\det A = 2$ και ότι μία ιδιοτιμή του A είναι ίση με 2. Από την Πρόταση 5.2.2 γνωρίζουμε ότι ο A έχει τρεις συνολικά μιγαδικές ιδιοτιμές. Θα υπολογίσουμε τις άλλες δύο.

Έστω ότι λ_1, λ_2 είναι οι άλλες δύο ιδιοτιμές του A . Τότε

$$2 = \det A = 2\lambda_1\lambda_2, \quad 2 = \text{Tr} A = 2 + \lambda_1 + \lambda_2.$$

Επομένως

$$\lambda_1 = -\lambda_2, \quad \text{και} \quad \lambda_1^2 = -1$$

και οι άλλες δύο ιδιοτιμές του A είναι $\pm i$.

Όπως έχουμε δει, όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, βλ. Παράδειγμα 5.1.8.2. Ισχύει όμως κάτι πιο ισχυρό, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2.4. Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Απόδειξη. Έστω ότι $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ είναι δύο όμοιοι πίνακες. Θα αποδείξουμε ότι $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$. Αφού A, B είναι όμοιοι, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε

$$B = S^{-1}A S.$$

Θα δείξουμε ότι $\det(B - xI_n) = \det(A - xI_n)$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \det(B - xI_n) &= \det(S^{-1}A S - xS^{-1}S) = \det(S^{-1}A S - S^{-1}xI_n S) = \\ &= \det(S^{-1}(A - xI_n)S) = \det(S^{-1}) \det(A - xI_n) \det(S) = \det(A - xI_n). \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι όμοιοι πίνακες A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. □

Έστω $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ μία γραμμική συνάρτηση. Οι πίνακες της ϕ ως προς διαφορετικές βάσεις του \mathbb{k}^n είναι όμοιοι, (Πόρισμα 4.3.4). Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε βάση του \mathbb{k}^n και θα βρούμε ακριβώς το ίδιο πολυώνυμο $P_\phi(x)$. Ο επόμενος αλγόριθμος συγκεντρώνει τα βήματα για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της ϕ .

Αλγόριθμος 5.2.1 Αλγόριθμος υπολογισμού ιδιοχώρων της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$

Είσοδος: Η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$.

Έξοδος: Μία βάση για τους ιδιοχώρους της ϕ .

Βήμα 1 Έστω

$$A = [\phi(e_1) \ \cdots \ \phi(e_n)].$$

Βήμα 2 Βρίσκουμε το πολυώνυμο $P_A(x) = P_\phi(x)$ υπολογίζοντας την οριζουσα

$$\det(A - xI_n).$$

Βήμα 3 Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A στον \mathbb{k} , λύνοντας την εξίσωση

$$P_A(x) = 0.$$

Βήμα 4 Για κάθε λ που είναι ιδιοτιμή του A , βρίσκουμε μία βάση για το μηδενοχώρο του $A - \lambda I_n$:

$$V_\lambda(\phi) = \text{null}(A - \lambda I_n).$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα δούμε τον αλγόριθμο στη πράξη.

Παράδειγματα 5.2.5.

1. Έστω $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\phi(a, b) = (a + 2b, ib)$. Υπολογίζουμε τις εικόνες $\phi(e_1)$ και $\phi(e_2)$. Αφού $\phi(e_1) = (1, i)$ και $\phi(e_2) = (2, i)$, αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{C}^2 και $A = A_{B,B}^\phi$, τότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.2.1.1,

$$P_A(x) = (1 - x)(i - x)$$

και A έχει τις ιδιοτιμές 1 και i . Έτσι

$$V_1(A) = \text{null}(A - I_2) = \text{null} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & i - 1 \end{bmatrix} = \text{null} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \{t(1, 0) : t \in \mathbb{C}\}$$

ενώ

$$\begin{aligned} V_i(A) &= \text{null}(A - iI_2) = \text{null} \begin{bmatrix} 1 - i & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{null} \begin{bmatrix} 1 & 1 + i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \{t(-1 - i, 1) : t \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1-i, 1)$, τότε $D = (v_1, v_2)$ είναι διατεταγμένη βάση του \mathbb{C}^2 από ιδιοδιανύσματα της ϕ και άρα

$$A_{D,D}^\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Αφού ο πίνακας $A_{D,D}^\phi$ είναι διαγώνιος, η γραμμική συνάρτηση ϕ είναι διαγωνιοποιήσιμη.

2. Θα προσδιορίσουμε τους ιδιοχώρους της γραμμικής συνάρτησης

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y).$$

Ο πίνακας του ϕ ως προς τη συνήθη βάση του \mathbb{R}^2 είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αφού $A = A^T$, ο A έχει ακριβώς δύο πραγματικές ιδιοτιμές, βλ. Παράδειγμα 5.1.5.11. Πράγματι, υπολογίζουμε και παραγοντοποιούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ϕ :

$$P_\phi(x) = \det \begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{bmatrix} = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι το 1 και το 3. Φέρνουμε τον πίνακα $A - 1I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο ιδιοχώρος του ϕ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, είναι ο

$$V_1(\phi) = \{ (-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{k} \} = S(\{(-1, 1)\}) = S(\{v\}),$$

όπου $v = (-1, 1)$.

Για τον χώρο $V_3(\phi)$, φέρνουμε τον πίνακα $A - 3I_2$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

άρα

$$V_3(\phi) = \{ (x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{k} \} = S(\{(1, 1)\}) = S(\{u\}),$$

όπου $u = (1, 1)$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\{v, u\}$ είναι βάση για τον \mathbb{R}^2 και ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και όμοιος με τον

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -x + x^2 - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Για να βρούμε τον ιδιοχώρο V_{λ_1} λύνουμε το σύστημα $(A - \lambda_1 I_2)X = \mathbf{0}$. Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $A - \lambda_1 I_2$ είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1}(A) &= \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2, x_2 \right) : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = S\left(\left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\}\right) \\ &= S\left(\left\{ (1+\sqrt{5}, 2) \right\}\right). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα

$$V_{\lambda_2}(A) = S\left(\left\{ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\}\right) = S\left(\left\{ (1-\sqrt{5}, 2) \right\}\right).$$

Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

4. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Το πολυώνυμο $P_A(x)$ δεν έχει ρίζες στον \mathbb{R} και ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος στον \mathbb{R} . Τα $\pm i \in \mathbb{C}$ είναι ρίζες του $P_A(x)$ στον \mathbb{C} και άρα ο A έχει ιδιοτιμές τους μιγαδικούς αριθμούς $\pm i$ και είναι διαγωνιοποιήσιμος στον \mathbb{C} . Οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι

$$V_i(A) = \{ (ix_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{C} \} = S(\{(i, 1)\}),$$

και

$$V_{-i}(A) = \{ (ix_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{C} \} = S(\{(-i, 1)\}).$$

5. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(a, b, c) = (a + 2c, 2b + 3c, 2b + 3c)$, B η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και $A = A_{B,B}^\phi$. Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

και όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.2.1.2, $P_A(x) = -x(x-1)(x-5)$. Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι 0, 1, 5.

$$V_0(A) = \text{null}(A - 0 I_3) = \text{null } A = \text{null} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{null} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$V_0(A) = \left\{ t \left(-2, -\frac{3}{2}, 1 \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Επίσης

$$V_1(A) = \text{null}(A - 1 I_3) = \text{null} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{null} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$V_1(A) = \left\{ t(1, 0, 0) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Τέλος

$$V_5(A) = \text{null}(A - 5 I_3) = \text{null} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{null} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$V_5(A) = \left\{ t \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν

$$v_1 = \left(-2, -\frac{3}{2}, 1 \right), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right)$$

τότε $D = (v_1, v_2, v_3)$ είναι διατεταγμένη βάση του \mathbb{R}^3 από ιδιοδιανύσματα της ϕ και

$$A_{D,D}^\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Αφού ο πίνακας $A_{D,D}^\phi$ είναι διαγώνιος, η ϕ είναι διαγωνιοποιήσιμη.

6. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ του A είναι το

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ -2 & 1-x & 0 \\ -2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)[(4-x)(1-x) + 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A(x) = (1-x)(x-2)(x-3).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Αφού ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος. Πράγματι, οι ιδιοχώροι του A είναι οι

$$\begin{aligned} V_1 &= \{ (0, \kappa, 0) : \kappa \in \mathbb{R} \} = S(\{(0, 1, 0)\}), \\ V_2 &= \{ (-\frac{1}{2}\kappa, \kappa, \kappa) : \kappa \in \mathbb{R} \} = S(\{(-\frac{1}{2}, 1, 1)\}), \\ V_3 &= \{ (-\kappa, \kappa, \kappa) : \kappa \in \mathbb{R} \} = S(\{(-1, 1, 1)\}). \end{aligned}$$

Τα ιδιοδιανύσματα

$$\varepsilon_1 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_2 = (-\frac{1}{2}, 1, 1), \quad \varepsilon_3 = (-1, 1, 1)$$

αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 . Έστω $D = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Ο A είναι όμοιος με τον πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

και

$$E = S^{-1} A S$$

όπου

$$S = S_{B \leftarrow D} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω λ ιδιοτιμή του $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Τότε $P_A(\lambda) = 0$ και $P_A(x) = (x-\lambda)q_1(x)$ για κάποιο $q_1(x) \in \mathbb{k}[x]$. Αν $q_1(\lambda) = 0$, τότε $q_1(x) = (x-\lambda)q_2(x)$ για κάποιο $q_2(x) \in \mathbb{k}[x]$ και $P_A(x) = (x-\lambda)^2 q_2(x)$. Συνεχίζοντας καταυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $m_\lambda \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$P_A(x) = (x-\lambda)^{m_\lambda} q(x), \quad \text{όπου } q(x) \in \mathbb{k}[x], \quad \text{και } q(\lambda) \neq 0.$$

Σημειώνουμε ότι $1 \leq m_\lambda \leq n$. Ο φυσικός αυτός αριθμός m_λ λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** (algebraic multiplicity) της ιδιοτιμής λ . Αν λοιπόν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A στο \mathbb{k} , τότε υπάρχει $h(x) \in \mathbb{k}[x]$ τέτοιο ώστε

$$\deg P_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdots (x-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}} h(x)$$

και άρα

$$m_{\lambda_1} + \cdots + m_{\lambda_k} \leq n.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αφού $V_\lambda(A) \neq \{0\}$, έπεται ότι

$$n_\lambda := \dim_{\mathbb{k}} V_\lambda(A) \geq 1.$$

Ο φυσικός αριθμός n_λ λέγεται η **γεωμετρική πολλαπλότητα** (geometric multiplicity) της λ . Με χρήση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής αποδεικνύεται ότι

Θεώρημα 5.2.6. Αν το λ είναι ιδιοτιμή του A , τότε $m_\lambda \geq n_\lambda \geq 1$, δηλ.

η αλγεβρική πολλαπλότητα του $\lambda \geq$ τη γεωμετρική πολλαπλότητα του λ .

Για την απόδειξη της παραπάνω ανισότητας παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [2, Πρόταση 5.2.5].

Παράδειγμα 5.2.7. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Τότε $P_A(x) = (x - 2)^3(x - 3)^2$ και επομένως η αλγεβρική πολλαπλότητα του 4 είναι το 3 ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητα του 5 είναι το 2. Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα του 4 είναι ίση με το 2 ενώ η γεωμετρική πολλαπλότητα του 5 είναι το 2.

Ασκήσεις Ενότητας 5.2

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & 1 - a & 2i \\ i & c + 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν $\det A = 8$ και μία ιδιοτιμή του A είναι το 2 να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές.

2. Να βρείτε τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

3. Να αποδείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος και την ίδια ορίζουσα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.2.4.

4. Να βρείτε τις αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3 Διαγωνιοποιήσιμοι Πίνακες

Θυμίζουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα. Σε αυτήν την ενότητα θα εξερευνήσουμε πότε μία γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ είναι διαγωνιοποιήσιμη. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.1.6.3, η ϕ είναι διαγωνιοποιήσιμη αν και μόνο αν ο \mathbb{k}^n έχει μία διατεταγμένη βάση D από ιδιοδιανύσματα της ϕ . Τονίζουμε ότι αν το ιδιοδιάνυσμα v_i κατέχει την i θέση στο διατεταγμένο σύνολο D , τότε το λ_i εμφανίζεται στην i γραμμή και στήλη του διαγώνιου πίνακα $A_{D,D}^\phi$.

Παραδείγματα 5.3.1.

1. Έστω ότι $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\phi(a, b) = (a + 2b, ib)$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.2.5.1, η ϕ είναι διαγωνιοποιήσιμη με ιδιοτιμές 1 και i και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1 και v_2 . Έστω τώρα $D_1 = (v_1, v_2)$ και $D_2 = (v_2, v_1)$. Τότε

$$A_{D_1, D_1}^\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \text{ ενώ } A_{D_2, D_2}^\phi = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, μία διαγωνιοποιήσιμη γραμμική συνάρτηση με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2, v_3 . Αν $D_1 = (v_1, v_2, v_3)$ και $D_2 = (v_3, v_1, v_2)$, τότε

$$A_{D_1, D_1}^\phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \text{ ενώ } A_{D_2, D_2}^\phi = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ μη μηδενικών διανυσμάτων από διαφορετικούς ιδιοχώρους.

Πρόταση 5.3.2. Έστω $\phi : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ μία γραμμική συνάρτηση. Αν τα $w_1, w_2, \dots, w_\kappa$ είναι ιδιοδιανύσματα του V που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$, τότε τα $w_1, w_2, \dots, w_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Θα δώσουμε τη βασική ιδέα της απόδειξης, αποδεικνύοντας αναλυτικά την περίπτωση δύο ιδιοδιανυσμάτων δύο διαφορετικών ιδιοτιμών και σημειώνοντας ότι η γενική περίπτωση γίνεται ανάλογα. Έστω ότι

$$\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = \mathbf{0}, \quad (5.3.2.1)$$

όπου $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{k}$. Θα αποδείξουμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \phi(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) &= \phi(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0}) \Rightarrow \mu_1 \phi(w_1) + \mu_2 \phi(w_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\mu_1 \lambda_1 w_1 + \mu_2 \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.3.2.2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη Σχέση (5.3.2.1) με λ_2 και την αφαιρούμε από τη Σχέση (5.3.2.2). Έτσι

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_2)w_1 = \mathbf{0}.$$

Όμως w_1 είναι ιδιοδιάνυσμα και άρα $w_1 \neq \mathbf{0}$. Έπεται ότι $\mu_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Άρα $\mu_1 = 0$ αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Αντικαθιστούμε στη Σχέση (5.3.2.1) και με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι $\mu_2 = 0$. \square

Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.3. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{k}$ οι διακεκεριμένες ιδιοτιμές του A στο σώμα \mathbb{k} . Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν

$$\dim_{\mathbb{k}} V_{\lambda_1}(A) + \dots + \dim_{\mathbb{k}} V_{\lambda_k}(A) = n .$$

Σημειώνουμε δύο ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 5.3.3.

Πόρισμα 5.3.4. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

- i) Αν ο A έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.
- ii) Αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε η γεωμετρική πολυπλοπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A είναι ίση με την αλγεβρική πολυπλοπότητα της ιδιοτιμής.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.2.6 προκύπτει ότι

$$k \leq n_{\lambda_1} + \dots + m_{\lambda_k} = m_{\lambda_1} + \dots + m_{\lambda_k} \leq n .$$

Επομένως αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε

$$m_{\lambda_1} = n_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_k} = n_{\lambda_k} ,$$

ενώ αν $n = k$, τότε $n_{\lambda_i} = m_{\lambda_i} = 1$, για $i = 1, \dots, n$ και ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. □

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω.

Παραδείγματα 5.3.5.

1. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 , \quad (x, y, z) \mapsto 4(x, y, z)$$

του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 . Ο πίνακας της ϕ ως προς τη συνήθη βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} ,$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $P_A(x) = (4 - x)^3$. Έτσι η μόνη ιδιοτιμή της ϕ είναι το 4 και αφού $A - 4I_3 = \mathbf{0}$ έπεται ότι $V_4(\phi) = \text{null}(A - 4I_3) = \mathbb{R}^3$.

2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Τότε $P_A(x) = (4 - x)^3$ και η μόνη ιδιοτιμή του A είναι το 4. Επίσης

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και $V_4(A) = \{(s, t, 0) : s, t \in \mathbb{R}\} = S(\{e_1, e_2\})$. Ο πίνακας A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος γιατί δεν υπάρχει βάση του \mathbb{R}^3 που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A .

3. Θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της γραμμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(a, b, c) = (3a + 2b + 2c, a + 4b + 2c, -a - 2b)$. Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και έστω

$$A = A_{B,B}^f = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ είναι το

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 2 \\ -1 & -2 & -x \end{vmatrix} = 12 - 16x + 7x^2 - x^3 = (2-x)^2(3-x),$$

και οι ιδιοτιμές του A είναι το 2 και το 3. Φέρνουμε τον πίνακα $A - 2I_3$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

επομένως το σύνολο των λύσεων του συστήματος $(A - 2I_3)X = \mathbf{0}$ είναι το

$$V_2(A) = \{ (-2x_2 - 2x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \\ \{ t(-2, 1, 0) + s(-2, 0, 1) : t, s \in \mathbb{R} \}.$$

Όμοια φέρνουμε τον πίνακα $A - 3I_3$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 είναι ο

$$V_3(A) = S(\{(-1, -1, 1)\}).$$

Αφού

$$\dim(V_2(A)) + \dim(V_3(A)) = 3$$

έπεται ότι

$$V_2(A) + V_3(A) = \mathbb{R}^3$$

και ότι η f είναι διαγωνιοποιήσιμη. Θεωρούμε τα ιδιοδιανύσματα $v_1 = (-2, 1, 0), v_2 = (-2, 0, 1)$ (για την ιδιοτιμή 2) και $v_3 = (-1, -1, 1)$ (για την ιδιοτιμή 3) και τις διατεταγμένες βάσεις $D = (v_1, v_2, v_3), E = (v_2, v_3, v_1)$ του \mathbb{R}^3 . Τότε

$$A_{D,D}^f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ενώ } A_{E,E}^f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι τρεις πίνακες $A_{B,B}^f, A_{D,D}^f, A_{E,E}^f$ είναι όμοιοι ανά ζεύγη. Ο αναγνώστης καλείται να βρει τους πίνακες μετάβασης.

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Τότε $P_A(x) = (2 - x)^2(x^2 + 1)$. Παρατηρούμε ότι η μοναδική ιδιοτιμή του A στον \mathbb{R} είναι το 2 , ενώ στον \mathbb{C} οι ιδιοτιμές του A είναι το 2 και το $\pm i$. Επομένως ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος στον \mathbb{R} . Εθετάζουμε στη συνέχεια αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος στον \mathbb{C} .

Για να βρούμε μία βάση για τον ιδιοχώρο $V_2(A)$, φέρνουμε τον πίνακα $A - 2I_4$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Επομένως

$$V_2(A) = \text{null}(A - 2I_4) = \{ (x_1, 0, 0, x_4) : x_1, x_4 \in \mathbb{C} \} = S(\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}) .$$

Για να βρούμε τον ιδιοχώρο $V_i(A)$ παρατηρούμε ότι μετά από στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $A - iI_4$ είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2-i}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$V_i(A) = \{ x_3(0, \frac{-2+i}{5}, 1, 0) : t \in \mathbb{C} \} = \{ k(0, -2+i, 5, 0) : k \in \mathbb{C} \} .$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι ο ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή $-i$ είναι

$$V_{-i}(A) = \{ t(0, -2-i, 5, 0) : t \in \mathbb{C} \} .$$

Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος στον \mathbb{C} , αφού τα ιδιοδιανύσματα

$$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, -2+i, 5, 0), (0, -2-i, 5, 0)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση για τον \mathbb{C}^4 . Ο πίνακας A στον \mathbb{C} είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} .$$

Παραθέτουμε το επόμενο θεώρημα χωρίς απόδειξη, τονίζουμε όμως ότι πρόκειται για ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας. Το θεώρημα αυτό δείχνει

ότι μπορούμε να συνδυάσουμε γραμμικά τις δυνάμεις του A για να προκύψει ο μηδενικός πίνακας. Για την απόδειξη, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα [2, Ενότητα 5.3].

Θεώρημα 5.3.6. (Cayley-Hamilton) Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{k})$ με

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A . Τότε ο γραμμικός συνδυασμός

$$(-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλ. $P_A(A) = \mathbf{0}$.

Στα επόμενα παραδείγματα θα εξετάσουμε διαφορες εφαρμογές του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton.

Παράδειγματα 5.3.7.

1. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τότε $P_A(x) = x^2 - 3x + 2$. Παρατηρούμε ότι

$$A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

διαπιστώνουμε λοιπόν την ισχύ του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton σε αυτό το συγκεκριμένο απλό παράδειγμα. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow A^2 - 3A = -2I_2 \Rightarrow (A - 3I_2)A = 2I_2 \Rightarrow \\ &\frac{1}{2} (A - 3I_2)A = I_2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} (A - 3I_2). \end{aligned}$$

2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε $P_A(x) = -x^3 + 2x - 1$ και σύμφωνα με το Θεώρημα των Cayley-Hamilton

$$-A^3 + 2A - I_3 = \mathbf{0}.$$

Αφού ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι διάφορος του μηδενός, ο A είναι αντιστρέψιμος. Θα υπολογίσουμε τον A^{-1} χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση μεταξύ των δυνάμεων του A .

$$-A^3 + 2A - I_3 = \mathbf{0} \Rightarrow -A^3 + 2A = I_3 \Rightarrow A(-A^2 + 2I_3) = I_3.$$

Επομένως

$$A^{-1} = -A^2 + 2I_3.$$

3. Έστω ότι

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 .$$

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έπεται ότι

$$P_A(A) = \mathbf{0} \Rightarrow (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$A^n = (-1)^{n+1} \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1} \alpha_1 A + (-1)^{n+1} \alpha_0 I_n .$$

Επομένως ο A^n εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των I_n, A, \dots, A^{n-1} . Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της προηγούμενης ισότητας με A και αντικαθιστώντας το A^n βλέπουμε ότι

$$A^{n+1} = (\alpha_{n-1}^2 + \alpha_{n-1} \alpha_{n-2}) A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_0 I_n .$$

Άρα και ο A^{n+1} εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των I_n, A, \dots, A^{n-1} . Γενικότερα, όλες οι δυνάμεις A^m όπου $m \geq n$ μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των δυνάμεων I_n, A, \dots, A^{n-1} .

Το ίδιο ισχύει και για το A^{-1} όταν ο A είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\alpha_0 \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$(-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A = -\alpha_0 I_n .$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το A (από το αριστερό μέρος της ισότητας) βρίσκουμε ότι

$$A \left((-1)^n A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 I_n \right) = -\alpha_0 I_n ,$$

δηλ.

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} \left((-1)^n A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 I_n \right) .$$

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\det \begin{bmatrix} -x & 0 & i \\ i & -x & 0 \\ 0 & -1 & -x \end{bmatrix} = (-x)(-x)^2 - i \cdot i = -x^3 + 1 .$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα των Cayley-Hamilton

$$-A^3 + I_3 = \mathbf{0}$$

και άρα $A^3 = I_3$. Αν $m \in \mathbb{N}$, τότε ο m μπορεί να γραφεί μοναδικά ως $m = 3\kappa + r$, όπου $r = 0, 1, 2$ και $\kappa \in \mathbb{N}$. Επομένως για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$A^m = \begin{cases} A^{3\kappa} = (A^3)^\kappa = I_3^\kappa = I_3 \\ A^{3\kappa+1} = (A^3)^\kappa A = A \\ A^{3\kappa+2} = (A^3)^\kappa A^2 = A^2 . \end{cases}$$

Έτσι οι διακεκριμένες δυνάμεις του πίνακα A είναι οι I_3, A, A^2 . Αφού $A^3 = I_3$, προκύπτει ότι $A A^2 = I_3$, άρα $A^{-1} = A^2$.

Ο πίνακας $J \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ λέγεται **μπλοκ του Jordan** (Jordan block) για το λ αν ο J έχει την εξής μορφή:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα αφορά την ταξινόμηση των πινάκων σε ανάλυση μπλοκ πινάκων του Jordan. Το αναφέρουμε στη συνέχεια χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.3.8. Έστω ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_s)^{m_s}$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A . Έστω επίσης ότι $n_i = \dim_{\mathbb{C}} V_{\lambda_i}(A)$, για $i = 1, \dots, s$. Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix},$$

όπου, για $j = 1, \dots, r$, ο υποπίνακας J_j του J είναι μπλοκ του Jordan για κάποια από τις ιδιοτιμές του A . Ισχύουν τα εξής για την ιδιοτιμή λ_i ($i = 1, \dots, s$):

- i) Ο αριθμός των μπλοκ του Jordan για την λ_i είναι ίσος με n_i ,
- ii) η λ_i εμφανίζεται ακριβώς m_i φορές στη διαγώνιο των μπλοκ του Jordan για τη λ_i .

Ο πίνακας $P^{-1}AP$ είναι μοναδικός και λέγεται η **κανονική μορφή του Jordan** (Jordan canonical form) για τον A .

Στο επόμενο παράδειγμα εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.3.8 για έναν 3×3 πίνακα.

Παράδειγμα 5.3.9. Έστω ότι $P_A(x) = (x - 2)^3$. Τότε ο A είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους εξής πίνακες:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Και στις τρεις περιπτώσεις, η αλγεβρική πολλαπλότητα του 2 είναι ίση με το 3. Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος μόνο όταν η κανονική μορφή του Jordan του A είναι ο J_1 , όταν δηλ. η γεωμετρική πολλαπλότητα του 2 είναι 3. Ο J_1 αποτελείται από τρία μπλοκ του Jordan, όλα 1×1 πίνακες. Όταν η γεωμετρική πολλαπλότητα του 2 είναι δύο, τότε η κανονική μορφή του Jordan του A είναι ο J_2 . Ο J_2 αποτελείται από δύο μπλοκ του Jordan: το πρώτο είναι ένας 1×1 πίνακας, το δεύτερο είναι ένας 2×2 πίνακας. Τέλος, όταν η γεωμετρική πολλαπλότητα του 2 είναι ένα, τότε η κανονική μορφή του Jordan του A είναι ο J_3 . Ο J_3 αποτελείται από ένα 3×3 μπλοκ του Jordan.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα [6] για περισσότερα επί του θέματος αυτού.

Ασκήσεις Ενότητας 5.3

1. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που περιστρέφει τα διανύσματα αριστερόστροφα κατά γωνία π . Είναι η ϕ διαγωνιοποιήσιμη;
2. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που αντικατοπτρίζει τα διανύσματα ως προς το επίπεδο $y = 0$. Είναι η ϕ διαγωνιοποιήσιμη;
3. Να υπολογίσετε για ποιές τιμές των a, b διαγωνιοποιείται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

4. Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμος.

5. Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμος.

6. Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το

$$x^4 - 2x^3 + x + 4.$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό των γραμμών του A , τη βαθμίδα $\text{rank}(A)$ και να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του A .

7. Με εφαρμογή του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

και να γράψετε τον A^4 ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I_3, A, A^2 .

8. Να βρείτε τις κανονικές μορφές του Jordan που μπορεί να έχει ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ όταν $P_A(x) = (x - 3)^2(x + 1)^3$.

5.4 Ορθογώνιοι Πίνακες και Εσωτερικό Γινόμενο στον \mathbb{R}^n

Ο τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ λέγεται **ορθογώνιος** (orthogonal) αν

$$A^T A = I_n \quad \text{ή ισοδύναμα αν} \quad A^{-1} = A^T.$$

Είναι φανερό ότι A είναι ορθογώνιος πίνακας αν και μόνο αν A^T είναι ορθογώνιος πίνακας, βλ. Άσκηση 5.4.2.

Παραδείγματα 5.4.1.

1. Ο I_n είναι ορθογώνιος πίνακας.
2. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι $AA^T = I_3$ και άρα ο A είναι ορθογώνιος πίνακας και

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

3. Έστω ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ορθογώνιος πίνακας. Αφού $A^T A = I_n$ έπεται ότι

$$\det A^T A = \det I_n = 1 \Rightarrow \det A^T \det A = 1 \Rightarrow \det A \det A = 1 \\ \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

Μία σημαντική ιδιότητα των ορθογώνιων πινάκων είναι ότι οι ιδιοτιμές τους μπορούν να πάρουν δύο μόνο τιμές, τις ± 1 , βλ. Άσκηση 5.3.3. Για να μπορέσουμε, όμως, να αποδείξουμε το προηγούμενο, θα χρειαστεί να αναπτύξουμε τη θεωρία του *εσωτερικού γινομένου* στον \mathbb{R}^n και να περιγράψουμε το γινόμενο $A^T A$ με τη χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Το **σύννηθες εσωτερικό γινόμενο** (standard inner product) στον \mathbb{R}^n είναι η συνάρτηση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ όπου} \\ \langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Για παράδειγμα, στον \mathbb{R}^2

$$\langle (1, 2), (3, -1) \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 1, \langle (1, 2), (1, 2) \rangle = 5.$$

Ομοίως στον \mathbb{R}^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι:

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2.$$

Έστω ότι $v, u, w \in \mathbb{R}^n$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του επόμενου πίνακα.

Πίνακας 5.4.1: Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

- i) $\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$ και $\langle v, v \rangle = 0$ αν και μόνο αν $v = \mathbf{0}$.
- ii) $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle, \forall v, u \in \mathbb{R}^n$
- iii) $\langle \kappa v + \lambda w, u \rangle = \kappa \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,
- iv) $\langle v, \kappa u + \lambda w \rangle = \kappa \langle v, u \rangle + \lambda \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,
- v) $\langle v, \mathbf{0} \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Ως άμεση συνέπεια της πρώτης ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου, προκύπτει ότι

$$\text{αν } \langle v, w \rangle = 0, \text{ για κάθε } w \in \mathbb{R}^n, \text{ τότε } v = 0. \quad (5.4.1.1)$$

Το **μήκος** (norm) του v συμβολίζεται $\|v\|$ και είναι ίσο με $\sqrt{\langle v, v \rangle}$. Το διάνυσμα v λέγεται **κανονικό** (normal) αν $\|v\| = 1$. Αν $w \in \mathbb{R}^n$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, τότε ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι το διάνυσμα

$$\frac{1}{\|w\|}w$$

είναι κανονικό και παράλληλο προς το w . Η **απόσταση** (distance) δύο διανυσμάτων $v, u \in \mathbb{R}^n$ είναι το μήκος του διανύσματος $v - u$ και συμβολίζεται $d(v, u)$ δηλ. $d(v, u) = \|u - v\|$. Μπορεί να αποδειχθεί η επόμενη ανισότητα, που είναι γνωστή ως **ανισότητα των Cauchy-Schwarz** (Cauchy-Schwarz inequality):

$$-\|u\|\|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\|\|v\| .$$

Έτσι ισχύει ότι

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1 .$$

Αναφέρουμε επίσης την **τριγωνική ανισότητα** (triangle inequality) που προκύπτει εύκολα από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz:

$$\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\| .$$

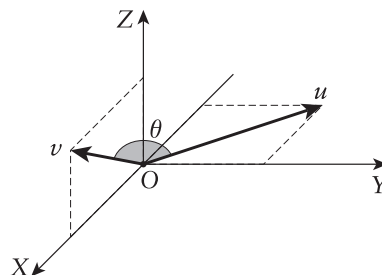
Αν $v, u \neq 0$ τότε **γωνία** (angle) των v και u ορίζεται η γωνία θ για την οποία $0 \leq \theta \leq \pi$ και

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} .$$

Παράδειγμα 5.4.2. Έστω $v = (1, 0, 1)$, $u = (-1, 1, 0)$. Τότε $\|u\| = \|v\| = \sqrt{2}$ και $d(u, v) = \sqrt{6}$.

$$\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\|\|u\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

και άρα $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.



Σχήμα 5.5: Τα διανύσματα u και v στον \mathbb{R}^3

Τα διανύσματα u, v δεν είναι κανονικά. Τα διανύσματα όμως

$$u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

είναι κανονικά και σχηματίζουν την ίδια γωνία όπως τα u και v .

Δύο διανύσματα v, u λέγονται **ορθογώνια** (orthogonal) όταν

$$\langle v, u \rangle = 0.$$

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι όταν τα διανύσματα v, u είναι ορθογώνια, τότε ισχύει το παρακάτω συμπέρασμα, γνωστό ως το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**, βλ. Άσκηση 5.4.2.

$$\text{Αν } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ είναι ορθογώνια διανύσματα τότε } \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Αν D είναι διατεταγμένη βάση του \mathbb{R}^n , τότε η D λέγεται **ορθογώνια βάση** (orthogonal basis) του \mathbb{R}^n , αν τα διανύσματα της D είναι ανά δύο ορθογώνια. Αν η D είναι ορθογώνια βάση του \mathbb{R}^n και κάθε διάνυσμα της D είναι κανονικό, τότε η D λέγεται **ορθοκανονική βάση** (orthonormal basis) του \mathbb{R}^n .

Παράδειγμα 5.4.3. Είναι φανερό ότι η κανονική βάση $B = (e_1, \dots, e_n)$ του \mathbb{R}^n είναι ορθοκανονική. Πράγματι, e_1, \dots, e_n είναι κανονικά αφού $\|e_i\| = 1$, για $i = 1, \dots, n$ και

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{για } i \neq j \\ 1, & \text{για } i = j \end{cases}$$

δηλ. e_i, e_j είναι ανά δύο ορθογώνια για $1 \leq i < j \leq n$.

Όταν ο V είναι διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^n γενικεύουμε τους προηγούμενους ορισμούς. Έτσι, αν D είναι μία διατεταγμένη βάση του V τότε η D λέγεται **ορθογώνια βάση** (orthogonal basis) του V αν τα διανύσματα της D είναι ανά δύο ορθογώνια και η D λέγεται **ορθοκανονική βάση** (orthonormal basis) του V αν D είναι ορθογώνια βάση και κάθε διάνυσμα της D είναι κανονικό. Σημειώνουμε την επόμενη παρατήρηση.

Κάθε ορθογώνια βάση του V γίνεται ορθοκανονική αν **κανονικοποιήσουμε** (normalize) τα στοιχεία της, δηλ. αν διαιρέσουμε τα στοιχεία της βάσης με το μήκος τους.

Παραδείγματα 5.4.4.

1. Έστω $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$. Αφού $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ και v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι $D = \{v_1, v_2\}$ είναι ορθογώνια βάση του \mathbb{R}^2 . Το μήκος και των δύο διανυσμάτων της βάσης είναι $\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{2}$. Η βάση D δεν είναι ορθοκανονική. Κανονικοποιούμε, θεωρώντας τα διανύσματα $w_1 = 1/\sqrt{2}(1, 1)$, $w_2 = 1/\sqrt{2}(1, -1)$. Το σύνολο $\{w_1, w_2\}$ είναι τώρα ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^2 .
2. Έστω $v_1 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$, $v_2 = 1/\sqrt{6}(-2, 1, 1)$, $v_3 = 1/\sqrt{2}(0, -1, 1)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι τα προηγούμενα διανύσματα είναι ανά δύο ορθογώνια. Θα δείξουμε ότι v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος (Παράδειγμα 5.4.1), και επομένως αντιστρέψιμος. Άρα τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βλ. Πρόταση 3.3.5. Επίσης $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$. Έπεται ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

3. Έστω ο υποχώρος V του \mathbb{R}^3 που ορίζεται ως το σύνολο

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} .$$

Αν $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, τότε (v_1, v_2) είναι διατεταγμένη βάση για τον V αλλά όχι ορθογώνια βάση για τον V . Παρατηρούμε, όμως, ότι

$$w = (-1, 2, 1) = -v_1 + 2v_2 \in V$$

και ότι $\langle v_1, w \rangle = 0$, άρα $\{v_1, w\}$ είναι ορθογώνια βάση για τον V . Επομένως

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{6}}w \right\}$$

είναι ορθοκανονική βάση για τον V .

Το επόμενο θεώρημα δείχνει τη χρησιμότητα της εύρεσης ορθογώνιας βάσης.

Θεώρημα 5.4.5. Έστω ότι V υποχώρος του \mathbb{R}^n και ότι τα διανύσματα $v_1, \dots, v_t \in V$ είναι ανά δύο ορθογώνια. Τότε τα διανύσματα v_1, \dots, v_t είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

$$v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_t v_t \implies \kappa_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \text{ για } i = 1, \dots, t .$$

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_t v_t = \mathbf{0} \tag{5.4.5.1}$$

Θα δείξουμε ότι οι συντελεστές $\kappa_1, \dots, \kappa_t$ είναι 0. Θα πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα v_1 και των δύο πλευρών της έκφρασης (5.4.5.1). Αφού

$$\langle v_1, \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_t v_t \rangle = \langle v_1, \mathbf{0} \rangle = 0$$

έπεται ότι

$$\langle v_1, \kappa_1 v_1 \rangle + \dots + \langle v_1, \kappa_t v_t \rangle = 0$$

και

$$\kappa_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + \kappa_t \langle v_1, v_t \rangle = 0 ,$$

άρα

$$\kappa_1 1 + \kappa_2 0 + \dots + \kappa_t 0 = 0 \implies \kappa_1 = 0 .$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να επαναλάβουμε τα προηγούμενα παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με κάθε ένα από τα διανύσματα v_1, \dots, v_t και να δείξουμε ότι $\kappa_1 = \dots = \kappa_t = 0$. Επομένως τα διανύσματα v_1, \dots, v_t είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω τώρα $v = \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_t v_t$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το v_i προκύπτει ότι:

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_t v_t, v_i \rangle = \kappa_i \langle v_i, v_i \rangle \implies \kappa_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

από όπου προκύπτει και το ζητούμενο. □

Έστω $B = (e_1, \dots, e_n)$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Το γινόμενο των πινάκων $C_B(u)^T C_B(v)$ είναι ένας 1×1 πίνακας με μοναδικό στοιχείο το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου των u, v , δηλ.

$$C_B(u)^T C_B(v) = C_B(v)^T C_B(u) = [\langle v, u \rangle] .$$

Εξαιτίας αυτής της παρατήρησης και για συντομογραφία γράφουμε:

$$\langle v, u \rangle = v^T u .$$

Γενικότερα, αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ και $A = [C_B(v_1) \ \dots \ C_B(v_n)]$, τότε

$$A^T A = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & \dots & v_1^T v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^T v_1 & \dots & v_n^T v_n \end{bmatrix} .$$

Προκύπτει λοιπόν το εξής κριτήριο:

Πρόταση 5.4.6. Το σύνολο $D = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια βάση του \mathbb{R}^n αν και μόνο αν ο $A^T A$ είναι διαγώνιος πίνακας, όπου

$$A = [C_B(v_1) \ \dots \ C_B(v_n)] .$$

Το σύνολο D είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n αν και μόνο αν $A^T A = I_n$, δηλ. αν και μόνο αν ο A είναι ορθογώνιος πίνακας.

Η προηγούμενη πρόταση γενικεύεται ως εξής για το διανυσματικό υποχώρο V του \mathbb{R}^n .

Πρόταση 5.4.7. Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{R}^n , V ένας διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^n , με $\dim_{\mathbb{R}} V = m$. Ένα υποσύνολο $D = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ είναι ορθογώνια βάση του V αν και μόνο αν ο $A^T A$ είναι διαγώνιος $m \times m$ πίνακας, όπου

$$A = [C_B(v_1) \ \dots \ C_B(v_m)] .$$

Το σύνολο D είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n αν και μόνο αν $A^T A = I_m$, δηλ. αν και μόνο αν ο A είναι ορθογώνιος πίνακας.

Είναι πλέον φανερό ότι αν οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n , τότε και οι γραμμές του A είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n .

Παραδείγματα 5.4.8.

1. Στο Παράδειγμα 5.4.1 είδαμε ότι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος πίνακας. Συνεπώς

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \right)$$

και

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

είναι δύο ορθοκανονικές βάσεις του \mathbb{R}^3 .

2. Στο Παράδειγμα 5.4.4.3 είδαμε ότι

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) \right)$$

είναι ορθοκανονική βάση για το επίπεδο

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

Έστω B η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Ο πίνακας A της Πρότασης 5.4.7 είναι ο 3×2 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει ότι $A^T A = I_2$.

Πως γενικεύονται τα προηγούμενα όταν ο V είναι ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος; Αν V είναι ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος, τότε λέμε ότι ο V είναι **Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος** (Euclidean vector space) αν μπορεί να ορισθεί ένα **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) στον V , δηλ. μία συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ιδιότητες, αντίστοιχες με αυτές του εσωτερικού γινομένου που μελετήσαμε στον \mathbb{R}^n και τους υποχώρους του, βλ. Πίνακα 5.4.1. Στον επόμενο πίνακα έχουμε συγκεντρώσει αυτές τις ιδιότητες.

Πίνακας 5.4.2: Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

- i.) $\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in V$ και $\langle v, v \rangle = 0$ αν και μόνο αν $v = \mathbf{0}$.
- ii.) $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle, \forall v, w \in V$
- iii.) $\langle \kappa v + \lambda w, u \rangle = \kappa \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle, \forall v, w \in V, \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,
- iv.) $\langle v, \kappa u + \lambda w \rangle = \kappa \langle v, u \rangle + \lambda \langle v, w \rangle, \forall v, w \in V, \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$,
- v.) $\langle v, \mathbf{0} \rangle = 0, \forall v \in V$.

Παραδείγματα 5.4.9.

1. Ο \mathbb{R}^n με το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο.
2. Το σύνολο V των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Όλα τα συμπεράσματα αυτής της ενότητας επεκτείνονται με το φυσικότερο τρόπο σε Ευκλείδειους διανυσματικούς χώρους. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα της βιβλιογραφίας για περισσότερες λεπτομέρειες.

Μπορούμε, όμως, γενικότερα να ορίσουμε το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{C}^n και την έννοια του εσωτερικού γινομένου για τους \mathbb{C} -διανυσματικούς χώρους. Το **σύννηθες εσωτερικό γινόμενο** (standard inner product) στον \mathbb{C}^n ορίζεται ως εξής:

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

Λέμε ότι ο \mathbb{C} -διανυσματικός χώρος V είναι **Ερμητιανός διανυσματικός χώρος** (Hermitian vector space) αν σε αυτόν ορίζεται ένα **εσωτερικό ή ερμητιανό γινόμενο** (inner product), δηλ. μία συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες του επόμενου πίνακα.

Πίνακας 5.4.3: Ιδιότητες του Ερμητιανού εσωτερικού γινομένου
 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.

- i.) $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}^+, \forall v \in V$ και $\langle v, v \rangle = 0$ αν και μόνο αν $v = \mathbf{0}$.
- ii.) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}, \forall v, w \in V$.
- iii.) $\langle \kappa v + \lambda w, u \rangle = \kappa \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle, \forall v, w \in V, \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- iv.) $\langle v, \kappa u + \lambda w \rangle = \bar{\kappa} \langle v, u \rangle + \bar{\lambda} \langle v, w \rangle, \forall v, w \in V, \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- v.) $\langle v, \mathbf{0} \rangle = 0, \forall v \in V$.

Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθογώνιος** (orthogonal) αν

$$A(\overline{A^T}) = I_n.$$

Όπως σε έναν Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο, έτσι και σε έναν Ερμητιανό διανυσματικό χώρο έχουμε τις έννοιες μίας ορθογώνιας και ορθοκανονικής βάσης. Τονίζουμε ότι αν ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνιος στον \mathbb{R} , τότε είναι ορθογώνιος και στον \mathbb{C} . Έτσι, σύνολα που είναι ορθογώνια (ορθοκανονικά) βάσεις στον \mathbb{R}^n είναι ορθογώνια (ορθοκανονικά) βάσεις στον \mathbb{C}^n . Είναι όμως απαραίτητο για την ισχύ της θεωρίας μας, να χρησιμοποιούμε τους συζυγείς αναστρέψιμους πίνακες, όταν δουλεύουμε με μιγαδικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 5.4.10. Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι ο πίνακας

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και ότι οι στήλες του A δίνουν μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{C}^2 .

Ασκήσεις Ενότητας 5.4

1. Έστω $v = (1, 2, 3, 4)$. Να βρείτε $\|v\|, \|3v\|, \|\frac{1}{5}v\|, d(u, v)$.
2. Αν $u, v \in \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια, τότε από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, δηλ. ότι

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3. Να αποδείξετε ότι τα $v_1 = (-3, 0, 4), v_2 = (4, 0, -3), v_3 = (0, 5, 0)$ δίνουν μία ορθογώνια βάση του \mathbb{R}^3 .
4. Αν A είναι ορθογώνιος πίνακας τότε να αποδείξετε ότι A^T είναι ορθογώνιος πίνακας.
5. Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

να βρείτε ένα διαγώνιο πίνακα D και ένα πίνακα P έτσι ώστε $D = P^T A P$.

6. Να διαγωνιοποιήσετε ορθογώνια τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

7. Έστω V ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία του (άπειρου) συνόλου

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots, \}$$

είναι ανά δύο ορθογώνια. Να συμπεράνετε ότι $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \infty$.

8. Να βρείτε ορθογώνιους πίνακες $A_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (αν υπάρχουν) τέτοιοι ώστε

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ b & d \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & a \\ b & d \end{bmatrix}.$$

9. Να βρείτε μία ορθογώνια βάση στον \mathbb{C}^3 που να περιέχει το διάνυσμα $(1, 0, i)$.

10. Έστω ότι $\{u_1, \dots, u_n\}$ βάση για τον υποχώρο U του \mathbb{R}^m και έστω ότι $w \in \mathbb{R}^m$. Να αποδείξετε ότι $\langle w, u \rangle = 0$, για κάθε $u \in U$, αν και μόνο αν $\langle w, u_i \rangle = 0$, για $i = 1, \dots, n$.

11. Έστω ότι $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση. Αν

$$\langle h(v), w \rangle = 0, \text{ για } v, w \in \mathbb{R}^n,$$

τότε $h = 0_{\mathbb{R}^n}$ και $h(v) = \mathbf{0}$, για $v \in \mathbb{R}^n$. Να συμπεράνετε ότι αν $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση και

$$\langle g(v), w \rangle = \langle v, w \rangle, \text{ για } v, w \in \mathbb{R}^n,$$

τότε $g = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ και $g(v) = v$, για $v \in \mathbb{R}^n$.

5.5 Φασματικό Θεώρημα

Έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μία γραμμική συνάρτηση, B είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^n , και $A = A_{B,B}^{\phi}$. Ορίζουμε την **προσαρτημένη γραμμική συνάρτηση** (adjoint linear map) του ϕ , να είναι η γραμμική συνάρτηση $\phi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, με πίνακα

$$A_{B,B}^{\phi^*} = A^T.$$

Παράδειγμα 5.5.1. Έστω η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. Αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 , τότε

$$A_{B,B}^{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$A_{B,B}^{\phi^*} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \phi^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi^*(x, y) = (x + 3y, 2x - y).$$

Μία σημαντική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου αφορά τις γραμμικές συναρτήσεις και τις προσαρτημένες συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.5.2. Έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση. Τότε

$$\langle \phi(v), w \rangle = \langle v, \phi^*(w) \rangle \text{ για } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$\phi(v)^T w = v^T \phi^*(w)$$

και ισοδύναμα ότι

$$C_B(\phi(v))^T C_B(w) = C_B(v)^T C_B(\phi^*(w)).$$

Από την Πρόταση 4.1.4, έπεται ότι

$$C_B(\phi(v)) = A C_B(v) \text{ και } C_B(\phi^*(w)) = A^T C_B(w),$$

όπου $A = A_{B,B}^{\phi}$. Άρα

$$(A C_B(v))^T C_B(w) = (C_B(v)^T A^T) C_B(w) = C_B(v)^T (A^T C_B(w))$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Στη γλώσσα των πινάκων, μπορούμε να διατυπώσουμε το Θεώρημα 5.5.2 ως εξής:

$$\text{Έστω ότι } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ και } v \in \mathbb{R}^n. \text{ Τότε } \langle Av, v \rangle = \langle v, A^T v \rangle.$$

Είναι φανερό ότι $(\phi^*)^* = \phi$. Άμεση λοιπόν συνέπεια του Θεωρήματος 5.5.2 είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 5.5.3. Έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση. Τότε

$$\langle \phi^*(v), w \rangle = \langle v, \phi(w) \rangle \text{ για } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Ειδικότερα

$$\langle \phi^* \phi(v), w \rangle = \langle \phi(v), \phi(w) \rangle \text{ για } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε υπό ποιες συνθήκες μία γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει n ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Όταν αυτό συμβαίνει λέμε ότι η ϕ (και ο αντίστοιχος πίνακας ως προς οποιαδήποτε βάση του \mathbb{R}^n) είναι **ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμη** (orthogonal diagonalizable). Τα n ορθογώνια ιδιοδιανύσματα του \mathbb{R}^n καθορίζουν ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που διευκολύνει τη μελέτη της συνάρτησης. Από όσα έχουμε εξετάσει νωρίτερα και το Παράδειγμα 5.1.6.11 προκύπτει το εξής συμπέρασμα.

Πρόταση 5.5.4. Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Τα $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ στην προηγούμενη έκφραση είναι οι ιδιοτιμές του A και είναι πραγματικοί αριθμοί. Οι στήλες του P αντιστοιχούν σε ιδιοδιανύσματα του A .

Ο A είναι λοιπόν ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος όταν υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A . Το επόμενο θεώρημα δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας πίνακας ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Το θεώρημα είναι γνωστό ως το **Φασματικό θεώρημα** (Spectral Theorem). Για την αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [2, Θεώρημα 7.2.18]

Θεώρημα 5.5.5 (Φασματικό Θεώρημα). Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν $A = A^T$.

Στη συνέχεια, στο Θεώρημα 5.5.6, θα αποδείξουμε μία ειδική περίπτωση του Φασματικού Θεωρήματος.

Θεώρημα 5.5.6. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ και $A = A^T$. Τότε ο A έχει δύο ορθογώνια ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ και $A = A^T$. Στο Παράδειγμα 5.1.6.11 είδαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι λ_1 είναι μία από τις ιδιοτιμές του A και ότι $X_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ_1 . Θεωρούμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι $X_2 = \begin{bmatrix} -b_1 & 1_1 \end{bmatrix}^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A . Έστω $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (-b_1, a_1)$ και B η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 . Έτσι, $X_1 = C_B(v_1)$, $X_2 = C_B(v_2)$. Για να δείξουμε ότι X_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του A αρκεί να δείξουμε ότι $AX_2 = tX_2$ για κάποιον πραγματικό αριθμό t . Θέτουμε $Y = AX_2$

Αφού (v_1, v_2) είναι βάση του \mathbb{R}^2 , υπάρχουν $\kappa, t \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $Y = \kappa X_1 + tX_2$. Ο στόχος μας, λοιπόν, είναι να δείξουμε ότι $\kappa = 0$. Για να τον πετύχουμε, θα υπολογίσουμε το γινόμενο $Y^T X_1 = (AX_2)^T X_1$. Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$(AX_2)^T X_1 = X_2^T (A^T X_1) = X_2^T (AX_1) = X_2^T (\lambda_1 X_1) = \lambda_1 (X_2^T X_1) = \mathbf{0}.$$

Αντικαθιστώντας $\kappa X_1 + tX_2$ στη θέση του AX_2 βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} (AX_2)^T X_1 &= (\kappa X_1 + tX_2)^T X_1 = (\kappa X_1^T + tX_2^T) X_1 \\ &= \kappa (X_1^T X_1) + t (X_2^T X_1) = \kappa (X_1^T X_1) + t \mathbf{0} = \kappa (X_1^T X_1). \end{aligned}$$

Αφού $X_1^T X_1 \neq \mathbf{0}$ και $\kappa (X_1^T X_1) = \mathbf{0}$ έπεται ότι $\kappa = 0$. Άρα $AX_2 = tX_2$ και το X_2 είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή t . Επομένως ο 2×2 πίνακας A έχει δύο ορθογώνια ιδιοδιανύσματα και είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. \square

Έστω ότι B είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^n και έστω ότι $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μία γραμμική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι

$$A_{B,B}^\phi = (A_{B,B}^\phi)^T \text{ αν και μόνο αν } \phi = \phi^*.$$

Η γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται **αυτοπροσαρτημένη** (self-adjoint) αν $\phi = \phi^*$ ενώ ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ λέγεται **αυτοπροσαρτημένος** αν $A = A^T$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.5 η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμη αν και μόνο αν η ϕ είναι αυτοπροσαρτημένη.

Παραδείγματα 5.5.7.

1. Στο Παράδειγμα 5.2.5.2 δείξαμε ότι η συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$$

είναι διαγωνιοποιήσιμη και ότι

$$P^T A_{b,B}^\phi P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

όπου

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για τις ιδιοτιμές 1 και 3 της ϕ είναι ορθογώνια και $\phi = \phi^*$.

2. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = A^T$. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)[(2-x)(1-x) - 1] + [-(1-x)] \\ &\Rightarrow P_A(x) = (1-x)x(x-3). \end{aligned}$$

Οι ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$ του $P_A(x)$ είναι οι ιδιοτιμές του A . Υπολογίζουμε τους ιδιοχώρους $V_1(A)$, $V_0(A)$, $V_3(A)$ του A .

Έχουμε ότι

- $V_1(A) = \{ (-\kappa, 0, \kappa) : \kappa \in \mathbb{R} \} = S(\{(-1, 0, 1)\})$,
- $V_0(A) = \{ (\kappa, \kappa, \kappa) : \kappa \in \mathbb{R} \} = S(\{(1, 1, 1)\})$, και
- $V_3(A) = \{ (\kappa, -2\kappa, \kappa) : \kappa \in \mathbb{R} \} = S(\{(1, -2, 1)\})$.

Επιλέγουμε ένα διάνυσμα από κάθε ιδιοχώρο και βρίσκουμε μία βάση του \mathbb{R}^3 . Αν $\varepsilon_1 = (-1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_3 = (1, -2, 1)$, τότε $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ είναι ορθογώνια βάση του \mathbb{R}^3 . Για $i = 1, \dots, 3$, διαιρούμε τα ε_i με το μήκος τους και βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 από ιδιοδιανύσματα του A :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \right).$$

Ο πίνακας

$$S = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

είναι ορθογώνιος και

$$S^T A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y, z) = (x, 2y + 4z, 4y + 3z)$. Ο πίνακας της ϕ ως προς την κανονική βάση B του \mathbb{R}^3 είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αφού $A = A^T$, ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος και η $\phi = \phi^*$ είναι αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι

$$P_A(x) = (1 - x)(x^2 - 5x - 10)$$

και ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{65}}{2}, \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{65}}{2}.$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του $A - I_3$ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι $V_1(A) = \{t(1, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ και ότι $v_1 = (1, 0, 0)$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1.

Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών φέρνουν τον πίνακα $A - \lambda_2 I_3$ στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \sqrt{65}/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός δεν είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Παρόλα αυτά μας δίνει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τον ιδιοχώρο $V_{\lambda_2}(A)$. Πράγματι αν $(x, y, z) \in V_{\lambda_2}(A)$ τότε από τη πρώτη γραμμή του πίνακα αυτού προκύπτει ότι $x = 0$, ενώ από τη δεύτερη γραμμή προκύπτει ότι

$$\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}y + 4z = 0 \Rightarrow z = \frac{1 - \sqrt{65}}{8}y.$$

Άρα

$$V_{\lambda_2}(A) = \left\{ t \left(0, 1, \frac{1 - \sqrt{65}}{8} \right) : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \left(0, 8, 1 - \sqrt{65} \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

και $v_2 = (0, 8, 1 - \sqrt{65})$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_2 . Ομοίως

$$V_{\lambda_3}(A) = \{t(0, 8, 1 + \sqrt{65}) : t \in \mathbb{R}\}$$

και $v_3 = (0, 8, 1 + \sqrt{65})$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_3 . Το σύνολο

$$(v_1, v_2, v_3)$$

είναι ορθογώνια βάση του \mathbb{R}^3 που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A . Κανονικοποιούμε και βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\left((1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{130 - 2\sqrt{65}}}(0, 8, 1 - \sqrt{65}), \frac{1}{\sqrt{130 + 2\sqrt{65}}}(0, 8, 1 + \sqrt{65}) \right).$$

Ο πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{130 - 2\sqrt{65}}} & \frac{8}{\sqrt{130 + 2\sqrt{65}}} \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{65}}{\sqrt{130 - 2\sqrt{65}}} & \frac{1 + \sqrt{65}}{\sqrt{130 + 2\sqrt{65}}} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = P^T A P.$$

Το Θεώρημα 5.5.5 προσδιορίζει πότε ακριβώς ένας πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Θέτουμε το αντίστοιχο ερώτημα για πίνακες με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

Αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, τότε έχει ο \mathbb{C}^n μία βάση ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του A ; Ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος** (orthogonal diagonalizable), αν υπάρχει ένας πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1} = \overline{(P^T)}$ και

$$\overline{(P^T)} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Οι στήλες του P είναι ιδιοδιανύσματα του A και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του A . Ο A λέγεται **αυτοπροσαρτημένος** ή **Ερμητιανός** (Hermitian) αν $A = \overline{(A^T)}$. Στο Παράδειγμα 5.1.6.11 δείξαμε ότι αν A είναι αυτοπροσαρτημένος, τότε ο A έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει το αντίστοιχο του Θεωρήματος 5.5.2 για τους μιγαδικούς $n \times n$ πίνακες και το σύννητες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{C}^n .

Θεώρημα 5.5.8. Αν $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ και $v \in \mathbb{C}^n$, τότε $\langle A v, v \rangle = \langle v, \overline{A^T} v \rangle$.

Όπως στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος προκύπτει ότι αν ο A είναι αυτοπροσαρτημένος τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Υπάρχουν πίνακες στο $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ που είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμοι και που δεν είναι αυτοπροσαρτημένοι. Ποια είναι η κοινή ιδιότητα αυτών των πινάκων; Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **κανονικός** (normal) αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$A \overline{A^T} = \overline{A^T} A.$$

Είναι φανερό ότι αν $A = \overline{(A^T)}$ τότε ο A είναι κανονικός. Μπορεί, λοιπόν, κανείς να αποδείξει την εξής σημαντική πρόταση.

Θεώρημα 5.5.9. Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός. Ειδικότερα, αν $A = \overline{(A^T)}$, τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος.

Για την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [2, Θεώρημα 7.3.11].

Παραδείγματα 5.5.10. Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι κανονικός και δεν είναι αυτοπροσαρτημένος. Στην Άσκηση 5.5.7, ο αναγνώστης καλείται να διαγωνιοποιήσει ορθογώνια τον A .

Σημειώνουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός κανονικού πίνακα δεν είναι κατ' ανάγκη πραγματικοί αριθμοί. Παρατηρούμε, όμως, ότι οι ορθογώνιοι πίνακες είναι κανονικοί. Επίσης, οι ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πίνακα έχουν μέτρο 1, βλ. Άσκηση 5.5.5. Ισχύει, λοιπόν, το επόμενο συμπέρασμα.

Πόρισμα 5.5.11. Έστω ο $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ένας ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας. Τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Οι ιδιοτιμές του A έχουν μέτρο 1.

Ασκήσεις Ενότητας 5.5

1. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y, z) = (x + 2y, x + y + z, y - x)$. Να βρεθεί ο τύπος της ϕ^* .
2. Έστω $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι $\text{null}(A) = \text{null}(A^T A)$. Να συμπεράνετε ότι $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$.
3. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ορθογώνιος πίνακας, λ ιδιοτιμή του A και v ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ . Εξετάζοντας το εσωτερικό γινόμενο $\langle Av, Av \rangle$ να αποδείξετε ότι $\lambda = \pm 1$.
4. Να βρείτε έναν ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμο πίνακα A στον $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ με πρώτη γραμμή $[1 \ 2 \ 3]$. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και βάσεις για τους ιδιοχώρους του.
5. Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ορθογώνιος πίνακας και λ μία ιδιοτιμή του A . Να αποδείξετε ότι $\|\lambda\| = 1$. (Υπόδειξη: Άσκηση 3)
6. Να βρείτε έναν ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμο πίνακα A στον $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ με πρώτη γραμμή $[1 \ 1 + 3i]$. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και βάσεις για τους ιδιοχώρους του.
7. Να διαγωνιοποιήσετε ορθογώνια τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.6 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία

Οι ιδιοτιμές εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στη μελέτη των τετραγωνικών μορφών και των διαφορικών εξισώσεων. Η σημασία της ύπαρξης των ιδιοδιανυσμάτων έγινε αντιληπτή τον 18ο αιώνα από τους Euler και Lagrange. Στις αρχές του 19ου αιώνα ο Cauchy αντιλήφθηκε ότι τα αποτελέσματά τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ταξινόμηση των κωνικών επιφανειών, ενώ ο Fourier εφάρμοσε τις ιδέες τους στο βιβλίο του *Αναλυτική Θεωρία της Θερμότητας*. Ο όρος χαρακτηριστικό πολυώνυμο οφείλεται στον Cauchy, ο οποίος και απέδειξε το Φασματικό Θεώρημα. Ο Hermite εισήγαγε τους Ερμητιανούς πίνακες το 1855 και στις αρχές του 20ου αιώνα ο Hilbert επέκτεινε τη θεωρία σε άπειρους πίνακες. Ο όρος *eigenvectors* οφείλεται σε αυτόν. Η κανονική μορφή του Jordan εμφανίστηκε στη δουλειά του Jordan το 1870.

Βιβλιογραφία

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley and Sons, 1994.
2. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαράλαμπος, Β. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 2006.
3. V. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
4. K. Nichololson, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.
5. Th. Shiffrin and M. R.Adams, *Linear Algebra, a Geometric Approach*, W. H. Freeman and Company, 2002.
6. S. H. Weintraub, *Jordan Canonical Form, Theory and Practice*, Morgan & Claypool Publishers, 2009.

Κεφάλαιο 6

Προβολές και Εφαρμογές

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιώντας την έννοια του εσωτερικού γινομένου ορίζουμε την προβολή ενός διανύσματος του \mathbb{R}^n πάνω σε έναν διανυσματικό υποχώρο του \mathbb{R}^n . Στη συνέχεια παρουσιάζουμε διάφορες εφαρμογές που προκύπτουν από τη θεωρία των προβολών και ιδιοδιανυσμάτων.

6.1 Προβολές

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$. Η **προβολή** (projection) του v πάνω στο u είναι ένα διάνυσμα $\text{proj}_u(v)$ παράλληλο προς το u τέτοιο ώστε

$$v = \text{proj}_u(v) + w,$$

όπου το $w = v - \text{proj}_u(v)$ είναι ορθογώνιο στο u . Πρέπει λοιπόν να ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

- i. $\text{proj}_u v = \lambda u$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, και
- ii. $\langle w, u \rangle = 0$.

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο $\langle v, u \rangle$ και αφού $v = \lambda u + w$ προκύπτει ότι

$$\langle v, u \rangle = \langle \lambda u + w, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle + \langle w, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle,$$

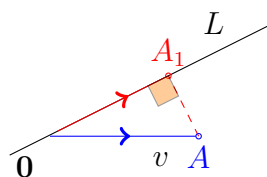
άρα

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \quad \text{και} \quad w = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \quad (6.1.0.1)$$

Αφού $\langle v, tu \rangle = t \langle v, u \rangle$ και $\langle tu, tu \rangle = t^2 \langle u, u \rangle$ είναι φανερό ότι

$$\text{proj}_{tu} v = \frac{t \langle v, u \rangle}{t^2 \langle u, u \rangle} tu = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \text{proj}_u(v), \quad \text{για } t \neq 0.$$

Ορίζουμε την προβολή του v πάνω στην ευθεία $L = \{tu : t \in \mathbb{R}\}$ και γράφουμε $\text{proj}_L(v)$ να είναι το διάνυσμα $\text{proj}_u(v)$.



Σχήμα 6.1: Προβολή του v στην ευθεία L

Αν $v = \vec{OA}$, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι η απόσταση του $A(a_1, \dots, a_n)$ από την ευθεία $L = \{tu : t \in \mathbb{R}\}$ είναι ίση με το μήκος του $v - \text{proj}_L(v)$. Στο Σχήμα 6.1 απεικονίζεται η προβολή του v στην ευθεία L , δηλ. το διάνυσμα \vec{OA}_1 . Η απόσταση του A από την L είναι το μήκος του A_1A . Ισχύει ότι

$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{A_1A},$$

όπου \vec{OA}_1 είναι επί της L και $\vec{A_1A}$ είναι κάθετο επί της L .

Παραδείγματα 6.1.1.

1. Έστω $v_1 = (0, 1, 1)$, και $v_2 = (0, 2, 0)$. Τότε

$$\text{proj}_{v_1}(v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} (0, 1, 1) = (0, 1, 1).$$

Το διάνυσμα $w = v_2 - \text{proj}_{v_1}(v_2) = (0, 1, -1)$ είναι ορθογώνιο προς το v_1

2. Έστω $u = (1, m)$. Τότε

$$\text{proj}_u(e_1) = \frac{1}{1+m^2}(1, m), \quad \text{proj}_u(e_2) = \frac{m}{1+m^2}(1, m).$$

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση προβολής στην ευθεία $y = mx$, βλ. Παραδείγματα 4.1.6.6 και 5.1.5.4. Βλέπουμε ότι $f(v) = \text{proj}_u(v)$.

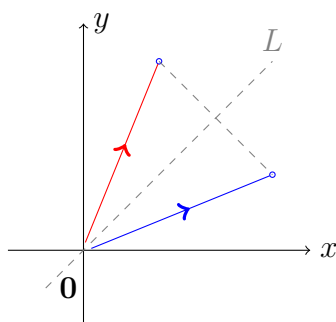
Επομένως

$$C_B(f(e_1)) = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}, \quad C_B(f(e_2)) = \frac{m}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$$

και

$$A_{B,B}^f = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}.$$

3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ο αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = mx$, βλ. Παράδειγμα 4.1.6.5.



Σχήμα 6.2: Αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία L

Έστω $u = (1, m)$. Αν $v \in \mathbb{R}^2$, βλέπουμε ότι αν $w = v - \text{proj}_u(v)$ τότε

$$f(v) = \text{proj}_u(v) - w = \text{proj}_u(v) - (v - \text{proj}_u(v)) = 2 \text{proj}_u(v) - v.$$

Άρα

$$f(e_1) = \frac{2}{1+m^2}(1, m) - (1, 0) = \frac{1}{1+m^2}(1 - m^2, 2m)$$

ενώ

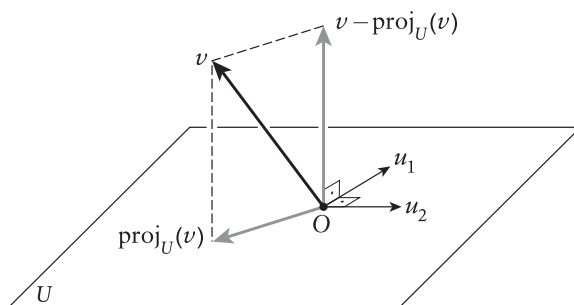
$$f(e_2) = \frac{2m}{1+m^2}(1, m) - (0, 1) = \frac{1}{1+m^2}(2m, m^2 - 1).$$

Επομένως, αν B είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 , τότε

$$A_{B,B}^f = \frac{1}{1+m^2} \begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την ορθογώνια προβολή του v σε έναν υποχώρο του \mathbb{R}^n , γενικεύοντας την προβολή του v στην ευθεία L .

Ορισμός 6.1.2. Έστω U διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^m και έστω $v \in \mathbb{R}^m$. Η **ορθογώνια προβολή** (orthogonal projection) του v στον U συμβολίζεται με $\text{proj}_U(v)$, ανήκει στον U και έχει την ιδιότητα $\langle v - \text{proj}_U(v), u \rangle = 0$, για κάθε $u \in U$.



Σχήμα 6.3: Προβολή του v στον υποχώρο U

Υπάρχει πάντα η ορθογώνια προβολή; Η απάντηση είναι ναι, όταν ο ο υποχώρος U του \mathbb{R}^m έχει μία ορθογώνια βάση. Για να το δούμε αυτό, έστω ότι $\dim_{\mathbb{R}} U = n$ και ότι $\{u_1, \dots, u_n\}$ είναι μία ορθογώνια βάση για τον χώρο U . Τότε το διάνυσμα

$$v' = \text{proj}_{u_1}(v) + \dots + \text{proj}_{u_n}(v)$$

ανήκει στο U και $w = v - v'$ είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα του U . Πράγματι, σύμφωνα με την άσκηση 6.1.10 αρκεί να αποδείξουμε ότι $\langle u_i, w \rangle = 0$ για $i = 1, \dots, n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle w, u_i \rangle &= \langle v, u_i \rangle - \sum_{j \in I} \frac{\langle v, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_i \rangle = \\ &= \langle v, u_i \rangle - \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι v' είναι ορθογώνια προβολή του v στο U , δηλ. ότι

$$\text{proj}_U(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n. \tag{6.1.2.1}$$

Είναι φανερό ότι το v ανήκει στο U αν και μόνο αν $v = \text{proj}_U(v)$. Αποδεικνύεται εύκολα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ότι

$$\|v - \text{proj}_U(v)\| \leq \|v - u\|, \quad \forall u \in U.$$

Έτσι, για να βρούμε την απόσταση ενός σημείου $B(b_1, \dots, b_m)$ από το U , θέτουμε $v = (b_1, \dots, b_m)$ και υπολογίζουμε το μήκος του διανύσματος $v - \text{proj}_U(v)$.

Παραδείγματα 6.1.3.

1. Έστω

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

$V = S(\{v_1, v_2\})$ και $w = (1, 3, 1, 5)$. Το σύνολο (v_1, v_2) είναι ορθοκανονική βάση για το V . Έχουμε ότι

$$\text{proj}_{v_1}(w) = 5v_1, \quad \text{proj}_{v_2}(w) = -v_2 \quad \text{άρα} \quad \text{proj}_V(w) = 5v_1 + v_2.$$

2. Έστω $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $U = S(\{u_1, u_2\})$ και $w = (2, 3, 3)$. Θα βρούμε τη προβολή $\text{proj}_U(w)$. Το σύνολο (u_1, u_2) είναι βάση για τον U αλλά δεν είναι ορθογώνια. Πρώτα απ' όλα λοιπόν πρέπει να βρούμε μία ορθογώνια βάση για τον U . Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα

$$u_2 - \text{proj}_{u_1}(u_2) = \frac{1}{2}(-1, 1, 2)$$

είναι ορθογώνιο προς το u_1 , όπως άλλωστε και κάθε πολλαπλάσιό του. Άρα μία ορθογώνια βάση για τον U αποτελείται από τα διανύσματα $u_1 = (1, 1, 0)$ και $u'_2 = (-1, 1, 2)$. Επομένως

$$\text{proj}_{u_1}(w) = \frac{5}{2}(1, 1, 0), \quad \text{proj}_{u'_2}(w) = \frac{7}{6}(-1, 1, 2),$$

άρα

$$\text{proj}_U(w) = \text{proj}_{u_1}(w) + \text{proj}_{u'_2}(w) = \frac{1}{3}(4, 11, 7).$$

Συνεπώς

$$w = \text{proj}_U(w) + (w - \text{proj}_U(w)) = \frac{1}{3}(4, 11, 7) + \frac{1}{3}(2, -2, 2).$$

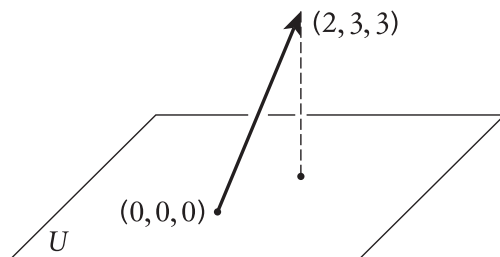
Θα επεκτείνουμε τη βάση του U σε μία ορθογώνια βάση για τον \mathbb{R}^3 . Όπως είδαμε παραπάνω, το διάνυσμα $\frac{1}{3}(2, -2, 2)$ είναι ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του U . Το ίδιο ισχύει και για κάθε πολλαπλάσιο του. Επομένως

$$\left((1, 1, 0), (-1, 1, 2), (2, -2, 2) \right)$$

είναι μία ορθογώνια βάση για τον \mathbb{R}^3 .

Παρατηρούμε ότι αφού $\text{proj}_U(w) \neq w$, το διάνυσμα $w \notin U$. Θα υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου $(2, 3, 3)$ (τελικό σημείο του w) από το επίπεδο του U . Η απόσταση του $(2, 3, 3)$ από το U είναι το μήκος του $w - \text{proj}_U(w)$. Έχουμε ότι

$$\|w - \text{proj}_U(w)\| = \left\| \frac{1}{3}(2, -2, 2) \right\| = \frac{1}{3}\|2, -2, 2\| = \frac{1}{3}\sqrt{12} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$



Σχήμα 6.4: Η απόσταση του $(2, 3, 3)$ από τον U

Το «πλησιέστερο» στο $(2, 3, 3)$ σημείο του U είναι το τελικό σημείο του $\text{proj}_U(w)$, δηλ. το $1/3(4, 11, 7)$.

3. Έστω

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad v_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

και $v = (1, 3, 1, 5)$. Το σύνολο $D = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^4 . Θα γράψουμε το v ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της D . Παρατηρούμε ότι $v = \text{proj}_{\mathbb{R}^4}(v)$ και ότι

$$\langle v_1, v \rangle = 5, \quad \langle v_2, v \rangle = 1, \quad \langle v_3, v \rangle = -2, \quad \langle v_4, v \rangle = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (6.1.2.1) βρίσκουμε ότι

$$v = 5v_1 + v_2 - 2v_3 + v_4.$$

Στις εφαρμογές η εύρεση ορθοκανονικών βάσεων για υποχώρους του \mathbb{R}^m είναι μεγάλης σημασίας και ιδιαίτερα για τις υπολογιστικές μεθόδους εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, όπως είναι η QR-ανάλυση πινάκων. Στο Παράδειγμα 6.1.3.2 υπολογίσαμε μία ορθογώνια βάση του υποχώρου U του \mathbb{R}^2 δοθείσης μίας (μη ορθογώνιας) βάσης του U . Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε γενικεύεται στον Αλγόριθμο Ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt.

Αλγόριθμος 6.1.1 Αλγόριθμος Ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt για τον υποχώρο V του \mathbb{R}^m .

Είσοδος: Μία βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ για τον V .

Έξοδος: Μία ορθοκανονική βάση για τον V .

Βήμα 1 Θέτουμε $w_1 = v_1$. Για $i = 2, \dots, n$, θέτουμε $V_{i-1} = S(\{w_1, \dots, w_{i-1}\})$ και υπολογίζουμε

$$w_i = v_i - \text{proj}_{V_{i-1}}(v_i) = v_i - \text{proj}_{w_1}(v_i) - \dots - \text{proj}_{w_{i-1}}(v_i).$$

Βήμα 2 Κανονικοποιούμε τα w_i για $i = 1, \dots, n$. Το σύνολο

$$\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$$

είναι ορθοκανονική βάση για τον V .

Παρατηρούμε ότι

$$V_{i-1} = S(\{w_1, \dots, w_{i-1}\}) = S(\{v_1, \dots, v_{i-1}\})$$

και ότι το w_i είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα w_1, \dots, w_{i-1} , για $i = 2, \dots, n$. Αναφέρουμε δύο παραλλαγές του αλγορίθμου 6.1.1.

- i.) Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το w_i με κw_i , όπου $0 \neq \kappa \in \mathbb{R}$, για $1 \leq i < n$. Αυτό γίνεται για ευκολία στους υπολογισμούς, εάν για παράδειγμα δεν επιθυμούμε κλάσματα. Δεν προχωράμε στο τελευταίο βήμα της κανονικοποίησης εάν μας ενδιαφέρει μία ορθογώνια βάση για τον V που δεν είναι κατ' ανάγκη ορθοκανονική.
- ii.) Στην είσοδο του αλγορίθμου, αντί για βάση του V μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα παράγον σύνολο του V . Εάν το παράγον σύνολο περιέχει γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, τότε κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου θα προκύψουν μηδενικά διανύσματα. Αγνοούμε τα μηδενικά διανύσματα και συνεχίζουμε με τα μη μηδενικά εναπομείναντα διανύσματα.

Παραδείγματα 6.1.4.

1. Έστω

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, -2, 1) \quad v_3 = (0, -1, 0, 2),$$

και $V = S(\{v_1, v_2, v_3\})$. Τότε

- $w_1 = v_1 = (1, 1, 0, 0)$,
- $w_2 = v_2 - \text{proj}_{w_1} v_2 = (1, 1, -2, 1) - \frac{2}{2}(1, 1, 0, 0) = (0, 0, -2, 1)$,
- $w_3 = v_3 - \text{proj}_{w_1}(v_3) - \text{proj}_{w_2}(v_3) =$

$$\begin{aligned} (0, -1, 0, 2) - \frac{-1}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{2}{5}(0, 0, -2, 1) &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ &= \frac{1}{10}(5, -5, 8, 16). \end{aligned}$$

Μία ορθογώνια βάση του V αποτελείται από τα διανύσματα

$$(1, 1, 0, 0), (0, 0, -2, 1), (5, -5, 8, 16),$$

ενώ τα διανύσματα

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{370}}(5, -5, 8, 16)$$

αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του V . Σημειώνουμε ότι για την ορθογώνια βάση του V χρησιμοποιήσαμε το διάνυσμα $10w_3$. Σημειώνουμε επίσης ότι δεν ελέγξαμε τη γραμμική ανεξαρτησία για το παράγον σύνολο του V . Ο αλγόριθμος δεν παρήγαγε κάποιο μηδενικό διάνυσμα. Επομένως τα αρχικά διανύσματα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Θα υπολογίσουμε μία ορθοκανονική βάση του υποχώρου

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 5y - 2z = 0 \}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} V &= \{ (5y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \} = \{ y(5, 1, 0) + z(2, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R} \} \\ &= S(\{(5, 1, 0), (2, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

Έστω $v_1 = (5, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$. Τότε

$$\{v_1, v_2 - \text{proj}_{v_1}(v_2)\} = \{(5, 1, 0), (1, 1, -2)\}$$

είναι ορθογώνια βάση του V , ενώ

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right\}$$

είναι ορθοκανονική βάση του V .

3. Έστω $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (4, 3, 2)$ και $V = S(\{v_1, v_2, v_3\})$. Σύμφωνα με την δεύτερη παραλλαγή του αλγορίθμου 6.1.1, έχουμε ότι

- $w_1 = v_1$,
- $w_2 = v_2 - \text{proj}_{w_1}(v_2) = (1, 0, -1)$ και
- $w_3 = v_3 - \text{proj}_{w_1}(v_3) - \text{proj}_{w_2}(v_3) =$

$$(4, 3, 2) - \frac{9}{3}(1, 1, 1) - \frac{2}{2}(1, 0, -1) = (0, 0, 0) .$$

Αφού $w_3 = 0$ έπεται ότι $v_3 = \text{proj}_{S(\{w_1, w_2\})}(v_3)$, άρα $v_3 \in S(w_1, w_2)$ και κατά συνέπεια $V = S(\{w_1, w_2\})$. Επομένως, μία ορθογώνια βάση του V είναι το σύνολο $\{w_1, w_2\}$.

Έστω V διανυσματικός υποχώρος του \mathbb{R}^m και $w \in \mathbb{R}^m$. Έχουμε στη διάθεσή μας μία μέθοδο για τον υπολογισμό μίας ορθοκανονικής βάσης για τον V . Ο επόμενος αλγόριθμος δίνει μία μέθοδο για την εύρεση του $\text{proj}_V(w)$.

Αλγόριθμος 6.1.2 Αλγόριθμος εύρεσης του $\text{proj}_V(w)$.

Είσοδος: Μία βάση για τον V και το διάνυσμα w .

Έξοδος: Το διάνυσμα $\text{proj}_V(w)$.

Βήμα 1 Χρησιμοποιούμε τον Αλγόριθμο 6.1.1, παραλλαγή i, για να βρούμε μία ορθογώνια βάση $\{w_1, \dots, w_n\}$ για τον V .

Βήμα 2 Χρησιμοποιούμε τον τύπο 6.1.2.1 για να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\text{proj}_V(w)$.

Παράδειγμα 6.1.5. Θα βρούμε την προβολή του e_3 στον υποχώρο $V = S(\{(1, 1, 1), (2, 1, 0)\})$. Είδαμε προηγουμένως ότι μία ορθογώνια βάση για τον V είναι το σύνολο $\{(1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$. Επομένως

$$\text{proj}_V(e_3) = \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \frac{1}{6}(-1, 2, 5) .$$

Αναφέρουμε τον επόμενο αλγόριθμο, που επιτρέπει τον υπολογισμό του διανύσματος $\text{proj}_V(w)$, χωρίς τον υπολογισμό ορθογώνιας βάσης για τον V .

Αλγόριθμος 6.1.3 Αλγόριθμος εύρεσης του $\text{proj}_V(w)$ με χρήση γινομένου πινάκων.

Είσοδος: Ένα παράγον σύνολο για τον V και το διάνυσμα w .

Έξοδος: Το διάνυσμα $\text{proj}_V(w)$.

Βήμα 1 Έστω $V = S(\{v_1, \dots, v_n\}) \subset \mathbb{R}^m$ και $B = (e_1, \dots, e_m)$. Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα $A = [C_B(v_1) \ \cdots \ C_B(v_n)]$. Υπολογίζουμε τον $n \times n$ πίνακα $A^T A$.

Βήμα 2 Βρίσκουμε μία λύση (c_1, \dots, c_n) του συστήματος

$$(A^T A)X = A^T C_B(w) . \quad (6.1.5.1)$$

$$\text{proj}_V(w) = c_1 \cdot v_1 + \cdots + c_n \cdot v_n .$$

Ο αλγόριθμος 6.1.3 χρήζει εξήγησης. Αφού $\text{proj}_V(w) \in V = S(\{v_1, \dots, v_n\})$ έπεται ότι υπάρχουν c_1, \dots, c_n έτσι ώστε $\text{proj}_V(w) = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$. Θα δείξουμε ότι (c_1, \dots, c_n) είναι λύση του συστήματος 6.1.5.1. Πράγματι, το διάνυσμα $w - \text{proj}_V(w)$ είναι ορθογώνιο προς κάθε στοιχείο του V . Άρα

$$\langle v_i, w - \text{proj}_V(w) \rangle = 0, \text{ για } i = 1, \dots, n .$$

Επομένως

$$\langle v_i, w - c_1 v_1 - \cdots - c_n v_n \rangle = 0, \text{ για } i = 1, \dots, n$$

και

$$C_B(v_i)^T (C_B(w) - c_1 C_B(v_1) - \cdots - c_n C_B(v_n)) = 0, \text{ για } i = 1, \dots, n . \quad (6.1.5.2)$$

Έστω $C = [c_1 \ \cdots \ c_n]^T$. Τότε

$$c_1 C_B(v_1) + \cdots + c_n C_B(v_n) = AC .$$

Άρα η σχέση 6.1.5.2 γίνεται

$$C_B(v_i)^T (C_B(w) - AC) = 0, \text{ για } i = 1, \dots, n$$

και

$$C_B(v_i)^T C_B(w) = C_B(v_i)^T (AC), \text{ για } i = 1, \dots, n .$$

Όμως $C_B(v_i)^T$ είναι η i γραμμή του A^T . Επομένως, από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$A^T C_B(w) = A^T (AC) \text{ και άρα } A^T C_B(w) = (A^T A)C .$$

Δείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα

$$(A^T A)X = A^T C_B(w)$$

είναι συμβατό και ότι C είναι μία λύση του συστήματος 6.1.5.1. Παρατηρούμε ότι αν τα διανύσματα v_1, \dots, v_n δεν είναι βάση του V , τότε η λύση του συστήματος 6.1.5.1 δεν είναι μοναδική.

Παράδειγμα 6.1.6. Έστω $V = S(\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\})$. Θα βρούμε το διάνυσμα $\text{proj}_V(e_1)$.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο 6.1.2, μία ορθογώνια βάση του V αποτελείται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ και $v_2 = (1, 1, -1, -1)$. Έτσι

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(e_1) &= \text{proj}_{v_1}(e_1) + \text{proj}_{v_2}(e_1) = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{1}{4}(1, 1, -1, -1) = \\ &= \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο 6.1.3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{και } A^T C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε το σύστημα

$$(A^T A)X = A^T C_B(w).$$

Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα είναι

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

και η λύση του συστήματος είναι $(0, 1/2)$. Άρα

$$\text{proj}_V(e_1) = 0(1, 1, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0).$$

Ασκήσεις Ενότητας 6.1

1. Δίνεται η ορθογώνια βάση

$$B = \{ v_1 = (3, 1, -1), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (1, 4, 7) \}$$

του \mathbb{R}^3 . Να βρείτε την προβολή του $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ σε κάθε ένα από τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 καθώς και στον χώρο που παράγεται από τα v_1, v_2 και τέλος να γράψετε το $v = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(v)$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3 .

2. Έστω $v_1 = (-3, 0, 4)$, $v_2 = (4, 0, -3)$, $v_3 = (0, 5, 0)$ και $u = (1, 2, 3)$. Να βρεθούν τα $\text{proj}_{v_1} u$, $\text{proj}_{S(\{v_2, v_3\})} u$, και να γράψετε το $v = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(v)$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3 .
3. Δίνεται η βάση $B = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, -3), u_3 = (-1, 1, 0)\}$ του \mathbb{R}^3 . Να υπολογισθεί με τη μέθοδο των Gram-Schmidt μία ορθοκανονική βάση B' του \mathbb{R}^3 που προκύπτει από τη δοθείσα βάση.
4. Δίνονται τα στοιχεία $v = (0, 1, 2, -1)$, $u = (1, 0, 0, 2)$, $w = (3, 1, -2, 1)$. Αν $U = S(\{u, w\})$, να βρεθεί το $\text{proj}_U v$.
5. Δίνεται το επίπεδο $U = S(\{v_1, v_2\})$ του \mathbb{R}^3 όπου $v_1 = (1, 0, 1)$ και $v_2 = (1, 1, 2)$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του $(3, 3, 4)$ από το U .

6.2 Εφαρμογές

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε διάφορες εφαρμογές της διαγωνιοποίησης καθώς και της θεωρίας που αναπτύξαμε για τις ορθογώνιες προβολές διανυσμάτων.

Δυνάμεις Διαγωνιοποιήσιμων Πινάκων

Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ένας διαγωνιοποιήσιμος πίνακας. Υπάρχουν λοιπόν πίνακες S και D έτσι ώστε

$$S^{-1} A S = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n \end{bmatrix} \text{ και άρα } A = S D S^{-1}.$$

Έστω ότι m είναι θετικός ακέραιος. Τότε

$$D^m = \begin{bmatrix} d_1^m & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n^m \end{bmatrix}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς

$$A^m = (S D S^{-1})^m = (S D S^{-1})(S D S^{-1}) \cdots (S D S^{-1}) = S D^m S^{-1}.$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του είναι μη μηδενικές, βλ. Πρόταση 5.1.7. Επομένως ο D είναι αντιστρέψιμος και μπορούμε να θεωρήσουμε και αρνητικές δυνάμεις του D . Παρατηρούμε ότι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε $D^{-m} = (D^m)^{-1}$ και

$$D^{-m} = \begin{bmatrix} d_1^{-m} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n^{-m} \end{bmatrix}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$A^{-m} = (A^m)^{-1} = (S D^m S^{-1})^{-1} = S D^{-m} S^{-1}.$$

Παράδειγμα 6.2.1. Έστω ότι $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές ± 1 και $\pm i$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

$$A^{4k} = I_n.$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, ισχύει ότι

$$A = S D S^{-1},$$

όπου οι τιμές της κυρίας διαγωνίου του D είναι οι ιδιοτιμές ± 1 και $\pm i$, (χωρίς να ξέρουμε πόσες φορές εμφανίζονται οι ιδιοτιμές ή με ποιά σειρά). Επομένως

$$A^{4k} = S D^{4k} S^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως

$$(\pm 1)^{4k} = 1 \text{ και } (\pm i)^{4k} = 1.$$

Συνεπώς

$$D^{4k} = I_n \Rightarrow A^{4k} = S D^{4k} S^{-1} = S I_n S^{-1} = S S^{-1} = I_n.$$

Γεωμετρία και Γραφικά Υπολογιστών

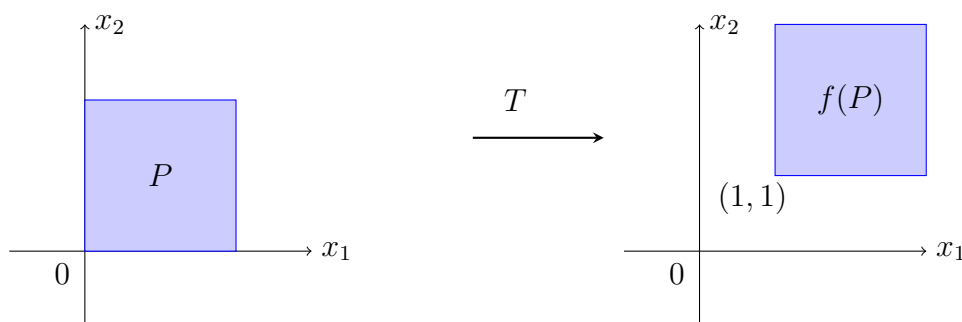
Στον κλάδο *γραφικά υπολογιστών* της πληροφορικής, πολλές εφαρμογές χρειάζονται να τροποποιήσουν μία εικόνα αλλάζοντας την θέση, τον προσανατολισμό ή και το μέγεθός της. Αυτό γίνεται εφαρμόζοντας έναν γεωμετρικό μετασχηματισμό στις συντεταγμένες που ορίζουν την εικόνα. Παρακάτω εξετάζουμε μία ειδική κατηγορία τέτοιων μετασχηματισμών που διατηρούν την κλίμακα της εικόνας. Μία **ισομετρία** (isometry) του \mathbb{R}^n είναι μία συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που διατηρεί τις αποστάσεις, δηλ.

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Η ισομετρία $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν είναι κατ' ανάγκη γραμμική συνάρτηση. Το βασικό παράδειγμα μίας ισομετρίας που δεν είναι γραμμική συνάρτηση είναι η **μεταφορά** (translation) κατά α , δηλ. η συνάρτηση

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, T(x) = x + \alpha, \text{ όπου } 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Παράδειγμα 6.2.2. Στο επόμενο σχήμα 6.5 απεικονίζεται η μεταφορά στο \mathbb{R}^2 κατά το $\alpha = (1, 1)$.



Σχήμα 6.5: Μεταφορά κατά $(1, 1)$: $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει τη σύνδεση ανάμεσα στις ισομετρίες και στις γραμμικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.2.3. Έστω $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία ισομετρία. Τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = T(x) - T(\mathbf{0})$ είναι ισομετρία και γραμμική συνάρτηση. Επομένως κάθε ισομετρία είναι σύνθεση μίας ορθογώνιας συνάρτησης και μίας μεταφοράς

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η f είναι ισομετρία. Πράγματι

$$\|f(v_1) - f(v_2)\| = \|T(v_1) - T(v_2)\| = \|v_1 - v_2\|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Συνεπώς η f διατηρεί το μήκος των διανυσμάτων, αγού

$$\|f(v)\| = \|f(v) - f(\mathbf{0})\| = \|v - \mathbf{0}\| = \|v\|, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^2.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\| &= \|v - w\| \Rightarrow \langle f(v) - f(w), f(v) - f(w) \rangle = \langle v - w, v - w \rangle \\ &\Rightarrow \langle f(v), f(v) \rangle - 2\langle f(v), f(w) \rangle + \langle f(w), f(w) \rangle = \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

Αφού $\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ και $\langle f(w), f(w) \rangle = \langle w, w \rangle$, προκύπτει το ζητούμενο.

Έστω, τώρα $B = (e_1, \dots, e_n)$, η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Αν $w_i = f(e_i)$, για $i = 1, \dots, n$, τότε από τα παραπάνω έπεται ότι το διατεταγμένο σύνολο $D = (w_1, \dots, w_n)$ είναι ορθοκανονική βάση για τον \mathbb{R}^n . Έστω $u \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι τα c_1, \dots, c_n είναι οι συντεταγμένες του $f(u)$ ως προς τη βάση D , δηλ. $f(u) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4.5, $c_i = \langle f(u), w_i \rangle$, για $i = 1, \dots, n$. Όμως, από τα παραπάνω, γνωρίζουμε ότι

$$\langle f(u), w_i \rangle = \langle \langle f(u), f(e_i) \rangle \rangle = \langle u, e_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Επομένως

$$f(u) = \langle u, e_i \rangle w_i.$$

Αν λοιπόν $u, v \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} f(u + v) &= \sum \langle u + v, e_i \rangle w_i = \sum (\langle u, e_i \rangle + \langle v, e_i \rangle) w_i = \\ &= \sum \langle u, e_i \rangle w_i + \sum \langle v, e_i \rangle w_i = f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Ομοίως, ο αναγνώστης καλείται να διαπιστώσει χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ότι

$$f(cu) = cf(u), \quad \text{για } c \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n.$$

□

Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία γραμμική συνάρτηση που είναι ισομετρία. Χρησιμοποιώντας το Πρόσχημα 5.5.3, προκύπτει ότι

$$\langle f^* f(v), w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \text{για κάθε } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Άρα

$$\langle f^* f(v), w \rangle = \langle v, w \rangle \Rightarrow \langle f^* f(v) - v, w \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{R}^n.$$

Συνεπώς $f^* f = \text{id}_V$, βλ. (5.4.1.1). Επομένως, ο πίνακας της συνάρτησης f ως προς την κανονική βάση B του \mathbb{R}^n είναι ορθογώνιος:

$$\overline{A_{B,B}^f} A_{B,B}^f = I_n.$$

Εξαιτίας αυτής της ιδιότητας καλούμε τις γραμμικές συναρτήσεις, που είναι ισομετρίες, **ορθογώνιες** (orthogonal linear transformations). Χωρίς απόδειξη, σημειώνουμε το παρακάτω ενδιαφέρον συμπέρασμα για τις ισομετρίες στο επίπεδο.

Θεώρημα 6.2.4. *Αν η συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι ισομετρία, τότε η T έχει μία από τις επόμενες μορφές:*

1. μεταφορά κατά ένα a (translation),
2. περιστροφή κατά γωνία θ (rotation),
3. αντικατοπτρισμός ως προς μία ευθεία L (reflection),

4. σύνθεση ενός αντικατοπτρισμού ως προς μία ευθεία L και μίας μεταφοράς που στέλνει τα σημεία της L σε σημεία της L (glide reflection).

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που επιθυμούμε δεν είναι βέβαια όλοι ισομετρίες.

Παράδειγμα 6.2.5. Θα βρούμε τον τύπο για τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, που διαστέλει τα σχήματα του \mathbb{R}^2 με συντελεστή 2 ως προς τον άξονα των Y , τα περιστρέφει αριστερόστροφα κατά γωνία $\pi/4$ και τα μεταφέρει κατά το $(1, 1/2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την Ενότητα 4.1. Η γραμμική συνάρτηση της διαστολής αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

βλ. Παράδειγμα 4.1.5. Η γραμμική συνάρτηση της περιστροφής αντιστοιχεί στον πίνακα

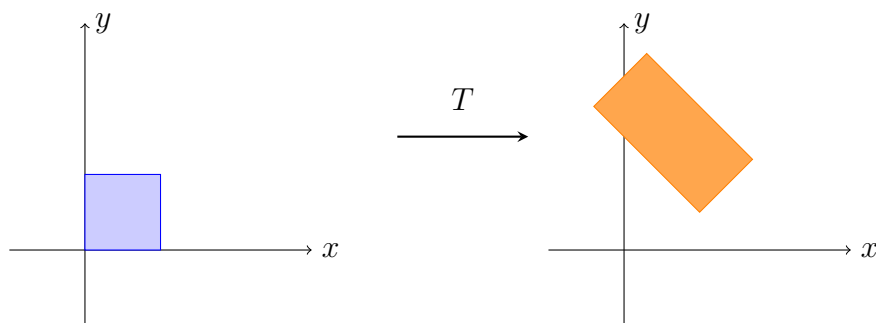
$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

βλ. Παράδειγμα 4.1.4. Το γινόμενο των πινάκων, δηλ. ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

αντιστοιχεί στην σύνθεση των γραμμικών συναρτήσεων. Συνδυάζοντας με την μεταφορά κατά το $(1, 1/2)$, βρίσκουμε ότι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός που επιθυμούμε έχει τύπο

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha - \sqrt{2}\beta + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha + \sqrt{2}\beta + \frac{1}{2} \right).$$



Σχήμα 6.6: Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός T .

Παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [4] για περισσότερα επί του θέματος της Γεωμετρίας για γραφικά υπολογιστών.

Το πρόβλημα του Κυνηγού και της Λείας του

Το **μοντέλο κυνηγού και λείας** (predator-prey model) περιγράφει ένα απλό δυναμικό σύστημα δύο πληθυσμών: των κυνηγών και της λείας. Οι κυνηγοί τρέφονται αποκλειστικά από τη λεία, ενώ η λεία δεν έχει άλλους εχθρούς και έχει απεριόριστες ποσότητες τροφής. Για παράδειγμα, αυτό το μοντέλο περιγράφει (απλοϊκά) ένα οικοσύστημα που αποτελείται από λύκους και αντιλόπες.

Έστω ότι x_k είναι ο πληθυσμός της λείας και y_k είναι ο πληθυσμός του κυνηγού τον χρόνο k μετά τον χρόνο της αρχικής μέτρησης (χρόνος μηδέν) και έστω ότι το μοντέλο περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 1/2 y_k + 1/100 x_k \\ x_{k+1} &= -50/4 y_k + 5/4 x_k . \end{aligned}$$

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/100 \\ -50/4 & 5/4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_k = \begin{bmatrix} y_k \\ x_k \end{bmatrix} ,$$

τότε το παραπάνω πληθυσμιακό μοντέλο περιγράφεται από την εξίσωση

$$V_{k+1} = A V_k .$$

Έστω ότι ξεκινάμε με αρχικό πληθυσμό $y_0 = 50$ και $x_0 = 1600$. Τα διανύσματα V_0 και V_1 περιγράφουν την αρχική κατάσταση και την κατάσταση ένα χρόνο αργότερα:

$$V_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 1600 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad V_1 = \begin{bmatrix} 41 \\ 1375 \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο πληθυσμοί μειώθηκαν. Θα συνεχίσουν να μειώνονται οι πληθυσμοί έως ότου αφανιστούν και τα δύο είδη; Είναι φανερό ότι θέλουμε να μελετήσουμε το V_k για μεγάλα k . Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $V_k = A^k V_0$. Πράγματι,

$$V_k = A V_{k-1} = A (A V_{k-2}) = A^2 V_{k-2} = \dots = A^k V_0 .$$

Όμως, ο A διαγωνιοποιείται:

$$A = P D P^{-1}, \quad \text{όπου} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 50 & 25 \end{bmatrix} .$$

Συνεπώς

$$A^k = P D^k P^{-1} \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad V_k = A^k V_0 = P D^k P^{-1} V_0 .$$

Αφού

$$D^k = \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (3/4)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (3/4)^k \end{bmatrix} ,$$

συμπεραίνουμε ότι για μεγάλα k , ο πίνακας D^k πλησιάζει την τιμή $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Άρα για μεγάλα k , ο V_k πλησιάζει την τιμή

$$\left(P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \right) V_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ 700 \end{bmatrix} .$$

Το πληθυσμιακό σύστημα που μελετούμε θα ισοροπήσει. Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα της ισορροπίας δεν εξαρτάται από τις αρχικές τιμές των y_k και x_k , αλλά από τον πίνακα A των συντελεστών και τις ιδιοτιμές του.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Έστω ότι ένα σύστημα αποτελείται από k διακριτές καταστάσεις. Τις αριθμούμε $1, 2, \dots, k$. Μεταβαίνουμε από την κατάσταση j στην κατάσταση i με μία πιθανότητα p_{ij} . Το σύστημα αυτό είναι μία **Μαρκοβιανή αλυσίδα** (Markov chain). Ο πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο τετραγωνικός $k \times k$ πίνακας $P = (p_{ij})$. Σημειώνουμε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα P είναι 1. Ένας τέτοιος πίνακας λέγεται **στοχαστικός** (stochastic). Στο επόμενο παράδειγμα περιγράφουμε μία απλή Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις.

Παράδειγμα 6.2.6. Θεωρούμε δύο καταστάσεις για τον καιρό μίας πόλης: στεγνός (κατάσταση 1) ή βροχερός (κατάσταση 2). Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης του συστήματος είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.02 \\ 0.06 & 0.98 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, αν ο καιρός είναι στεγνός τη μία μέρα, η πιθανότητα να είναι στεγνός την επομένη είναι 94% ενώ η πιθανότητα να είναι βροχερός είναι 6%. Αν ο καιρός είναι βροχερός τη μία μέρα, η πιθανότητα να είναι στεγνός την επομένη είναι 2% ενώ η πιθανότητα να είναι βροχερός είναι 98%.

Έστω ότι ο καιρός είναι βροχερός κάποια μέρα. Ποια είναι η πρόγνωση του καιρού μετά από 10 ημέρες; Αν η αρχική κατάσταση $x^{(0)}$ περιγράφεται από το διάνυσμα $x^{(0)} = [0 \ 1]^T$, τότε το γινόμενο $x^{(1)} := Px^{(0)}$ δείχνει την κατανομή των πιθανοτήτων την επόμενη μέρα. Έστω $x^{(n)}$ η κατανομή των πιθανοτήτων την n -στη μέρα. Τότε

$$x^{(n)} = Px^{(n-1)} = P^2 x^{(n-2)} = \dots = P^n x^{(0)}.$$

Για να μπορέσουμε, λοιπόν, να απαντήσουμε στο ερώτημα που τέθηκε, δηλ. να βρούμε το $x^{(10)}$, πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα P^{10} .

Γενικότερα, για να απαντήσουμε ερωτήματα όπως αυτό του παραδείγματος, θέλουμε να υπολογίσουμε δυνάμεις ενός στοχαστικού πίνακα P . Υπολογιστικά αυτό γίνεται ιδιαίτερα πολύπλοκο. Ευτυχώς, έχουμε στη διάθεσή μας το επόμενο θεώρημα, που δίνουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 6.2.7. Έστω ότι P είναι ένας πίνακας μετάβασης μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας, τέτοιος ώστε τα στοιχεία του P να είναι όλη θετικά. Τότε το 1 είναι ιδιοτιμή του P και ο P^m σταθεροποιείται για μεγάλες τιμές του m . Η οριακή κατάσταση του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατανομή.

Θα δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.2.8. (Συνέχεια του Παραδείγματος 6.2.6.) Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2.7, ο P^m σταθεροποιείται, δηλ. $P^m = P^{m+1}$, για μεγάλες τιμές του m . Επομένως $x^{(m+1)} = x^{(m)}$, αφού

$$x^{(m+1)} = P^m x^{(0)} = P^{m+1} x^{(0)} = x^{(m)}.$$

Όμως, $x^{(m+1)} = Px^{(m)}$, άρα:

$$x^{(m)} = Px^{(m)},$$

δηλ. το $x^{(m)}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το ιδιοδιάνυσμα για να προσεγγίσουμε το $x^{(10)}$. Παρατηρούμε ότι

$$V_1(P) = \{t(1, 3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Αφού το $x^{(m)}$ ανήκει στο $V_1(P)$ και είναι στοχαστικός πίνακας, τα άθροισμα των στοιχείων του είναι 1. Άρα

$$x^{(m)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

και η πιθανότητα μετά από 10 ημέρες ο καιρός να είναι στεγνός είναι περίπου 25% ενώ ο καιρός θα είναι βροχερός με πιθανότητα περίπου 75%.

Παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στο σύγγραμμα ;; για περισσότερες λεπτομέρειες επί του θέματος.

Διαφορικές Εξισώσεις και Ιδιοτιμές

Έστω ένα απλό γραμμικό σύστημα n διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= a_{11}f_1(x) + \cdots + a_{1n}f_n(x) \\ &\vdots \\ f_n'(x) &= a_{n1}f_1(x) + \cdots + a_{nn}f_n(x), \end{aligned}$$

όπου $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση και $f_i' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η παράγωγός της, για $1 \leq i \leq n$. Επιθυμούμε να βρούμε τους τύπους των f_i , για $1 \leq i \leq n$. Το σύστημα γράφεται ως

$$F' = A F,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \text{ και } F' = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{bmatrix}.$$

Όταν ο πίνακας A διαγωνιοποιείται, τότε η επίλυση του συστήματος $F' = A F$ γίνεται εύκολα ως εφαρμογή της θεωρίας της διαγωνιοποίησης. Η παρατήρηση-κλειδί για την επίλυση του συστήματος $F' = A F$ είναι ότι αν

$$g(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x), \text{ τότε } g'(x) = c_1 f_1'(x) + \cdots + c_n f_n'(x).$$

Επομένως

$$G = P F \Rightarrow G' = P F'.$$

Τα επόμενα παραδείγματα, θα διαφωτίσουν τη διαδικασία επίλυσης του $F' = A F$.

Παράδειγματα 6.2.9.

1. Αν $f'(x) = -5f(x)$, τότε από τον διαφορικό λογισμό γνωρίζουμε ότι $f(x) = C e^{-5x}$. Αν δίνεται ότι $f(0) = 2$, τότε $2 = C e^0 = C$ και $f(x) = 2 e^{-5x}$.

2. Έστω

$$F' = A F, \quad \text{όπου } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \text{ και } F' = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα $F' = A F$ αποτελείται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3f_1(x) \\ f_2'(x) &= 4f_2(x) \end{aligned}$$

και η λύση του είναι

$$F = F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{3x} \\ C_2 e^{4x} \end{bmatrix}.$$

Όταν προσδιορίζονται αρχικές συνθήκες, τότε μπορούμε να επιλύσουμε για C_1 και C_2 . Για παράδειγμα αν δίνεται ότι $f_1(0) = 2$ και $f_2(0) = -1$, τότε

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2e^{3x} \\ f_2(x) &= -e^{4x}. \end{aligned}$$

3. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2f_1(x) - f_2(x) \\ f_2'(x) &= 6f_1(x) - f_2(x). \end{aligned}$$

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές 1, -4 και $A = PDP^{-1}$, όπου

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Θα λύσουμε πρώτα το σύστημα $G' = D G$, δηλ. θα βρούμε $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= g_1(x) \\ g_2'(x) &= -4g_2(x). \end{aligned}$$

Το σύστημα $G' = D G$ έχει λύση

$$G = F = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^x \\ C_2 e^{-4x} \end{bmatrix}.$$

Εάν τώρα θέσουμε $F = P G$, παρατηρούμε ότι $F' = P G'$ και ότι F είναι λύση του αρχικού συστήματος. Πράγματι:

$$F = P G \Rightarrow A F = (PDP^{-1})P G = (PD)(P^{-1})P G = P(D G) = P G' = F'.$$

Επομένως η λύση του συστήματος $F' = A F$ είναι $F = P G$, δηλ.

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-4x} \\ C_1 e^x + 6C_2 e^{-4x} \end{bmatrix}.$$

Αν γνωρίζουμε κάποιες αρχικές τιμές για τις συναρτήσεις f_1, f_2 , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1, C_2 . Πράγματι, έστω ότι $f_1(0) = 2$, $f_2(0) = -3$. Τότε

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ -3 &= C_1 + 6C_2 \end{aligned}$$

με λύση $C_1 = 3$, $C_2 = -1$, οπότε

$$f_1(x) = 3e^x - e^{-4x} \quad \text{και} \quad f_2(x) = 3e^x - 6e^{-4x}.$$

Απομονώνουμε την παρατήρηση του προηγούμενου παραδείγματος.

Αν $A = P D P^{-1}$, τότε G είναι λύση του $G' = D G$ αν και μόνο αν $P G$ είναι λύση του $F' = A F$.

Τετραγωνικές Μορφές

Ένα πολυώνυμο με n μεταβλητές και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς λέγεται **τετραγωνική μορφή** (quadratic form) αν όλοι οι όροι του πολυωνύμου είναι βαθμού δύο ως προς τις μεταβλητές.

Για παράδειγμα το πολυώνυμο

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_1x_2 + x_2x_3$$

είναι μία τετραγωνική μορφή. Ο αναγνώστης καλείται να επιβεβαιώσει ότι

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7/2 & 0 \\ 7/2 & 4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_1x_2 + 2x_2x_3].$$

Γράφουμε, λοιπόν,

$$q(x_1, x_2, x_3) = X^T A X,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7/2 & 0 \\ 7/2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Στην κύρια διαγώνιο του A εμφανίζονται οι συντελεστές των όρων x_i^2 του πολυωνύμου $q(x_1, x_2, x_3)$, για $1 \leq i \leq 3$. Αν $1 \leq i \neq j \leq 3$, τότε το στοιχείο a_{ij} του A είναι ίσο με το ήμισυ του συντελεστή του όρου $x_i x_j$ του $q(x_1, x_2, x_3)$.

Γενικότερα, κάθε τετραγωνική μορφή

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2b_{ij} x_i x_j,$$

γράφεται ως

$$q(x_1, \dots, x_n) = X^T A X \text{ όπου } X^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \text{ και } A = A^T.$$

Αν $c \in \mathbb{R}$ και $A = A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ποια είναι η γραφική αναπαράσταση στον \mathbb{R}^n μίας εξίσωσης της μορφής

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = c, \text{ όπου } q(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X;$$

Αφού ο A είναι συμμετρικός πίνακας, από το Φασματικό Θεώρημα, γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί και ο A διαγωνιοποιείται ορθογώνια. Έστω ότι $D = P^T A P$ είναι η ορθογώνια διαγωνιοποίηση του A , όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του A και $P^T = P^{-1}$. Η αλλαγή συντεταγμένων $Y = P^T X$ μας επιτρέπει να αλλάξουμε την οπτική μας γωνία και να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές. Πράγματι, αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A , τότε

$$X^T A X = X^T (P D P^T) X = (X^T P) D (P^T X) = (P^T X)^T D (P^T X) = Y^T D Y$$

και η τετραγωνική μορφή $q(x_1, \dots, x_n) = X^T A X$ μετατρέπεται στη τετραγωνική μορφή

$$q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = Y^T D Y.$$

Το επόμενο παράδειγμα θα διαφωτίσει αυτήν την διαδικασία, βλ. σύγγραμμα [2, Ενότητα 7.2.22].

Παράδειγμα 6.2.10. Θα βρούμε το γράφημα της καμπύλης με εξίσωση

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0 .$$

Το πολυώνυμο $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ είναι τετραγωνική μορφή με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $-1, 3$ και

$$D = P^T A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ όπου } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

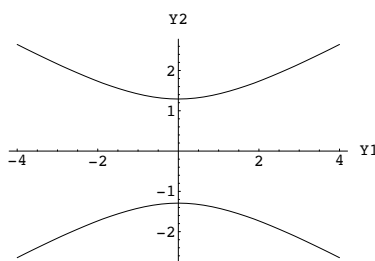
Θέτουμε

$$Y = P^T X, \text{ όπου } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ και } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

Με αυτήν την αλλαγή συντεταγμένων, η εξίσωση της καμπύλης είναι

$$-y_1^2 + 3y_2^2 - 5 = 0 .$$

Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της καμπύλης ως προς τους άξονες Y_1 και Y_2 :



Σχήμα 6.7: Η καμπύλη $-y_1^2 + 3y_2^2 - 5 = 0$.

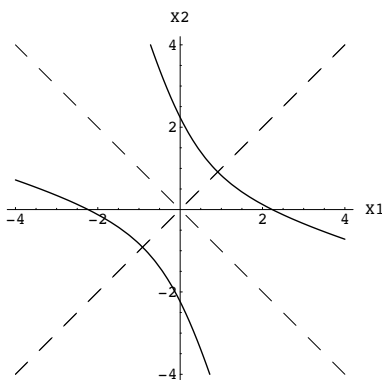
Ο άξονας Y_1 , δηλ. τα σημεία του \mathbb{R}^2 που ικανοποιούν την εξίσωση $Y_2 = 0$, είναι τα σημεία της ευθείας $x_1 = -x_2$:

$$y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 .$$

Αντίστοιχα ο άξονας Y_2 είναι η ευθεία $x_1 = x_2$:

$$y_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 . \quad \square$$

Επομένως για τη γραφική παράσταση της καμπύλης ως προς τους άξονες X_1 και X_2 πρέπει να περιστρέψουμε το σχήμα δεξιόστροφα κατά γωνία $\pi/4$:



Σχήμα 6.8: Η καμπύλη $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0$.

Παρατηρούμε ότι μία καμπύλη στο πραγματικό επίπεδο της μορφής

$$a_1y_1^2 + a_2y_2^2 = c,$$

όπου $c > 0$, εμπίπτει σε μία ακριβώς από τις παρακάτω κατηγορίες:

- έλλειψη, όταν τα a_1, a_2 έχουν το ίδιο πρόσημο,
- υπερβολή, όταν τα a_1, a_2 έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω, μπορεί κανείς να δει ότι μία καμπύλη στο επίπεδο με εξίσωση

$$q(x_1, x_2) - \gamma = 0,$$

όπου $q(x_1, x_2)$ είναι τετραγωνική μορφή, θα ανήκει σε μία από τις δύο κατηγορίες, (ανάλογα με τα πρόσημα των ιδιοτιμών):

- i. έλλειψη, όταν οι ιδιοτιμές έχουν τα ίδιο πρόσημο ή
- ii. υπερβολή, όταν οι ιδιοτιμές έχουν διαφορετικά πρόσημα

Για περισσότερα επί κωνικών μορφών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην αντίστοιχη ιστοσελίδα της wikipedia.

Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία της Ενότητας 6.1 για να βρούμε τη βέλτιστη προσέγγιση λύσης ενός μη συμβατού γραμμικού συστήματος. Θυμίζουμε ότι αν $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, και $E \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$, τότε το σύστημα $AX = E$ είναι συμβατό αν και μόνο αν το E ανήκει στον $\Sigma(A)$, τον χώρο στηλών του A , βλ. Πρόταση 3.2.9. Για την απλούστευση των συμβολισμών, θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο για την στήλη $E = [c_1 \ \cdots \ c_m]^T$ και για το διάνυσμα $E = (c_1, \dots, c_m)$. Έστω v_1, \dots, v_n τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις στήλες του A και έστω ότι το σύστημα $AX = E$ δεν είναι συμβατό. Αφού $E \notin \Sigma(A)$, επιθυμούμε την «καλύτερη» μη λύση. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε το στοιχείο του $\Sigma(A)$ που βρίσκεται πλησιέστερα του E , δηλ. την προβολή $\text{proj}_{\Sigma(A)}(E)$. Ισοδύναμα, θέλουμε να υπολογίσουμε τα $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$$\text{proj}_{\Sigma(A)}(E) = z_1v_1 + \cdots + z_nv_n.$$

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 6.1.3, το διάνυσμα (z_1, \dots, z_n) , για την προβολή του E στον $\Sigma(A)$, προκύπτει ως λύση του συστήματος

$$(A^T A)X = A^T E.$$

Ονομάζουμε τη λύση (z_1, \dots, z_n) **βέλτιστη προσεγγιστική λύση** (best approximation) του $AX = E$. Η **απόκλιση** (το λάθος) είναι το μήκος της διαφοράς $E - \text{proj}_{\Sigma(A)}(E)$. Έτσι αν $\text{proj}_{\Sigma(A)}(E) = (p_1, \dots, p_m)$ τότε η απόκλιση είναι ίση με

$$\|E - \text{proj}_{\Sigma(A)}(E)\| = \sqrt{(c_1 - p_1)^2 + \dots + (c_m - p_m)^2},$$

και για αυτό, η μέθοδος αυτή ονομάζεται **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων** (method of least squares). Αποδείξαμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6.2.11. Έστω $AX = E$ ένα γραμμικό σύστημα, όπου $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $E \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$. Τότε κάθε λύση του συστήματος

$$(A^T A)X = A^T E$$

είναι βέλτιστη προσεγγιστική λύση του $AX = B$.

Παραδείγματα 6.2.12.

1. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \text{ και } A^T E = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις του $(A^T A)X = A^T E$ είναι το σύνολο:

$$\left\{ \left(\frac{3}{5}, 0 \right) + t(-1, 1) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Κάθε ένα από τα στοιχεία αυτού του συνόλου είναι βέλτιστη προσεγγιστική λύση του $AX = E$. Μία συγκεκριμένη λύση είναι $(\frac{3}{5}, 0)$. Για αυτήν την λύση (όπως και για κάθε άλλη βέλτιστη προσεγγιστική λύση) έχουμε ότι

$$A \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και η απόκλιση είναι $\sqrt{(2/5)^2 + (-1/5)^2} = \sqrt{1/5}$.

2. Έστω τα σημεία $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι δεν υπάρχει ευθεία $y = a_0 + a_1 x$ που να περνά και από τα τρία σημεία και το σύστημα

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 &= 2 \\ a_0 + 3a_1 &= 4 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση. Η βέλτιστη προσεγγιστική λύση του παραπάνω συστήματος καθορίζει την *ευθεία ελαχίστων τετραγώνων* (line of best fit) αυτών των σημείων. Έχουμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T E = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Επιλύουμε το σύστημα $(A^T A)X = A^T E$. Η λύση αυτού του συστήματος είναι η $(-2/3, 3/2)$. Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η

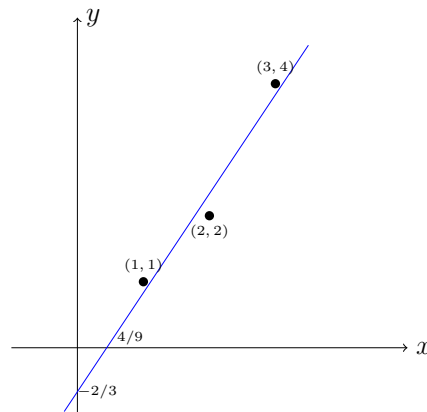
$$y = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 23 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Η απόκλιση είναι ίση με

$$\sqrt{(1/6)^2 + (-1/3)^2 + (1/6)^2} = \sqrt{1/6}.$$



Σχήμα 6.9: Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $y = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x$.

Ασκήσεις Ενότητας 6.2

1. Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{100} , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Να αποδείξετε ότι αν $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία και $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, τότε

$$T(cu) = cT(u), \text{ για } c \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n.$$

3. Να βρείτε τον τύπο του γεωμετρικού μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, που προκύπτει ως η σύνθεση α) της αριστερόστροφης περιστροφής κατά $\pi/2$, β) της συστολής του άξονα των X κατά $1/2$ και γ) της μεταφοράς κατά $(2, 1)$. Να σχεδιάσετε την απεικόνιση του μοναδιαίου τετραγώνου. Θα είχε διαφορά στην εικόνα μας αν κάναμε πρώτα την μεταφορά;
4. Έστω ότι ο πίνακας που αντιστοιχεί σε ένα πληθυσμιακό μοντέλο κυνηγού και λείας είναι

$$\begin{bmatrix} 0.55 & 0.005 \\ -18 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

Να αποφασίσετε αν θα επιτευχθεί ισορροπία στο σύστημα και σε ποια τιμή.

5. Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας (δύο καταστάσεων) είναι ο παρακάτω πίνακας:

$$P = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.23 \\ 0.38 & 0.77 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε την οριακή τιμή του P^m . Εάν σε κάποια φάση η κατανομή των πιθανοτήτων περιγράφεται από τον $[0.4 \quad 0.6]$, να προσεγγίσετε την κατανομή μετά από 100 φάσεις.

6. Να λυθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3f_1(x) + 2f_2(x) + 2f_3(x) \\ f_2'(x) &= f_1(x) + 4f_2(x) + 2f_3(x), \\ f_3'(x) &= -f_1(x) - 2f_2(x) \end{aligned}$$

αν $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = -1$ και $f_3(0) = 1$.

7. Να βρείτε το είδος της καμπύλης που περιγράφεται από την εξίσωση $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 1$.
8. Να βρείτε μία βέλτιστη προσεγγιστική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= 1 \\ 4x + 10y + 3z &= 2 \\ 6x + 15y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

9. Να βρείτε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων για τα σημεία $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$.

6.3 Σύντομα Ιστορικά Στοιχεία

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, οι εφαρμογές των ελαχίστων τετραγώνων και των τετραγωνικών μορφών υπήρξαν η κινητήριος δύναμη τον 19ο αιώνα για την ανάπτυξη της θεωρίας των ιδιοτιμών και των ιδιοχώρων συναρτήσεων από κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής τους, όπως οι Gauss, Fourier, Cuchy και άλλοι.

Το μοντέλο του κυνηγού και της λείας του, γνωστό και ως μοντέλο των Lotka-Volterra πρωτοεισήχθη από τον Lotka το 1925 στο βιβλίο του πάνω στα βιομαθηματικά, αρχικά μελετώντας οργανικά συστήματα με φυτά ως το θήραμα και φυτοφάγα ζώα ως τον κυνηγό. Ο Volterra ανεξάρτητα, παρουσίασε το ίδιο μοντέλο το 1926, μελετώντας τις αλλαγές στον

πληθυσμό των ψαριών στην Αδριατική θάλασσα. Το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί και προγραμματιστεί η αναπαραγωγή των αλκών και λύκων στο Βασιλικό Εθνικό Πάρκο στο νησί Isle, στο Michigan των Ηνωμένων Πολιτειών. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες οφείλουν το όνομά τους στον ρώσο μαθηματικό Andrey Markov, ο οποίος δούλεψε πάνω σε τέτοια προβλήματα στις αρχές του 20ου αιώνα.

Βιβλιογραφία

1. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, John Wiley and Sons, 1994.
2. Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Β. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη 2006.
3. V. Katz, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
4. F. Lin, K. Wyrwas, J. Irwin, C. Lilley, W.T. Hewitt, T.L.J. Howard, *Geometry for Computer Graphics, Student Notes*, The University of Manchester
5. K. Nichololson, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, 2001.
6. L.R. Rabiner, B.H. Juang *An Introduction to Hidden Markov Models*, 1986.
7. Th. Shiffrin and M. R.Adams, *Linear Alegbra, a Geometric Approach*, W. H. Freeman and Company, 2002.

Λύσεις και Υποδείξεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

1.1

1 i)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

2 ii)

$$\begin{array}{rcl} & x_3 & = 0 \\ x_2 & +x_4 & +3x_5 = 2 \\ 3x_2 & & = 1 \end{array} .$$

Λύνοντας ως προς x_2 και στη συνέχεια ως προς x_4 , βρίσκουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι η 5άδα $(x_1, 1/3, 0, 5/3 - x_5, x_5)$ όπου $s, t \in \mathbb{R}$. Επομένως το σύνολο των λύσεων είναι

$$\left\{ \left(s, \frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3} - t, t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3 Το σύνολο των λύσεων είναι ολόκληρος ο \mathbb{R}^4 .

1.2

1 Υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοιοι πίνακες.

2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου } a \in \mathbb{C} .$$

3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου } a \in \mathbb{C} .$$

4 $\text{rank } A_2 = 2$ αφού η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A_2 είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

1.3

- 1** Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του επαυξημένου πίνακα των τεσσάρων συστημάτων είναι ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2a-b \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & c-a-b \end{array} \right].$$

Επομένως, το σύνολο λύσεων του πρώτου συστήματος είναι το $\{(-3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, το δεύτερο σύστημα δεν είναι συμβατό, το σύνολο λύσεων του τρίτου συστήματος είναι το $\{(-3t, 2t + 1, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Για να είναι το τέταρτο σύστημα συμβατό πρέπει $c - a - b = 0$.

- 2** Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_3, x_4 . Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{5}t - s, \frac{2}{5}t + s, t, s, 1 \right) : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (1, 0, 0, 0, 1) + t \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0, 0 \right) + s \left(-1, 1, 0, 1, 0 \right) : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 3** $a = -2$.

- 5** Το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος είναι το $\{t(1, 1, 1, 2) + s(0, 1, 2, 1) : t, s \in \mathbb{C}\}$.

1.4

- 1** Απαλοίφοντας το t βρίσκουμε ότι $y - 2x - 2 = 0$

- 2** Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή του αντίστοιχου συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right].$$

Άρα το επίπεδο περιγράφεται ως το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right) + t \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 3** $3y - 2z = 0$

- 4** Όλα τα επίπεδα της μορφής $ax + by + az = 0$ περνούν από τα τρία αυτά σημεία, για $a, b \in \mathbb{R}$ που δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Γεωμετρικά, αυτό συμβαίνει γιατί τα τρία σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία. Η εξίσωση της ευθείας είναι $\{t(1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$.

1.5

- 1** Η καμπύλη $y = -3 - 2x + x^2$ διέρχεται από τα δοθέντα σημεία.

- 2** Η καμπύλη $y = 2 - x^2 + x^3$ διέρχεται από τα δοθέντα σημεία.

- 3** Η καμπύλη $y = 2 + 2ax - (1 + a)x^2 + (1 - 2a)x^3 + ax^4$ διέρχεται από τα δοθέντα σημεία. Είναι τετάρτου βαθμού, για κάθε $a \neq 0$.

2.1**1**

(α)
$$\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}$$

(β)
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2
$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a(a^2 + b^2 - c^2) & b(a^2 + b^2 - c^2) \\ a(a^2 + b^2 + c^2) & 0 & -c(a^2 + b^2 + c^2) \\ b(a^2 + b^2 + c^2) & c(a^2 + b^2 + c^2) & 0 \end{bmatrix}$$

3 (α)
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

(β)
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

(γ)
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

4 Παρατηρούμε ότι

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Ο $A + A^T$ είναι συμμετρικός πίνακας ενώ ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας.

5 Για $n = 1$, η πρόταση ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n = k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$. Αφού $A_1 \cdots A_{k+1} = (A_1 \cdots A_k)A_{k+1}$, από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής $A_1 \cdots A_k$ είναι κάτω τριγωνικός. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι κάτω τριγωνικός. Έστω A, B δύο κάτω τριγωνικοί πίνακες, $AB = (c_{ij})$. Τότε $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$. Θα αποδείξουμε ότι τα στοιχεία επάνω από την κύρια διαγώνιο του AB είναι ίσα με μηδέν. Έστω ότι $j > i$. Αν $k \leq i$, τότε $k < j$ και $b_{kj} = 0$, άρα $a_{ik}b_{kj} = 0$. Αν $k > i$, τότε $a_{ik} = 0$ και $a_{ik}b_{kj} = 0$. Επομένως $c_{ij} = 0$ είναι μηδέν, για $j > i$ και AB είναι κάτω τριγωνικός.

2.2

1 $(E_{i+a,j})^{-1} = E_{i-a,j}, (E_{i \leftrightarrow j})^{-1} = E_{i \leftrightarrow j}, (E_{b-i})^{-1} = E_{b-i}.$

2

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3

$$X_1 = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4 $A^2 + 2A = I + n \Rightarrow A(A + 2I_n) = (A + 2I_n)A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A + 2I_n$. Ομοίως $B^{-1} = -1/3(2B^2 + 4B - 2I_n)$

2.3

- 1** $a_1 = -2$, $a_2 = 3 + 3i$. Για την ορίζουσα a_3 να χρησιμοποιήσετε πράξεις γραμμών για να φέρετε τον πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή: $a_3 = 90$. Για την a_4 να χρησιμοποιήσετε την ανάπτυξη της ορίζουσας ως προς την τέταρτη γραμμή: $a_4 = -72$.
- 2** Για την ορίζουσα b_1 παρατηρείστε ότι ο πίνακας είναι μπλοκ 3×3 πινάκων: $b_1 = 6$. Για την ορίζουσα b_2 παρατηρείστε ότι αν αντιμεταθέσετε δύο στήλες, ο πίνακας γίνεται μπλοκ πινάκων: $b_2 = 2$.
- 3** Να χρησιμοποιήσετε επαγωγή ως προς n .
- 4** Αφού A είναι 5×5 , έπεται ότι $\det(2A) = 2^5 \det A$. Επομένως $\det 2A = 32i$. Επίσης, αφού $\det \operatorname{adj}(A) \det A = (\det A)^5$ βρίσκουμε ότι $\det(\operatorname{adj}(A)) = 1$.
- 5** $A = -A^T \Rightarrow \det A = (-1)^n \det A \Rightarrow \det A = 0$
- 6** Αν $a_i = a_j$ για $i \neq j$, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν. Διαφορετικά, να χρησιμοποιήσετε επαγωγή ως προς n . Για το επαγωγικό βήμα ($n = k + 1$), να χρησιμοποιήσετε πράξεις γραμμών για να μηδενίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης στις γραμμές $2, \dots, k + 1$, στη συνέχεια να αναπτύξετε κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και κατόπιν να διαιρέσετε την i γραμμή με $a_i - a_1$, για $i = 2, \dots, k + 1$.
- 7** $x_1 = 2/7$, $x_2 = 37/7$, $x_3 = 18/7$.

2.4

- 2** Οι λύσεις του συστήματος $A^T X = \mathbf{0}$ δίνουν το σύνολο

$$\{t(1, -1, 1, 0, 0, 0) + s(-1, 0, 0, -1, 1, 0) + r(0, 1, 0, 1, 0, 1) : t, s, r \in \mathbb{R}\}.$$

Για παράδειγμα, $(1, -1, 1, 0, 0, 0)$ δηλώνει την κυκλική διαδρομή που χρησιμοποιεί τις ακμές 1, 3 κατά την φορά τους και την ακμή 2 με αντίθετη φορά.

- 3** Εφαρμόστε τον κανόνα του Cramer, χρησιμοποιώντας την τιμή της ορίζουσας του Vandermonde.
- 4** Ο $n \times (n + 1)$ πίνακας A των συντελεστών του συστήματος που πρέπει να επιλυθεί για να βρεθούν οι συντελεστές a_0, \dots, a_n της καμπύλης $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, περιέχει ως υποπίνακα τον πίνακα του Vandermonde. Αφού $\operatorname{rank} A = n$, έπεται ότι το σύστημα είναι συμβατό και έχει μία ελεύθερη μεταβλητή. Άρα έχει άπειρες λύσεις.
- 5** $Y = [1/3 \quad 3 \quad 2/3]^T$, $X = [-166/21 \quad 57/21 \quad 2/21]^T$.
- 6** Θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του πίνακα $[31 \quad 32 \quad 36]^T$.

3.1

- 1** Η L δίνεται από την εξίσωση $y = 2$ και δεν είναι υποχώρος του \mathbb{R}^2 . Η L' δίνεται από την εξίσωση $y - 2x = 0$ και είναι υποχώρος του \mathbb{R}^2 .
- 2** Τα σημεία $(0, 0, 0)$ ($k = t = 0$), $(1, 0, 1)$ ($k = 0, t = 1$) και $(1, 1, 1)$ ($k = 1, t = 0$) ανήκουν στο E_1 . Λύνουμε το σύστημα $-d = 0, a + b + c - d = 0, a + c - d = 0$. Το E_1 περιγράφεται από την εξίσωση $z - x = 0$ και είναι υποχώρος του \mathbb{R}^3 . Το E_2 δεν είναι υποχώρος του \mathbb{R}^3 . Παρατηρήστε ότι $E_3 = E_1$.
- 3** 2
- 4** Μετακινούμε το παραλληλόγραμμο οριζόντια και κάθετα κατά 1 μονάδα. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $(0, 0), (1, 2), (0, 4), (1, 6)$ υπολογίζεται από την Πρόταση 3.1.2.
- 5** 6.

3.2

- 1** $(0, 0) \notin L$.
- 2** Έστω $a, b \in U$. Τότε $a = (a_1, a_1, a_3, \dots, a_n)$ και ομοίως για το b . Αν $k, l \in \mathbb{k}$ τότε $ka + lb = (ka_1 + lb_1, ka_1 + lb_1, ka_3 + lb_3, \dots, ka_n + lb_n) \in U$. Ένα παράγον σύνολο για το U όταν $n = 4$ είναι το $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
- 3** Ένα παράγον σύνολο για το L είναι το $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- 4** Ένα παράγον σύνολο για το U είναι το $\{(1, 1, 1)\}$. Ένα παράγον σύνολο για το V είναι το $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$.
- 5** Όπως στο Παράδειγμα 3.2.4.7. Βρίσκουμε ότι $2z + y - 2x = 0$
- 6** $S(X) = S(Y) = \mathbb{R}^2$.
- 7** Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2.9. Το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ανήκει στον χώρο γραμμών και στηλών του A .

3.3

- 1** $2u_1 - u_4 = 0$.
- 2** $v_1 - v_2 - v_3 = 0$. Μία βάση για τον χώρο $S(\{v_1, v_2, v_3\})$ είναι το σύνολο $\{v_1, v_2\}$.
- 3** (α) $\{(1, -2)\}$.
 (β) $\{(1, 0, -\frac{1}{3}), (0, 1, -\frac{1}{3})\}$.
 (γ) Το παράγον σύνολο αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και είναι βάση για το U_3 .

3.4

1 Να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα 3.4.5 για να αποδείξετε ότι $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) \geq 1$.

2 Έστω A ο πίνακας με στήλες να αντιστοιχούν στα διανύσματα που παράγουν τον U και W . Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $U+W = \mathbb{R}^4$ (διαλέξτε την αγαπημένη σας βάση για το \mathbb{R}^4). Από τις σχέσεις $\Sigma_5 = 2\Sigma_2$ και $\Sigma_6 = -2\Sigma_3 + \Sigma_4$ και επομένως $\Sigma_2 = 1/5\Sigma_5$, ενώ $\Sigma_3 = 1/2(\Sigma_4 - \Sigma_6)$. Συνεπώς, $U \cap W = S(\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)\})$.

3 (α) $C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(β) $C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(γ) $C_B(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C_B(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4 $C_D(w_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

5 (α) $v = e_1 + e_2 + 2e_3 = (1, 1, 2)$

(β) $v = e_1 + 3e_2 + e_3 = (1, 3, 1)$

6 Αφού

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

έπεται ότι

$$C_D(w_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C_D(w_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

7 Η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του A είναι

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Επομένως το σύνολο $\{(1, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\}$ είναι βάση για τον $\Gamma(A)$. Το σύνολο $\{(1, 2), (2, 5)\}$ είναι βάση για τον $\Sigma(A)$. Αφού το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = \mathbf{0}$ είναι το

$$\{t(-1, 1, 0, 0, 0) + s(-1, 0, 1, 0, 0) + f(-1, 0, 0, -1, 1) : s, t, f \in \mathbb{K}\},$$

έπεται ότι

$$\{(-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, -1, 1)\}$$

είναι βάση για τον $\text{null}(A)$. Παρατηρούμε ότι $-\Sigma_1 + \Sigma_2 = 0$, $-\Sigma_1 + \Sigma_3 = 0$, $\Sigma_1 + \Sigma_4 - \Sigma_6 = 0$.

- 8** Αν $BX = 0$, τότε $(AB)X = 0$. Επομένως $\text{null}(B) \subset \text{null}(AB)$ και συνεπώς $\dim_{\mathbb{k}} \text{null}(B) \leq \dim_{\mathbb{k}} \text{null}(AB)$.
- 9** Σύμφωνα με την Άσκηση 8 και το Θεώρημα 3.4.3, προκύπτει ότι $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$. Επομένως, για τον πίνακα $B^T A^T$, ισχύει ότι $\text{rank}(B^T A^T) \leq \text{rank}(A^T)$. Να χρησιμοποιήσετε τώρα την Πρόταση 3.4.1 για να προκύψει το ζητούμενο.

3.5

- 1** Το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} που έχουν βαθμό 6 δεν είναι υποχώρος του $\mathbb{R}[x]$, αφού για παράδειγμα $x^6 + (-1)(x^6 - 2x) = 2x$ που έχει βαθμό 1. Μία βάση για τον υποχώρο των πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} που έχουν βαθμό $\leq m$ είναι το σύνολο $\{1, x, \dots, x^m\}$
- 2** Αν E_{ij} είναι ο πίνακας με 1 στη θέση ij και μηδέν στις άλλες θέσεις, τότε παρατηρείστε ότι $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nm}\}$ είναι βάση για τον $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$.
- 3** Μία βάση για τον υποχώρο των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων στον $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{k})$ είναι το σύνολο $\{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$ με τον συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης.

4.1

2 $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$.

3 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4, 3x_1 + x_2 - x_4)$,
 $g(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 3x_1 + x_2, 5x_1, 6x_1 - x_2)$

4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5 $f(4, -3) = (1, -11)$

6 $e_1 \mapsto (0, -1) \mapsto (0, -1) \mapsto (0, -2) \mapsto (0, -2)$. $e_2 \mapsto e_1 \mapsto (3, 0) \mapsto (3, 0) \mapsto (-3, 0)$.
 Να συμπεράνετε ότι $f(x, y) = (-3y, -2x)$.

4.2

1 Αφού

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a - 2b \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c - a + 2b \end{array} \right],$$

έπεται ότι $(1, 0, 1), (2, 1, 0)$ είναι βάση για την $\text{Im} f$. Σημειώστε επίσης ότι η $\text{Im} f$ είναι το επίπεδο $c - a + 2b = 0$ στον \mathbb{R}^3 .

- 3** Μία βάση για τον V είναι το σύνολο $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.2.1.iv, η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, με $f(e_1) = (1, -1, 0)$, $f(e_2) = (0, 1, -1)$ είναι ισομορφισμός. Παρατηρείστε ότι $f(x, y) = f(xe_1 + ye_2) = (x, -x + y, -y)$ και ότι ο πίνακας της συνάρτησης ως προς τις δυο αυτές βάσεις είναι ο μοναδιαίος.
- 4** Όπως στην προηγούμενη άσκηση. Αν $v_1 = (1, -1, 0)$ και $v_2 = (0, 1, -1)$ τότε $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v_1 \mapsto e_1$, $v_2 \mapsto e_2$ είναι ισομορφισμός. Επομένως $av_1 + bv_2 \mapsto (a, b)$.

4.3

1

$$S_{D \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, S_{B \leftarrow D} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -8 & -3 & 1 & 8 \\ 8 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 2** $f(x, y) = (5x - y, -2x)$.
- 3** $f(x, y, z) = (x, x - y - z, y)$, $f^{-1}(x, y, z) = (x, z, x - y - z)$.

5.1

- 1** $\phi(v) = -v, \forall v \in \mathbb{R}^2$. Επομένως, η ϕ έχει την ιδιοτιμή $\lambda = -1$ και κάθε $v \in \mathbb{R}^2, v \neq (0, 0)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ϕ .
- 2** Η ϕ έχει δύο ιδιοτιμές, ± 1 . Για το $\lambda = -1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $(x, 0, z)$. Για το $\lambda = 1$ τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $(0, y, 0)$.
- 3** (α) Για $\lambda_1 = 5$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $v_1 = (1, 1)$.
Για $\lambda_2 = -1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $v_2 = (1, -\frac{1}{2})$.
- (β) Για $\lambda_1 = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}+1}{2})$.
Για $\lambda_2 = -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1, -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}, \frac{i\sqrt{3}-1}{2})$.
Για $\lambda_3 = 1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $v_3 = (1, 1, 1)$.
- 4** (α) Για $\lambda_1 = 3$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1, 1, -2)$.
Για $\lambda_2 = 2$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1, 0, 0)$.
- (β) Για $\lambda_1 = 2$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1, 2)$.
Για $\lambda_2 = -1$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(1, \frac{1}{2})$.
- (γ) Για $\lambda_1 = 0$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(-i, 1)$.
Για $\lambda_2 = 2$, τα ιδιοδιανύσματα είναι πολλαπλάσια του $(i, 1)$.

5

$$AX = \lambda X \implies (A + kI)X = (\lambda + k)X.$$

Για να δείξετε ότι $A^m X = \lambda^m X$, χρησιμοποιείτε επαγωγή.

- 6** Να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση για να δείξετε ότι $Av = \lambda v \implies (3A^2 - A + 2I)v = (\lambda^2 - \lambda + 2)v$

5.2

- 1 Να κάνετε χρήση της σχέσης της ορίζουσας και του ίχνους ενός πίνακα για να δείξετε ότι οι άλλες δύο ιδιοτιμές είναι οι $\pm 2i$.
- 2 $V_3 = \{t(1, 1, -2) : t \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{t(1, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.
- 3 Αν $B = S^{-1}AS$, τότε $\det(B - xI_n) = \det(A - xI_n)$. Επομένως έχουν τον ίδιο σταθερό όρο, δηλ. $\det(B) = \det(A)$. Ομοίως, έχουν τον ίδιο συντελεστή για τον όρο x^{n-1} και $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(A)$
- 4 Η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1, είναι 3 ενώ η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1. Η αλγεβρική πολλαπλότητα των άλλων ιδιοτιμών είναι 1, άρα και η γεωμετρική πολλαπλότητά τους είναι 1.

5.3

- 1 Ναι.
- 2 Ναι.
- 3 $a \neq b \in \mathbb{R}$
- 4 Ο A δεν διαγωνιοποιείται.
- 5 Ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.
- 6 Ο A είναι 4×4 πίνακα. Αφού $\det(A) = 4$, έπεται ότι $\text{rank}(A) = 4$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton προκύπτει ότι $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^3 - 2A^2 + I)$.
- 7 $A^{-1} = -\frac{1}{12}(-A^2 - 2A + 7I_3)$ και $A^4 = 11A^2 - 2A - 24I_3$.
- 8 Υπάρχουν δύο μορφές για τα μπλοκ του Jordan για την ιδιοτιμή 3 και τρεις μορφές για τα μπλοκ του Jordan για την ιδιοτιμή 1. Συνολικά, υπάρχουν 6 συνδυασμοί.

5.4

- 1 $\|v\| = \sqrt{30}$, $\|3v\| = 3\sqrt{30}$, $\|\frac{1}{5}v\| = \frac{\sqrt{30}}{5}$.
- 2 Να αναπτύξετε το εσωτερικό γινόμενο $\langle u+v, u+v \rangle$ και να παρατηρήσετε ότι $\langle u, v \rangle = 0$.
- 3 Παρατηρείστε ότι $A^T A$ είναι διαγώνιος πίνακας, όπου $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε την Πρόταση 5.4.7.
- 4 $A^T(A^T)^T = A^T A = I_n$.

5

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- 6 Ο 3×3 πίνακας έχει τρεις διακριτές ιδιοτιμές (1, 2, 7) και είναι διαγωνιοποιήσιμος.

- 8** Να παρατηρήσετε ότι $\|(1/2, 1/2)\| \neq 1$, άρα δεν υπάρχει ορθογώνιος A_1 . Για τον A_2 , να δείξετε πρώτα ότι $a = \pm\sqrt{15}/4$.
- 9** Να επιβεβαιώσετε ότι $(-1, 0, i)$ είναι ορθογώνιο ως προς το $(1, 0, i)$. Στη συνέχεια, για να βρείτε διάνυσμα $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, ορθογώνιο προς τα άλλα δύο, να λύσετε το σύστημα $a - ic = 0$, $-a - ic = 0$.
- 11** Να θέσετε $w = h(v)$ και να συμπεράνετε ότι $h(v) = \mathbf{0}$.

5.5

- 1** Αν A είναι ο πίνακας της ϕ ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 , τότε A^T είναι ο πίνακας της ϕ^* ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Αφού

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \phi^*(x, y, z) = (x+y-z, 2x+y+z, y).$$

- 5** Αν $X \in \text{null}(A)$, τότε $AX = 0$ και επομένως $A^TAX = 0$, δηλ. $X \in \text{null}(A^TA)$. Αντίστροφα, αν $X \in \text{null}(A^TA)$, θα δείξουμε ότι $X \in \text{null}(A)$. Έστω $Y = AX$. Τότε

$$\langle Y, Y \rangle = \langle AX, AX \rangle = \langle X, A^TAX \rangle = \langle X, \mathbf{0} \rangle = 0$$

και επομένως $Y = 0$, δηλ. $Y \in \text{null}(A)$. Το τελικό συμπέρασμα για τις βαθμίδες των πινάκων προκύπτει από το Θεώρημα 3.4.3.

- 3** $\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle \implies \langle v, A^TAv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle \implies \langle v, v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$. Αφού $\langle v, v \rangle \neq 0$, έπεται ότι $\lambda = \pm 1$.
- 4** Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5.5, αρκεί $A = A^T$. Έτσι, η πρώτη στήλη του A είναι απόλυτα καθορισμένη. Για παράδειγμα, μπορείτε να επιλέξετε τον A να είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 6** Αρκεί $A = \overline{A^T}$. Για παράδειγμα, μπορείτε να επιλέξετε τον A να είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+3i \\ 1-3i & 0 \end{bmatrix}.$$

6.1

- 1** $\text{proj}_{v_1}(v) = \frac{3a+b-c}{11}v_1$, $\text{proj}_{v_2}(v) = \frac{a-2b+c}{6}v_2$, $\text{proj}_{v_3}(v) = \frac{a+4b+7c}{66}v_3$.

Για τα υπόλοιπα ερωτήματα, παρατηρούμε ότι η βάση B είναι ορθογώνια. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Έκφραση (6.1.2.1). Επομένως, αν $U = \langle v_1, v_2 \rangle$, τότε $\text{proj}_U(v) = \text{proj}_{v_1}(v) + \text{proj}_{v_2}(v)$ και $v = \text{proj}_{\mathbb{R}^3}(v) = \text{proj}_{v_1}(v) + \text{proj}_{v_2}(v) + \text{proj}_{v_3}(v)$.

- 2** $\text{proj}_{v_1} u = \frac{9}{25}v_1$. Για τα υπόλοιπα ερωτήματα, προχωρήστε όπως στην Άσκηση 1.

- 3** Η ορθογώνια βάση που προκύπτει με την εφαρμογή του Αλγορίθμου 6.1.1, παραλλαγή i είναι η $(u_1, (5, 2, -5), (-1, 5, 1))$.
- 4** Να βρείτε **πρώτα** μία ορθογώνια βάση για τον U ή να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο 6.1.2. $\text{proj}_U(v) = \frac{1}{5}(-4, -1, 2, -3)$.
- 5** Να βρείτε **πρώτα** μία ορθογώνια βάση για τον U ή να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο 6.1.2. Αφού $(3, 3, 4) - \text{proj}_U(3, 3, 4) = \frac{1}{3}(2, 2, -2)$, η ζητούμενη απόσταση είναι $(2\sqrt{3})/3$.

6.2

- 1** Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $1, i, 0$. Επομένως ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και υπάρχει D διαγώνιος έτσι ώστε $A = SDS^{-1}$. Συνεπώς $A^{100} = SD^{100}S^{-1}$ και

$$D^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τους πίνακες S και S^{-1} και να πολλαπλασιάσετε τους τρεις αυτούς πίνακες.

- 2** Όπως στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2.3, να χρησιμοποιήσετε ότι

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle T(e_i), \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^n.$$

- 3** $f(x, y) = (-2y + 2, x + 1)$.
- 4** Αφού η μία ιδιοτιμή είναι το 1 και η άλλη ιδιοτιμή έχει απόλυτη τιμή μικρότερη του 1, το σύστημα θα ισορροπήσει.
- 6** $f_1 = e^{3x}, f_2 = e^{3x} - 2e^{2x}, f_3 = 2e^{2x} - e^{3x}$.
- 7** Η καμπύλη είναι υπερβολή.
- 8** $(1/6, 0, 1/3)$.
- 9** Η ζητούμενη ευθεία είναι $y = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}$.

Ευρετήριο Συμβόλων

A^{-1} , 38
 A_{ij} , 48
 $P_A(x)$, 139
 $S(X)$, 76
 $S_{B' \leftarrow B}$, 122
 $V_\lambda(A)$, 133
 $V_\lambda(\phi)$, 133
 $\Gamma(A)$, 83
 $\text{Im} f$, 116
 $\text{Ker} f$, 116
 $\Sigma(A)$, 83
 $[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m]$, 84
 $\dim_{\mathbb{k}}(V)$, 90, 102
 $\text{null}(A)$, 83
 ϕ^* , 163
 $\text{proj}_L(v)$, 171
 $\text{proj}_u(v)$, 171
 $\text{Tr} A$, 36
 $|A|$, 48
 $d(v, u)$, 157
 m_λ , 146
 n_λ , 146
 r_θ , 112
 $\text{proj}_U(v)$, 173

 $C_B(v)$, 97

 \overline{A} , 35
 A^T , 35

 $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$, 6
 $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + a\Gamma_j$, 6
 $\Gamma_i \rightarrow b\Gamma_i$, 6

 $\det A$, 48

 $E_{b,i}$, 41
 $E_{i+a,j}$, 41
 $E_{i \leftrightarrow j}$, 41

 I_n , 34

 $\text{rank}(A)$, 11

Ευρετήριο Όρων

- άθροισμα
 - διανυσμάτων, 68
 - πινάκων, 32
- ένα προς ένα, 84, 118, 135
- ίχνος, 36, 139
- LU-ανάλυση, 61
- βάση
 - ορθογώνια, 158
 - ορθοκανονική, 158
- ελαχιστοτικό, 86
- συστολή, 112
- άθροισμα, 74
- αλγόριθμος του Gauss, 8
- ανάπτυξη οριζουσας, 48
- αναλλοίωτος, 133
- ανισότητα
 - Cauchy-Schwarz, 157
 - τριγωνική, 157
- αντικατοπτρισμός, 113
- αντιμεταθετική ιδιότητα, 69
 - της πρόσθεσης, 32
- απόκλιση, 191
- απόσταση, 157, 172
- αριστερόστροφη περιστροφή, 112
- βάση, 86, 102
 - διατεταγμένη, 86, 103
 - κανονική, 86
 - ορθογώνια, 158
 - ορθοκανονική, 158
- βέλτιστη προσεγγιστική λύση, 191
- βαθμίδα πίνακα, 11
- βαθμωτό γινόμενο, 35, 74
- βαθμωτός πολλαπλασιασμός
 - διανυσμάτων, 68
- γνήσιο, 86
- γραμμικό σύστημα, 1
 - ασύμβατο σύστημα, 1
 - συμβατό σύστημα, 1
- γινόμενο
 - ερμητιανό, 162
 - εσωτερικό, 161
 - πινάκων, 32
 - γραμμικά ανεξάρτητα, 88, 102
 - γραμμικά εξαρτημένα, 87
 - γραμμική συνάρτηση, 107
 - διαγωνιοποιήσιμη, 126
 - γραμμικός συνδυασμός, 5, 76
 - γωνία, 157
 - γραμμή πίνακα, 29
 - διάνυσμα, 67, 74
 - αντίθετο, 69
 - κανονικό, 157
 - ορθογώνιο, 158
 - διάσταση, 90, 102
 - διαφορικές εξισώσεις και ιδιοτιμές, 186
 - διαγώνιος
 - κύρια, 34
 - διαγωνιοποιήσιμη συνάρτηση, 126
 - διαγωνιοποιήσιμος πίνακας, 126
 - διανυσματικός χώρος, 69, 74
 - διανυσματικός χώρος, 100
 - Ερμητιανός, 162
 - πάνω από το \mathbb{k} , 100
 - διαστολή, 112
 - εικόνα, 116
 - ελεύθερη μεταβλητή, 13
 - επί, 84
 - επίπεδο, 20
 - επαγωγή
 - μαθηματική, 11
 - επιμεριστική ιδιότητα, 69
 - του πολλαπλασιασμού
 - αριστερά επιμεριστική ιδιότητα, 34
 - δεξιά επιμεριστική ιδιότητα, 34
 - επιμορφισμός, 118
 - ερμητιανό γινόμενο, 162
 - Ερμητιανός διανυσματικός χώρος, 162
 - εσωτερικό γινόμενο, 161
 - σύνηθες, 156
 - ευθεία, 18, 70
 - ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, 192
 - γινόμενο
 - βαθμωτό, 74
 - γράφημα
 - απλό κατευθυνόμενο, 30

- γραμμική συνάρτηση
 αυτοπροσαρτημένη, 166
 ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμη, 164
- ιδιοδιάνυσμα, 129
 ιδιοχώρος
 γραμμικής συνάρτησης, 133
- ιδιοτιμή, 129
 ιδοχώρος, 133
 ίσοι πίνακες, 29
 ισομετρία, 181
 ισομορφισμός, 118
- καθοδηγητική μονάδα, 7
 κανονική μορφή του Jordan, 154
 κανονικός, 168
 κανονικοποίηση, 158
 κλιμακωτή μορφή γραμμών, 8
 ελαττωμένη, 7, 11
 κλιμακωτή μορφή στηλών
 ελαττωμένη, 12
- λύση γραμμικού συστήματος, 1
- μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, 191
 μέθοδος Cramer, 56
 μήκος, 157
 Μαρκοβιανή αλυσίδα, 185
 μεταφορά, 181
 μηδενικό στοιχείο, 69
 μηδενοχώρος, 83
 μοντέλο, 24
 Leontief, 64
 μοντέλο κυνηγού και λείας, 183
 μπλοκ πινάκων, 54
 μπλοκ του Jordan, 154
- ομογενές σύστημα, 5
 ορίζουσα, 48
 ορθογώνια προβολή, 173
 ορθοκανονική βάση, 158
 ορθοκανονικοποίηση, 175
- πίνακας
 άνω τριγωνικός, 36
 όμοιοι, 124
 ανάστροφος, 35
 αντίθετος, 32
 αντίστροφος, 38, 55
 αντιστρέψιμος, 38
- αντισυμμετρικός, 36
 αυτοπροσαρτημένος, 166
 αυτοπροσαρτημένος, 136
 γεινίασης, 30
 διαγώνιος, 36
 διαγωνιοποιήσιμος, 126, 148
 εισόδου-εξόδου, 64
 ελάσσονας, 48
 επαυξημένος, 2
 Ερμητιανός, 168
 κάτω τριγωνικός, 36
 μετάβασης, 122
 μηδενικός, 31
 μιγαδικός, 162
 μοναδιαίος, 34
 ορθογώνιος, 155
 ορθογώνιος, 162
 προσαρτημένος, 55
 σε κλιμακωτή μορφή γραμμών, 7
 σταθερών όρων, 2
 στοιχειώδης, 40
 στοχαστικός, 185
 συμμετρικός, 36
 συντελεστών, 2
 συντεταγμένων, 97, 103
 συζυγής, 35
 τετραγωνικός, 29
- παράγεται, 101
- πολλαπλότητα
 αλγεβρική, 146
 γεωμετρική, 146
- πολυωνυμική καμπύλη, 24
- προβολή, 113
 πάνω σε διάνυσμα, 171
 πάνω σε ευθεία, 171
- προσαρτημένη γραμμική συνάρτηση, 163
- προσεταιριστική ιδιότητα
 της πρόσθεσης, 32, 69
 του πολλαπλασιασμού, 34
- Πυθαγόρειο Θεώρημα, 158
- πυρήνας, 116
- σχέση γραμμικής εξάρτησης, 87, 102
- στοιχειώδης πράξη γραμμών, 6
- συνάρτηση
 γραμμική, 107
 μηδενική, 108
 ταυτοτική, 108

συντεταγμένες, 67

τετραγωνική μορφή, 188

υποχώρος, 70

 άθροισμα, 81

 διανυσματικός, 75, 101

 μηδενικός, 77

 παράγεται, 76

 τομή, 81

Φασματικό θεώρημα, 165

χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 139

χώρος

 γραμμών, 83

 σηλών, 83

Ευρετήριο Αγγλικής Ορολογίας

- antisymmetric, 36
- associativity, 32
- basis, 86
 - canonical, 86
 - ordered, 86
 - orthogonal, 158
 - orthonormal, 158
- best approximation, 191
- Cramer's method, 56
- column echelon form
 - reduced, 12
- column of constants, 2
- column space, 83
- commutativity, 32
- contraction, 112
- counterclockwise rotation, 112
- determinant, 48
- diagonal, 36
 - main, 34
- diagonalizable, 126
- dilation, 112
- distributivity, 34
- eigenspace, 133
- elementary
 - matrix, 40
- elementary column operation, 12
- elementary row operation, 6
- free variable, 13
- Gaussian elimination algorithm, 8
- graph
 - simple directed, 30
- Hermitian vector space, 162
- homogeneous system, 5
- image, 116
- inner product, 161
- intersection, 81
- invariant, 133
- inverse, 38
- invertible, 38
- isomorphism, 118
- Jordan block, 154
- Jordan canonical form, 154
- kernel, 116
- Leontief's model, 64
- leading one, 7
- line, 70
- line of best fit, 192
- linear combination, 5, 76, 101
- linear dependence equation, 87
- linear system, 1
 - consistent, 1
 - inconsistent, 1
- linear transformation, 107
- linearly independent, 88, 102
- lower triangular, 36
- LU-decomposition, 61
- Markov chain, 185
- mathematical induction, 40
- matrix
 - adjacency, 30
 - adjoint, 55
 - augmented, 2
 - block, 54
 - change of basis, 122
 - coefficient, 2
 - conjugate, 35
 - coordinate, 97
 - elementary, 40
 - identity, 34
 - incidence, 31
 - opposite, 32
 - product, 33
 - self-adjoint, 136
 - similar, 124
 - square, 29
 - sum, 32
 - transpose, 35
- method of least squares, 191
- minor submatrix, 48
- model, 24
- multiplicity
 - algebraic, 146
 - geometric, 146
- norm, 157
- normal, 157
- nullspace, 83
- one to one, 84
- onto, 84
- polynomial curve, 24
- product

scalar, 35, 68
projection, 113
quadratic form, 188
rank, 11
reflection, 113
row echelon form, 7
 reduced, 7
row space, 83
scalar product, 74
solution of a linear system, 1
span, 76
subspace, 70, 75, 101
sum, 74, 81
symmetric, 36
trace, 36
upper triangular, 36
vector, 67, 74
vector space, 74, 100