**Ορισμός.** Ιδιοδιάνυσμα/Ιδιοτιμή πίνακα. Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (πραγμ. πίνακας)
$\bar{u}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ A-ιδιοδιάνυσμα λ-ιδιοτιμής $\overset{ορ.}{\iff}$ $A\bar{u}=\lambda\bar{u}$, $\bar{u}\neq\bar{0}$
($a\bar{u}$ A-ιδιοδιάνυσμα, $a\in\mathbb{R}^*$)

**Πόρισμα.** Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\bar{u}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ A-ιδιοδιάνυσμα λ-ιδιοτιμής

Τότε, $A\bar{u}=\lambda\bar{u}$, $\bar{u}\neq\bar{0}$

$$\iff A\bar{u}\cdot I_n=\lambda\bar{u}\cdot I_n$$
$$\iff A\bar{u}\cdot I_n-\lambda\bar{u}I_n=0_{n\times n}$$
$$\iff A(\bar{u}I_n)-\lambda\bar{u}I_n=0_{n\times n}$$
$$\iff (AI_n)\bar{u}-\lambda I_n\bar{u}=0_{n\times n}$$
$$\iff (AI_n-\lambda I_n)\bar{u}=0_{n\times n}$$
$$\iff (A-\lambda I_n)\bar{u}=0_{n\times n} \iff |A-\lambda I_n|=0$$ (καθώς $\bar{u}\neq 0$ σε ΟΣΓΕ)

**Ορισμός.** Χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε
$\varphi_A$ A-χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\overset{ορ.}{\iff}$
$$\varphi_A=\varphi_A(x):=(-1)^n|A-xI_n|,\ x\in\mathbb{C}.$$

**Πόρισμα.** Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Εάν $\bar{u}$ = A-ιδιοδιάνυσμα λ-ιδιοτιμής, τότε $|A-\lambda I_n|=0$ οπότε $\varphi_A(\lambda)=0$, δηλ. λ $\varphi_A$-ρίζα, όπου $\varphi_A$ A-χαρακτ. πολυώνυμο.
Οι ρίζες του χ. π. καλούνται A-ιδιοτιμές, δηλ. $\lambda\in\mathbb{R}$ A-ιδιοτιμή τότε $|A-\lambda I_n|=0$.

**Παράδειγμα.** Έστω $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε
$$\varphi_A(\lambda)=|A-\lambda I_2|=\det\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}-\lambda I_2\right)$$
$$=\left|\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta\\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}=(\alpha-\lambda)(\delta-\lambda)-\beta\gamma.$$
$$\Rightarrow \varphi_A(\lambda)=\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda+\alpha\delta-\beta\gamma=\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+|A|,\ \lambda\in\mathbb{C}$$

Έστω λ A-ιδιοτιμή. Τότε $\varphi_A(\lambda)=0$, δηλ. $\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+|A|=0$.
Εάν $\bar{u}$ λ-ιδιοδιάνυσμα (δηλ. $\bar{u}$ A-ιδιοδιάνυσμα λ-ιδιοτιμής), τότε
$A\bar{u}=\lambda\bar{u}$, δηλ. $(A-\lambda I_n)\cdot\bar{u}=\bar{0}$ με $\bar{u}\neq\bar{0}$, οπότε $|A-\lambda I_n|=0$.
Το ΟΣΓΕ $(A-\lambda I_n)\cdot\bar{u}=\bar{0}$ δίνει ως λύση τα ιδιοδιανύσματα της λ ιδιοτιμής.

Για τη χαρακτηριστική εξίσωση ισχύει

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0 \,, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

οπότε για $p_A(\lambda)=0$ λαμβάνουμε $n$ ιδιοτιμές, με $\lambda \in \mathbb{C}$ (πραγμ. ή μιγαδικά) καθώς

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k} = 0 \,, \quad \lambda\in\mathbb{C} \,, \text{ όπου}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ οι διακεκριμένες (διαφορετικές) ιδιοτιμές και

$r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ οι αλγεβρικές πολλαπλότητες αυτών με $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

**Ορισμός.** Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ $A$-ιδιοτιμή, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$E$ $\lambda$-ιδιοχώρος (ιδιοχώρος $\lambda$-ιδιοτιμής) $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$

$$E = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,/\, \bar{u} \text{ } A\text{-ιδιοδιάνυσμα } \lambda\text{-ιδιοτιμής}\}$$

$$= \{\bar{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \,/\, A\bar{u} = \lambda\bar{u}\}.$$

**Ορισμός.** Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$f$ $A$-γραμμικός μετασχηματισμός $\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow}$ $f: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, όπου

$f(\bar{x}) = A\bar{x}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, δηλ. $\mathbb{R}^{n\times 1} \ni \bar{x} \overset{f}{\longmapsto} \bar{x}' = A\bar{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Εάν $\bar{u}$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής, τότε $f(\bar{u}) = A\bar{u} = \lambda\bar{u}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, δηλ. το $u$ απεικονίζεται στο πολλαπλάσιό του $\lambda\bar{u}$. με $\lambda$ γενικά $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ορισμός. Έστω $E$ λ-ιδιοχώρος, λ A-ιδιοτιμή, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$r$ λ-γεωμετρική πολλαπλότητα $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ $r = \dim E$

Ισχύει $r < p \in \mathbb{N}$, όπου $p$ λ-αλγεβρική πολλαπλότητα.

Πρόταση. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{v}_i$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_i$-ιδιοτιμής, $i = 1, 2, \dots k \leq n$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \dots \lambda_k$. Τότε $\{\bar{v}_i\}_{i=1,2,\dots k} \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτ. διανυσμάτων.

Έστω $\bar{v}_i$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_i$-ιδιοτιμής, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Εάν $\{\bar{v}_i\} \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$ σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\iff$ $p_i = r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (αλγεβρικές πολλαπλότητες ισούνται με τις γεωμετρικές.

Ορισμός. Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\sigma(A) \text{ Α-φάσμα } \overset{\text{ορ.}}{\iff} \sigma(A)=\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots,n}, \text{ όπου } \lambda_i \text{ Α-ιδιοτιμη}, i=1,2,\dots,n.$$

Δηλ. φάσμα ενός πίνακα είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του.

Σημείωση. Έστω $\lambda=a+bi\in\mathbb{C}$ μιγαδική Α-ιδιοτιμή του $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε $\bar{\lambda}=a-bi\in\mathbb{C}$ μιγαδική Α-ιδιοτιμή.

Έστω $\bar{u}$ $\lambda$-ιδιοδιάνυσμα, $\bar{u}=(u_i)^T\in\mathbb{C}^{n\times 1}$. Τότε εάν $\bar{v}$ $\bar{\lambda}$-ιδιοδιάνυσμα, $\bar{v}=(v_i)^T\in\mathbb{C}^{n\times 1}$, τότε $v_i=\bar{u}_i$, $i=1,2,\dots,n$.

Σημείωση. Εάν $p_A$ Α-χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλ.

$$p_A(\lambda)=(-1)^n|A-\lambda I_n|=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+b\lambda+b_0,\ \lambda\in\mathbb{C},$$

τότε

$$p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k},\ \text{με}$$

$$|A|=\lambda_1^{r_1}\cdot\lambda_2^{r_2}\cdots\lambda_k^{r_k}=(-1)^n b_0.$$

Σημείωση. Ισοδύναμες προτάσεις. Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

- $|A|=0$.
- $\lambda=0$ Α-ιδιοτιμη.
- $b_0=0$.
- $A$ ιδιάζον πίνακας.

Ιδιότητες. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) $tr(A) = r_1\cdot\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \dots + r_k\lambda_k = \sum_{i=1}^{k} r_i\cdot\lambda_i$.

(β) $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

(γ) Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_U \cup \mathbb{R}^{3\times 3}_L$. Έστω $A = (a_{ij})_{n\times n}$

Έστω $\lambda$ Α-ιδιοτιμή. Τότε $\lambda = a_{kk}$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$

(δ) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη-ιδιάζον.

Έστω $\bar u$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής. Τότε $\bar u$ $A^{-1}$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής.

(ε) Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $\bar u$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής και $\bar u$ Β-ιδιοδιάνυσμα $\mu$-ιδιοτιμής, τότε $\bar u$ $(A+B)$-ιδιοδιάνυσμα $(\lambda+\mu)$-ιδιοτιμής και $\bar u$ $AB$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda\cdot\mu$-ιδιοτιμής, δηλ, εάν

$A\bar u = \lambda \bar u$ και $B\bar u = \mu \bar u$, τότε $(A+B)\bar u = (\lambda+\mu)\bar u$ και $AB\bar u = \lambda\mu\bar u$.

Γενικότερα, εάν $\bar u$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής, τότε $\bar u$ $A^k$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda^k$-ιδιοτιμής.

(στ) Έστω $\bar u$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής, τότε και $\bar u$ Α-ιδιοδιάνυσμα $a\lambda$-ιδιοτιμής, $a \in \mathbb{R}^*$. ($A\bar u = \lambda \bar u \Leftrightarrow A(a\bar u) = a\bar u$, $a \in \mathbb{R}$).

(ζ) Έστω $\bar u_i$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής, $i = 1,2$, τότε $a\bar u_1 + b\bar u_2$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda$-ιδιοτιμής, $a,b \in \mathbb{R}$.

Δηλ. $A\bar u_1 = \lambda \bar u_1$ και $A\bar u_2 = \lambda \bar u_2 \Rightarrow A(a\bar u_1 + b\bar u_2) = \lambda(a\bar u_1 + b\bar u_2)$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A-\lambda I_2| = \begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$ ή

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3 + 2 = (\lambda-1)^1(\lambda-2)^1 = 0$. Άρα

$\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$ (απλές ιδιοτιμές).

(Α) Έστω $\bar{u}_1 = (x,y)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα 1-ιδιοτιμής, τότε

$(A - 1\cdot I_2)\bar{u} = \bar{0}$, δηλ. $\begin{pmatrix}0-1 & -1\\ 2 & 3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \bar{0}$, ή

$\left\{\begin{array}{l} -x-y=0\\ 2x+2y=0\end{array}\right\} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x,\ x\in\mathbb{R}$, και άρα

$\bar{u}_1 = (x,y)^T = (x,-x) = x(1,-1)^T$, $x\in\mathbb{R}^*$

(Β) Έστω $\bar{u}_2 = (x,y)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα 2-ιδιοτιμής, τότε

$(A - 2I_2)\bar{u}_2 = \bar{0}$, δηλ. $\begin{pmatrix}0-2 & -1\\ 2 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \bar{0}$, ή

$\left\{\begin{array}{l} -2x-y=0\\ 2x+y=0\end{array}\right\} \Rightarrow y = y(x) = -2x,\ x\in\mathbb{R}$ και άρα

$\bar{u}_2 = (x,y)^T = (x,-2x) = x(1,-2)^T$, $x\in\mathbb{R}^*$.

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_2|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή $\Leftrightarrow p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$, δηλ. $\lambda = \pm i$, ή

$\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$ (απλές μιγαδικές ιδιοτιμές).

(A) Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $i$-ιδιοτιμής, τότε

$$(A - iI_2)\bar{u}_1 = \bar{0}, \text{ δηλ } \begin{pmatrix} 0-i & -1 \\ 1 & 0-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -ix - y = 0 \Rightarrow i(-ix-y) = i \cdot 0 = 0 \Rightarrow x - iy = 0 \\ x - iy = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$x = x(y) = iy$ και άρα

$$\bar{u}_1 = (x,y)^T = (iy, y)^T = y(i,1), \ y \in \mathbb{R}^*$$

(B) Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $(-i)$-ιδιοτιμής, τότε

$$(A + iI_2)\bar{u}_2 = \bar{0}, \text{ δηλ } \begin{pmatrix} 0+i & -1 \\ 1 & 0+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = x(y) = -iy \text{ και άρα } \bar{u}_2 = y(-i,1)^T, \ y \in \mathbb{R}^*.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Τότε $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(\lambda-6) - 2\cdot 4 = \lambda^2 - 5\lambda - 14, \lambda\in\mathbb{R}.$

ή $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (trA)\lambda + |A| = \lambda^2 - (-1+6)\lambda + (-1)6 - 2\cdot 4 = \lambda^2 - 5\lambda - 14, \lambda\in\mathbb{R}.$

Έστω $\bar{u}$ $\lambda$-ιδιοδιάνυσμα όπου $\lambda$ $A$-ιδιοτιμή, δηλ. $p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

Τότε, $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{-2, 7\}$

και $A\bar{u} - \lambda\bar{u} = \bar{0} \Rightarrow (A - \lambda I_2)\cdot\bar{u} = \bar{0}, \ \bar{u} \neq \bar{0}$.

(A) Έστω $\lambda_1 := -2$, $\bar{u}_1 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $\bar{u}_1$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_1$.

Τότε $(A - (-2)I_2)\bar{u}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-(-2) & 4 \\ 2 & 6-(-2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ΟΣΓΕ).

$\Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 4y = 0 \Rightarrow x = -4y, \ y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ y\in\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \bar{u}_1 \in L\{(-4,1)^T\}$ (μονοδιάστατος ιδιοχώρος)

(B) Έστω $\lambda_2 := 7$, $\bar{u}_2 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $\bar{u}_2$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2$-ιδιοτιμ.)

Τότε $(A - 7I_2)\cdot\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1-7 & 4 \\ 2 & 8-7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ΟΣΓΕ)

$\Rightarrow \begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x, \ x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x\in\mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \bar{u}_2 \in L\{(1,2)^T\}$ (μονοδιάστατος ιδιοχώρος).

Σημείωση: Για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων επιλύουμε τα ΟΣΓΕ $2\times 2$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης (για ευκολία).

Για $3\times 3$ και πάνω κάνουμε χρήση της μεθόδου Gauss ή των υποσυστημάτων με τη μέθοδο Cramer.

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}_{2\times2}$

Έστω $p_A(\lambda):=|A-\lambda I_2| = \left|\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right|$

$= \begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&1-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)-2 = \lambda^2-5\lambda+4$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (χ.π.)

Εναλλακτικά, $p_A(\lambda)=\lambda^2-(trA)\lambda+|A| = \lambda^2-(3+2)\lambda+(3\cdot2-1\cdot2)$
$= \lambda^2-5\lambda+4$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έστω $p_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0$ (χ. εξ.)
$\Rightarrow \lambda\in\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{1,4\}$ (ιδιοτιμές).

(Α) $\lambda_1=1$ και $\bar u_1=\binom{x}{y}$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1$-ιδιοτιμής.
Έχουμε τότε, $(A-\lambda_1 I_2)\cdot\bar u_1=\bar 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}3-1&2\\1&2-1\end{pmatrix}\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$

$\Rightarrow \begin{cases}2x+2y=0\\x+y=0\end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\bar u_1=\binom{x}{y}=\binom{x}{-x}=x\binom{1}{-1}$, $x\in\mathbb{R}$
οπότε $\bar u_1\in V_1:=\{\alpha x\}_{\alpha\in\mathbb{R}}=L\{\bar u_1\}$ ($V_1$ μονοδιάστατος ιδιοχώρος της $\lambda_1=1$).

(Β) $\lambda_2=4$ και $\bar u_2:=\binom{x}{y}$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2$-ιδιοτιμής.
Έχουμε τότε, $(A-\lambda_2 I_2)\cdot\bar u_2=\bar 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}3-4&2\\1&2-4\end{pmatrix}\cdot\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$
$\Rightarrow \begin{cases}-x+2y=0\\x-2y=0\end{cases}$ $x=2y,\ y\in\mathbb{R}$ (επίλυση ΟΣΓΕ με αντικατάσταση).
$\Rightarrow \bar u_2=\binom{x}{y}=\binom{2y}{y}=y\binom{2}{1}$, $y\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$
Άρα $\bar u_2\in V_2:=\{\alpha(2,1)^T\}_{\alpha\in\mathbb{R}}=L\{\alpha(2,1)^T\}$ ($V_2$ μονοδιάστατος ιδιοχώρος της $\lambda_2$-ιδιοτ.)

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Έχουμε $p_A(\lambda) := |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(3-\lambda) - (-2)4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5,\ \lambda \in \mathbb{C}$

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$

με $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$, όταν $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$

και άρα $\lambda_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1 \cdot 5} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16} = 1 \pm \sqrt{16(-1)}$

$= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{16}\sqrt{-1} = 1 \pm 2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Άρα $\lambda_1 := 1 + 2i,\ \lambda_2 := 1 - 2i\ (= \bar{\lambda}_1)$.

(Α) Έστω $\lambda = \lambda_1 = 1 + 2i$, $\bar{u}_1 := \binom{x}{y} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Άρα $(A - \lambda_1 I_2)\bar{u}_1 = \bar{0}$, δηλ.

$$\begin{pmatrix} -1-(1+2i) & 4 \\ -2 & 3-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2-2i & 4 \\ -2 & 2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2(1+i)x + 4y = 0 \\ -2x + 2(1-i)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+i)x - 2y = 0 \Rightarrow x = \frac{2y}{1+i} \ (1) \ \text{(αντικατάσ.)} \\ -x + (1-i)y = 0 \Rightarrow x = (1-i)y \ (2) \end{cases}$$

αλλά

$\frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1} = \frac{\overline{1+i}}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2}$, καθώς $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},\ z \in \mathbb{C}$

και συνεπώς, $(1) \Rightarrow \frac{2y}{1+i} = 2y\frac{1-i}{2} = y(1-i)$, δηλ. $(2) = (1)$,

οπότε, αναγόμαστε σε μόνο μία εξίσωση, την $(1+i)x = 2y$, $x, y \in \mathbb{C}$

και έτσι $\bar{u}_1 = \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1+i}{2}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{C}$.

Άρα $\bar{u}_1 \in \left\{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}} = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}\right\}\right) = V_1$ $\lambda_1$-ιδιόχωρος, $\dim V_1 = 1$.

Εναλλακτικά, έστω $y:=1$, οπότε από (1) κ (2) έχουμε,

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y}{1+i} = \dfrac{2}{1+i} \quad (=1-i), \\ x = (1-i)y = 1-i \end{cases}$$

δηλ. $\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ (ειδική λύση)

Άρα $\bar{u}_1 = \alpha\bar{u}_0 = \alpha(1-i,1)^T, \alpha\in\mathbb{C} \Rightarrow \bar{u}_1 \in \left\{\alpha\begin{pmatrix} 1-i \\ 1\end{pmatrix}\right\}_{\alpha\in\mathbb{C}} =: V_1$ (μονοδιάστ. ιδιοχώρος)

ή $\bar{u}_1 = \alpha\begin{pmatrix} \frac{2}{1+i} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{C}$

Σημείωση. Θυμίζουμε ότι για να την εύρεση μίας συγκεκριμένης λύσης ενός ΟΣΓΕ, θέτουμε έναν από τους αγνώστους ίσο με 1 και επιλύουμε ένα υπο-σύστημα $(n-1)\times(n-1)$ ως προς τους υπόλοιπους $(n-1)$-αγνώστους, με αντικατάσταση ή τη μέθοδο των οριζουσών (Cramer). Η εναπομένουσα εξίσωση θα πρέπει να επαληθεύεται από τη λύση του υπο-συστήματος.

Στην περίπτωσή μας. Θέτουμε με $y:=1$ και επιλύσαμε ένα υπο-σύστημα $(n-1)\times(n-1)$, δηλ. $1\times 1$, καθώς $n=2$, δηλ. λύνουμε μία εξίσωση, π.χ. την (1), οπότε $x = 2/(1+i)$, δηλ. $\bar{u}_0 = (2/(1+i), 1)^T$. Εάν επιλέγαμε για επίλυση την (2), τότε $x = 1-i$, δηλ. $\bar{u}_0 = (1-i, 1)^T$. Επομένως, $\bar{u}_1 = \alpha\bar{u}_0$, $\alpha\in\mathbb{C}$, δηλ. $\bar{u}_1 \in \{\alpha\bar{u}_0\}_{\alpha\in\mathbb{C}} =: V_1$ (μονοδ. ιδιοχώρος).

(B) Έστω $\lambda := \lambda_2 = 1-2i$, τα A-ιδιοδιανύσματα $\lambda_2$-ιδιοχώρου.

$(A-\lambda_2 I_2)\bar{u}_2 = \bar{0}\ (=0_{2\times 1}) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-(1-2i) & 4 \\ -2 & 3-(1-2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2+2i & 4 \\ -2 & 2+2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(-1+i)x + 4y = 0, \\ -2x + 2(1+i)y = 0. \end{cases}$ Έστω $y:=1$. Τότε

$\begin{cases} (-1+i)x + 2 = 0 \\ -x + (1+i)\cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2/(-1+i)$, οπότε $\bar{u}_0 := (2/(1-i), 1)^T$.

και τελικά $\bar{u}_2 = \alpha\bar{u}_0$, $\alpha\in\mathbb{C}$, δηλ. $\bar{u}_2 \in V_2 := \{\alpha\bar{u}_0\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ (μονοδιάστ. ιδιοχώρος της $\lambda_2$-ιδιοτιμής).

Παράδειγμα. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Έστω $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)+3, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή $\iff p_A(\lambda)=0 \iff \lambda(\lambda-3)=-3$

$\iff \lambda^2-3\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a\gamma}}{2a} = \frac{3}{2}\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 3}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}\pm\sqrt{9-12} = \frac{3}{2}\pm\sqrt{-3} = \frac{3}{2}\pm\sqrt{(-1)\cdot 3}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}\pm(\sqrt{-1})3 = \frac{3}{2}\pm i\cdot 3 = \frac{3}{2}\pm 3i \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow \lambda = \left\{\frac{3}{2}\pm 3i\right\}$

(A) Έστω $\lambda_1 := \frac{3}{2}+3i$, $u_1 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1$-ιδιοτιμής.

Έχουμε $(A-\lambda_1 I_2)\bar{u}_1 = \bar{0} \; (= O_{2\times 1})$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-\frac{3}{2}-3i & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2}-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\frac{3}{2}-3i)x + y \\ -x \quad -(\frac{3}{2}+3i)y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\frac{3}{2}-3i)x + y = 0 \\ -x - 3(\frac{1}{2}+i)y = 0 \Rightarrow x = -3(\frac{1}{2}-i)y \quad (1) \end{cases} \Rightarrow -9(\frac{1}{2}-i)^2 + y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 9\,(\frac{1}{4} - i + 1) = -9(-\frac{5}{4}+i) \\ x = -3(\frac{1}{2}-i)y \quad (2) \end{cases} \Rightarrow y = 9(\frac{5}{4}-i).$ (αντικατάσταση)

Άρα (1) $\Rightarrow \bar{u}_1 = (x,y)^T := (-3(\frac{1}{2}-i)y,\, y)^T = y(-3(\frac{1}{2}-i),\, 1)^T,\; y\in\mathbb{C}$, δηλ.

$\bar{u}_1 = \alpha(-3(1/2-i), 1)^T,\; \alpha\in\mathbb{C} \Rightarrow \bar{u}_1 \in V_1 := \{\alpha(-\frac{3}{2}-i)\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ (γραμμ. ιδιοχ.)

Εναλλακτικά, έστω $y := 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = -3(1/2-i) \Rightarrow \bar{u}_0 := (x,y)^T = (-3(\frac{1}{2}-i), 1)^T$

οπότε $\bar{u}_1 = \alpha\bar{u}_0 \in V_1 := \{\alpha\bar{u}_0\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ A-ιδιοχώρος $\lambda_1$-ιδιοτιμής.

(Β) Έστω $\lambda_2 := \frac{3}{2} - 3i$, $\bar{u}_2 := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2$-ιδιοτιμής.

Έχουμε $(A - \lambda_2 I_2)\bar{u}_2 = \bar{0} \ (= O_{2\times 1})$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-\frac{3}{2}+3i & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2}+3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\frac{3}{2}+3i)x + y = 0 \\ -x + 3(-\frac{1}{2}+i)y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(\frac{1}{2}+i)x + y = 0 \quad (1) \\ -x - 3(\frac{1}{2}-i)y = 0 \Rightarrow x = -3(\frac{1}{2}+i)y \quad (2) \end{cases}$$ (αντικαθιστάται)

και άρα $\bar{u}_2 = (x,y)^T = (-3(\frac{1}{2}+i), y)^T = y(-3(\frac{1}{2}+i), 1)^T$, $y \in \mathbb{C}$, δηλ.

$\bar{u}_2 = a(-3(\frac{1}{2}+i), 1)^T$, $a \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{u}_2 \in V_2 := \{a(-3(\frac{1}{2}+i))^T\}_{a\in\mathbb{C}}$ (μονοδ. ιδιοχ.)

Εναλλακτικά, έστω $y := 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3(\frac{1}{2}+i)x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3(\frac{1}{2}+i)}$,

και άρα, $\bar{u}_0 := (\frac{-1}{3(\frac{1}{2}+i)}, 1)^T$, ή

μέσω της (2), τότε $x = -3(\frac{1}{2}+i)\cdot 1 = -3(\frac{1}{2}+i)$, και άρα $\bar{u}_0 := (-3(\frac{1}{2}+i), 1)^T$.

Έτσι $\bar{u}_2 = a\bar{u}_0$, $a \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{u}_2 \in V_2 := \{a\bar{u}_0\}_{a\in\mathbb{C}}$ A-ιδιοχώρος $\lambda_2$-ιδιοτιμής.

;)

Ασκήσεις.

$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\Delta=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma T=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Πόρισμα. Έστω $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Τότε $P_A(\lambda)=|A-\lambda I_3|=|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)$

$$=-\lambda^3+(trA)\lambda^2-(tr\,AdjA)\lambda+|A|$$

$$=-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2$$
$$-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda+|A|$$

όπου $A_{ii}=(-1)^{2i}a_{ii}|M_{ii}|$, $i=1,2,3$.

Έστω $\bar{u}$ A-ιδιοδιάνυσμα λ-ιδιοτιμής $\Rightarrow (A-\lambda I_3)\bar{u}=\bar{o}$, $\bar{u}=(x,y,z)^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \bar{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Η επίλυση του παραπάνω ΟΣΓΕ (αόριστο ΣΓΕ) μπορεί να γίνει:

(α) Με αντικατάσταση

(β) Με τον επαυξημένο πίνακα Gauss (μέθοδος Gauss)

(γ) Μέθοδο Cramer θέτοντας $z:=1$ ή $y:=1$ ή $x:=1$ οπότε οι παραμετρικές λύσεις του αόριστου ΟΣΓΕ δίνονται από $\alpha\bar{u}_0$, όπου $\bar{u}_0$ ένα ιδιοδιάνυσμα.

(δ) Με υπο-σύστημα Cramer 2x2.

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 4] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

$$= -(\lambda-5)^2(\lambda-1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή $\Rightarrow p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda-5)^2(\lambda-1) = 0$, οπότε

$\lambda_1 = 1$ (απλή ιδιοτιμή) και $\lambda_2 = 5$ (διπλή ιδιοτιμή).

(A) Έστω $\bar{u}_1 = (x,y,z)^T$ A-ιδιοάνυσμα 1-ιδιοτιμής, τότε

$$(A - 1 I_3)\bar{u}_1 = \bar{0}, \text{ ή } \begin{pmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\left.\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x = y,\ x,y \in \mathbb{R} \quad \text{και άρα}$$

$$\bar{u}_1 = (x,y,z)^T = (x,x,0)^T = x(1,1,0)^T, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Άρα $E_1$ $\lambda_1$-ιδιοχώρος είναι $E_1 = L(\{\alpha(1,1,0)^T\})$ με $\dim E_1 = r_1 = 1$.

(B) Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα 5-ιδιοτιμής, τότε

$$(A-5I_3)\bar{u}_2=\bar{0}, \text{ ή } \begin{pmatrix}3-5 & -2 & 0\\ -2 & 3-5 & 0\\ 0 & 0 & 5-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\left\{\begin{matrix}-2x-2y=0\\ -2x-2y=0\\ 0z=0,\ z\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=y(x)=-x,\ x\in\mathbb{R} \text{ και άρα}$$

$$\bar{u}_2=(x,y,z)^T=(x,-x,z)^T=\begin{pmatrix}x\\ -x\\ +z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

με $x,z\in\mathbb{R}$, $|x|+|z|\neq 0$.

Άρα $E_2$ $\lambda_2$-ιδιοχώρος είναι $E_2=L(\{(1,1,0)^T,(0,0,1)^T\})$ και

$\dim E_2=r_2=2$, καθώς $\{(1,1,0)^T,(0,0,1)\}$ σύνολο γραμμ. ανεξ. διαν.

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 18 \\ -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3$$

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = -1$ (τριπλή ιδιοτιμή).

Έστω $\bar{u} = (x,y,z)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα $(-1)$-ιδιοτιμής, τότε

$(A-(-1)I_3)\bar{u} = \bar{0}$, δηλ. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$, ή

$\begin{cases} -3y - 9z = 0 \\ 6y + 18z = \bar{0} \end{cases}$, $x, z \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\bar{u} = (x,y,z)^T = (x,-3z,z)^T = \begin{pmatrix} x \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x, z \in \mathbb{R}$, $|x| + |z| \neq 0$.

Άρα $E$ = $\lambda$-ιδιοχώρος είναι $E = L(\{(1,0,0)^T, (0,-3,1)^T\})$ με

$\dim E = 2 < r = 3$ (γεωμετρική πολ. $<$ αλγεβρική πολλαπλ.)

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Έχουμε $p_A(\lambda) := |A - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Άρα $\lambda$ A-ιδιοτιμή $\Leftrightarrow \varphi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lambda \in \{-1, 1, 2\}$.

(A) Έστω $\lambda_1 := 2$, με ιδιοδιάνυσμα $\bar{u}_1 := (x, y, z)^T$.

Έχουμε $(A - \lambda_1 I_3) \cdot \bar{u}_1 = \bar{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \; (= O_{3\times 1})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x - y + 0z = 0 \\ 0x + 0y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ -y = 0 \\ -z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = z = 0, \; x \in \mathbb{R}$$

(με αντικατάστ.)

Άρα $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T = (x, 0, 0)^T = x(1, 0, 0)^T \in L\{(1,0,0)^T\} = \{a(1,0,0)^T\}_{a \in \mathbb{R}}$

Εναλλακτικά, έστω $x := 1$ ($y := 1$; $z := 1$, άτοπο). Άρα $\bar{u}_1 = (1, 0, 0)^T$ (ειδική λύση)

Άρα $V_1 = \{a\bar{u}_1\}_{a \in \mathbb{R}}$ A-ιδιοχώρος $\lambda_1$-ιδιοτιμής (μονοδιάστατος ιδιοχώρος).

(Β) Έστω $\lambda_2 := 1$ με $\bar{u}_2 = (x,y,z)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2$-ιδιοτιμής.

Άρα $\bar{u}_2 = (A - \lambda_2 I_3)\bar{u}_2 = \bar{0} \; (= 0_{3\times1})$

$$= \begin{pmatrix} 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \; (= 0_{3\times1})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 0 = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = 0, \; y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_2 = (x,y,z)^T = (0,y,0) = y(0,1,0)^T, \; y \in \mathbb{R} \quad (\text{αντιμετ.})$$

Άρα $V_2 := \{a\bar{u}_2\}_{a\in\mathbb{R}}$ A-ιδιοχώρος $\lambda_2$-ιδιοτιμής

(Γ) Έστω $\lambda_3 := -1$, $\bar{u}_3$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_3$-ιδιοτιμής

Άρα, $(A - \lambda_3 I_3)\bar{u}_3 = \bar{0} \; (= 0_{3\times1})$

$$= \begin{pmatrix} 0-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 2y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, \; z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_3 = (x,y,z)^T = (0,0,z)^T, \; z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_3 = z(0,0,1)^T, \; z \in \mathbb{R}. \quad (\text{αντιμετ.})$$

Άρα $V_3 := \{a\bar{u}_3\}_{a\in\mathbb{R}} = \{a(0,0,1)^T\}$ A-ιδιοχώρος $\lambda_3$-ιδιοτιμής

Παράδειγμα. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Έστω $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (χαρακτ. πολυώνυμο)

Άρα $\lambda$ A-ιδιοτιμή όταν $|A - \lambda I_3| = 0$, ή

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 2\}.$$

(A) Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := -2$ ιδιοτιμής, δηλ.

$$(A - (-2) I_3)\bar{u}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Άρα ΟΣΓΕ $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ 4y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ y = 0 \end{array} \right.$

οπότε $\bar{u}_1 = (x,y,z)^T = (x, 0, -x)^T = x(1, 0, -1)^T,\ x \in \mathbb{R}^*$

(B) Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 2$ ιδιοτιμής, δηλ.

$$(A - 2I_3) = \bar{u}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Άρα ΟΣΓΕ $-2x + 2z = 0,\ 2x - 2z = 0$, δηλ. $z = x,\ y \in \mathbb{R}$

Επομένως $\bar{u}_2 = (x,y,z)^T = (x,y,x)^T = x(1,0,1)^T + y(0,1,0)^T$,
με $x,y \in \mathbb{R}$ με $|x|+|y| \neq 0$. (δι-παραμετρικό ιδιοδιάνυσμα).

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\varphi_A = p_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -\lambda & 4 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$- (-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-2\lambda) + 4(2-\lambda) + \lambda(\lambda^2-\lambda-2) = \lambda^3-\lambda^2-8\lambda+12$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda+3), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Άρα οι A-ιδιοτιμές είναι $p(\lambda)=0$, δηλ $\lambda_1 = 2$ (με αλγ. πολλαπλ. 2) και $\lambda_2 = -3$ (με αλγεβρ. πολλαπλότητα 1).

Εναλλακτικά,

$$p_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_{r_3 := r_3 - r_1} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

κ.α. με $\Sigma_3 := \Sigma_3 + \Sigma_1$, $p_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \\ 2 & -\lambda & 6 \\ \lambda-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -\lambda & 6 \end{vmatrix}$

και άρα

$$p_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-6) = (\lambda-2)(\lambda+3),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = (-1)^3\cdot \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad \Sigma_3 := \Sigma_3 - \Sigma_2$$

$$= - \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & \lambda-8 \\ 2 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-8)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} \quad r_3 := r_3 + r_2$$

$$= -(\lambda-8)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-8)\cdot 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-8)(\lambda^2-7\lambda-8) = (\lambda-8)^2(\lambda+1),\ \lambda\in\mathbb{C}$$

Άρα οι A-ιδιοτιμές είναι $p(\lambda)=0$, δηλ. $\lambda_1 = 8$ (διπλή), $\lambda_2 = -1$ (απλή).

Παραδείγματα. $A = \begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&2\\2&1&1\end{pmatrix}$

Εύρεση ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων.

Έστω $p_A(\lambda) = |A-\lambda I_3| \begin{vmatrix}1-\lambda&1&2\\2&3-\lambda&2\\2&1&1-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}1-\lambda&1\\2&3-\lambda\\2&1\end{matrix} = (\lambda^2-1)(5-\lambda), \lambda\in\mathbb{R},$

ή $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + (trA)\lambda^2 - tr(|M_{ij}|)\lambda + |A|$

$= -\lambda^3 + (1+3+1)\lambda^2 - (|M_{11}|+|M_{22}|+|M_{33}|)\lambda - 5$

$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - (1-3+1)\lambda + (-5)$

$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - (-1)\lambda - 5$

καθώς $|M_{11}| = \begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix} = 3-2 = 1$ $\quad |M_{22}| = \begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} = 1-4 = -3$

και $|M_{33}| = \begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix} = 3-2 = 1,$

και άρα $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5$

$= -\lambda^3 + \lambda + 5\lambda^2 - 5$

$= \lambda(-\lambda^2+1) + 5(\lambda^2-1)$

$= (\lambda^2-1)(5-\lambda), \ \lambda\in\mathbb{R}.$

Έστω $p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda^2-1)(5-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda\in\{-1,1,5\}$ (ιδιοδιανύσματα)

(A) Έστω $\lambda_1 := -1$, $\bar{u}_1 := (\alpha,\beta,\gamma)^T$ A-ιδιοδιάνυσμα $\bar{u}$-ιδιοδιανύσματος.

$\Rightarrow (A-\lambda_1 I_2)\bar{u}_1 = \bar{0}$

$= \begin{pmatrix}1-(-1)&1&2\\2&3-(-1)&2\\2&1&1-(-1)\end{pmatrix}\cdot\bar{u}_1 = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&1&2\\2&4&2\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix} = \bar{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+2\gamma=0 \\ 2a+4b+2\gamma=0 \\ 2a+b+2\gamma=0 \end{cases} \quad (\text{ΟΣΓΕ})$$

Έστω $\gamma:=1$. Τότε $\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+4b=-2 \end{cases} \Rightarrow b=-2-a \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης καθώς έχουμε $2\times 2$ ΣΓΕ (εναλλακτικά εφαρμόζουμε μέθοδο Cramer).

Άρα $\bar{u}_1=\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ιδιοδιάνυσμα $(-1)$-ιδιοτιμής, για $\gamma:=1$).

οπότε $\bar{u}_1 \in V_1 := \{a\bar{u}\}_{a\in\mathbb{R}}$ (μονοδιάστατος ιδιοχώρος $\lambda_1=-1$ ιδιοτιμής του $A$).

(Β) Έστω $\lambda_2:=1$, $\bar{u}_2$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1$-ιδιοτιμής, $\bar{u}_2:=(a,b,\gamma)^T$.

Άρα $\bar{u}_2=(A-\lambda_2 I_3)=\bar{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 2 & 1 & 1-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix}=\bar{0} \Rightarrow \begin{cases} b+2\gamma=0 \\ 2a+2b+2\gamma=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \quad (\text{ΟΣΓΕ})$$

Έστω $\gamma:=1$. Τότε $\begin{cases} b=-2 \\ a+b=-1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ (μέθοδος αντικατ.)

Άρα $\bar{u}_2=(1,-2,1)^T$ ($A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1=1$ ιδιοτιμής για $\gamma:=1$)

οπότε $\bar{u}_2 \in V_2 := L\{\bar{u}_2\}=\{a\bar{u}_2\}_{a\in\mathbb{R}}$ (μονοδιάστατος ιδιοχώρος $\lambda_2=1$ ιδιοτιμής).

(Γ) Έστω $\lambda_3:=5$, $\bar{u}_3=(a,b,\gamma)^T$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_3$-ιδιοτιμής.

Άρα $\bar{u}_3=(A-\lambda_3 I_3)\cdot\bar{u}_3=\bar{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-5 & 1 & 2 \\ 2 & 3-5 & 2 \\ 2 & 1 & 1-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix}=\bar{0}=\begin{cases} -4a+b+2\gamma=0 \\ 2a-2b+2\gamma=0 \\ 2a+b-4\gamma=0 \end{cases} \quad (\text{ΟΣΓΕ})$$

Έστω $\gamma:=1$. Τότε $a=1$, $b=2$ (μέθοδος αντικατάστασης).

Άρα $\bar{u}_3=(1,2,1)^T \Rightarrow \bar{u}_3 \in V_3:=L\{\bar{u}_3\}=\{a\bar{u}_3\}_{a\in\mathbb{R}}$ (μονοδιάστατος ιδιοχ. $\lambda_3$-ιδιοτιμής).

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό ΣΓΕ $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, δηλ.

$$(A - \lambda I_3)\bar{x} = \bar{0}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A = \varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Έστω $\lambda$ Α-ιδιοτιμή είναι $\varphi(\lambda) = 0$, δηλ. $\lambda \in \{2, 3\}$.

Έστω $\bar{u}_1$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := 3$ ιδιοτιμής ισχύει το ΟΣΓΕ

$$(A - 3I_3) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ.}$$

$$\begin{cases} 0x = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$

Άρα $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T = (0, y, -2y) = y(0, 1, -2)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Εναλλακτικά θέτουμε $z := 1$ (ή $y := 1$).

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 2$ -ιδιοτιμής, τότε έχουμε το ΟΣΓΕ

$$(A - 2I_3) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \text{, δηλ.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + 6y + 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y + 2z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = -\frac{3}{2}y$$

Άρα $\bar{u}_2 = (x, y, z)^T = (0, y, -3/2y)^T = y(0, 1, -3/2)^T$, $y \in \mathbb{R}^*$.

Παράδειγμα. Έστω $A = (1)_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi = \varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3-\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ A-ιδιοτιμή είναι $\varphi(\lambda) = 0$, δηλ. $\lambda \in \{0, 3\}$.

Έστω $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T$ $\lambda_1 := 0$ ιδιοδιάνυσμα, τότε

$(A - 0I_3)\bar{u}_1 = 0$ δίνει $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$, δηλ.

$$\left.\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x + y + z = 0, \text{ ή } z = z(x, y) = -x - y$$

και άρα $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T = (x, y, -x-y)^T$ ή $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$, ή

$$\bar{u}_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R}, \ |x| + |y| \neq 0.$$

Έστω $\bar{u}_2=(x,y,z)^T$ $\lambda_2:=3$ ιδιοδιάνυσμα, δηλ.

$$(A-3I_3)\bar{u}_2=\bar{0}, \text{ δίνει } \begin{pmatrix}1-3 & 1 & 1\\ 1 & 1-3 & 1\\ 1 & 1 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\bar{0}$$

δηλ.

$$\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0,\\ x+y+2z=0.\end{cases}$$

Επίλυση υπο-συστήματος για $z:=1$ με μέθοδο Caramer. Έχουμε

$$\left.\begin{cases}-2x+y=-z=-1\\ x-2y=-z=-1\end{cases}\right\} \Rightarrow A'\bar{x}'=\bar{b}':=(-1,-1)^T$$

$$x+y=-2z=-2 \qquad \bar{x}'=(x,y)^T$$

$$A'=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}=(\bar{a}_1',\bar{a}_2')_{2\times 2}$$

Έστω $D':=|A'|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$. Άρα $\bar{x}=(x,y,z)^T$ μοναδική λύση για $z:=1$ με $x=D_x'/D'$, $y=D_y'/D'$, όπου

$$D_x'=|\bar{b}',\bar{a}_2|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=2+1=3$$

$$D_y'=|\bar{a}_1',\bar{b}'|=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2+1=3.$$

Άρα $\bar{u}_2=(x,y,z)^T=(1,1,1)^T$, οπότε $\bar{u}_2=\alpha(1,1,1)^T$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Εναλλακτικά, υπολογίζουμε τις παραμετρικές λύσεις του ΟΣΓΕ με Gauss.

**Παράδειγμα.** Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi = \varphi(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Έστω $\lambda$ $A$-ιδιοτιμή $\Rightarrow \varphi(\lambda) = 0$, δηλ. $\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$, δηλ. $\lambda \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$, καθώς $(\lambda - 0)^1(\lambda - \sqrt{2})^1(\lambda + \sqrt{2})^1 = 0$.

Έστω $\bar{u}_1 = (x, y, z)^T$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := 0$ ιδιοτιμής είναι οι μη-μηδενικές λύσεις του ΟΣΓΕ

$$(A - 0 I_3)\bar{u} = \bar{0}, \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \quad \text{ή}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} = (x, y, z) = (1, 0, -1)^T$$

Έστω $\bar{u}_2 = (x, y, z)^T$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := \sqrt{2}$ -ιδιοτιμής, με

$$(A - \sqrt{2} I_3)\bar{u} = \bar{0} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \quad \text{ή}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0, \quad y - \sqrt{2}z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{u}_2 = (x, y, z)^T = (1, \sqrt{2}, 1)^T.$$

Παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\varphi_A = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 4] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Έστω $\lambda$ $A$-ιδιοτιμή, δηλ. $p(\lambda) = 0$, ή $(\lambda-5)^2(\lambda-1)^1 = 0$
δηλ. $\lambda \in \{1, 5\}$.

Έστω $\bar{u}_1$ $A$-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := 1$-ιδιοτιμής, έχουμε το διάνυσμα-λύση $\bar{u}_1$ του ΟΣΓΕ,

$$(A - 1\cdot I_3)\bar{u} = \bar{0}, \text{ δηλ. } \begin{pmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ δηλ. } \left\{\begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Άρα $\bar{u}_1 = (x,y,z)^T = (x,x,0)^T = x(1,1,0)^T$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Ιδιοχώρος $E_1 = \{\bar{u}_1 \in \mathbb{R}^{3\times 1} / A\bar{u}_1 = 1\cdot\bar{u}_1\} = \{x(1,1,0)^T\}_{x\in\mathbb{R}^*} = L(\{(1,1,0)^T\})$
και $\dim E_1 = 1$ καθώς $(1,1,0)^T \neq \bar{0}$.

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 5$-ιδιοτιμής που είναι το μη-μηδενικό διάνυσμα λύσης $\bar{u}_2$ του ΟΣΓΕ

$$(A-5I_3)\bar{u}_2=\bar{0}, \text{ ή } \begin{pmatrix} 3-5 & -2 & 0 \\ -2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\bar{0}, \text{ ή}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\bar{0} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=0 \\ -2x-2y=0 \\ 0z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=-x \\ z\in\mathbb{R} \end{matrix}$$

και άρα $\bar{u}_2=(x,y,z)^T=(x,-x,z)^T = x(1,-1,0)^T+z(0,0,1)^T,\ x,z\in\mathbb{R}$
$|x|+|z|\neq 0$

Ιδιοχώρος $E_2=\{\bar{u}_2\in\mathbb{R}^{3\times 1} / A\bar{u}_2=5\bar{u}_2\}=\{x(1,-1,0)^T+z(0,0,1)\}_{x,z\in\mathbb{R}^*}$, δηλ.

$E_2=L(\{(1,-1,0)^T,(0,0,1)\})$ με $\dim E_2 = 2$ καθώς

$\{(1,-1,0)^T,(0,0,1)^T\}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διαν.

Επειδή $\dim E_1 = r_1 = 1$ και $\dim E_2 = r_2 = 5$, δηλ. οι γεωμετρικές πολλαπλότητες ισούνται με τις αλγεβρικές πολλαπλότητες, τότε

$\{(1,1,0)^T,(1,-1,0)^T,(0,0,1)^T\}$ σύνολο γραμμικά ανεξαρτ. διαν.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\varphi = p_A(\lambda) = |A-\lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 18 \\ -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3 \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Έστω $\lambda$ Α-ιδιοτιμή, δηλ. $p(\lambda) = |A-\lambda I_3| = -(1+\lambda)^3 = 0$, δηλ.

$\lambda = -1$ (τριπλή αλγεβρική πολλαπλότητα)

Έστω $\bar{u}$ Α-ιδιοδιάνυσμα $\lambda := -1$-ιδιοτιμής, τότε

$(A-(-1)I_3)\cdot \bar{u} = \bar{0}$, δηλ. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0}$ ή

$$\left\{\begin{array}{l} -3y-9z=0 \\ 6y+18z=0 \\ -2y-6z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-3z,\ x\in\mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u} = (x,y,z)^T = (x,-3z,z)^T = (x,0,0) + z(0,-3,1)$$

Άρα Ε $\lambda$-ιδιόχωρος είναι $E = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^{3\times 1} / A\bar{u} = -\bar{u}\}$, δηλ.

$E = \{x(1,0,0)^T + z(0,-3,1)^T\} = L(\{(1,0,0)^T, (0,-3,1)^T\})$ με

$\dim E = 2$ καθώς $\{(1,0,0)^T, (0,-3,1)^T\}$ σύνολο γραμμ. ανεξαρτ. διαν.

Ασκήσεις.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad \Gamma=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&4\\1&1&2\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&-3\\6&-6&4\end{pmatrix}\quad \Sigma T=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&1&3\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$Z=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&-1\\4&-1&-1\end{pmatrix},\quad \Theta=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}2&i&1+2i\\-i&0&-i\\1-2i&-i&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα Εφαρμογή Cayley-Hamilton. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $p_A = p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(2-\lambda) + 3\right] = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε,

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0, \text{ οπότε}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I_3\right) \text{ και άρα}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{2}\left(-A + 2I_3 + A^{-1}\right), \text{ οπότε}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{2}\left[-A + 2I_3 + \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I_3\right)\right] = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{5}{4}I_3.$$

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A=p_A(\lambda)=|A-\lambda I_2|$, δηλ.

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(4-\lambda)-6=$$

$$=\lambda^2-tr(A)+|A|=\lambda^2-5\lambda-2\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton, επειδή $p(0)=|A|=-2\neq 0$ ο $A$ είναι μη-ιδιάζον (αντιστρέψιμος) με $p_A(A)=0$, δηλ.

$$A^2-5A-2I_2=0 \Leftrightarrow A(A-5I_2)=2I_2 \Leftrightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-5I_2)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A=p_A(\lambda)=|A-\lambda I_2|$, $\lambda\in\mathbb{R}$, δηλ.

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}0-\lambda & -1\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε $p(A)=A^2-I_2=0$, οπότε

$$A^{-1}=-A \quad \text{και} \quad A^{-2}=-I_2$$

Παράδειγμα. Έστω $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A = p_A(\lambda) = |A-\lambda I_2|$, $\lambda\in\mathbb{R}$, δηλ.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda)+3 = 1-\lambda^2,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Έστω $\lambda$ A-ιδιοτιμή, δηλ. $p(\lambda)=0 \iff \lambda=\pm 1$. Επειδή έχουμε διακριτές ιδιοτιμές, ο A διαγωνιοποιείται.

Έστω $\bar{u}_1$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 := -1$ ιδιοτιμής, τότε

$$[A-(-1)I_2]\bar{u}_1 = \bar{0} \iff \begin{pmatrix}2+1 & 3\\ -1 & -2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\left.\begin{matrix}3x+3y=0\\ -x-y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-x, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_1 = (x,y) = x(1,-1)^T,\ x\in\mathbb{R}^*$$

Έστω $\bar{u}_2$ A-ιδιοδιάνυσμα $\lambda_2 := 1$ ιδιοτιμής, τότε

$$(A-1I_2)\bar{u}_2 = \bar{0} \iff \begin{pmatrix}2-1 & 3\\ -1 & -2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \bar{0}, \text{ ή}$$

$$\left.\begin{matrix}x+3y=0\\ -x-3y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=x(y)=-3y,\ y\in\mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\bar{u}_2 = (-3y, y)^T = y(-3,1)^T,\ y\in\mathbb{R}^*.$$

Έστω $P=(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του $A$, δηλ.

$$P=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

και ισχύει η διαγωνιοποίηση του $A$ $A=P\cdot diag(-1,1)\cdot P^{-1}$ καθώς ο $A$ είναι διαγωνιοποιήσιμος καθώς έχει διακριτές ιδιοτιμές. Εξάλλου $|P|=1-3=-2\neq 0$.

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton, έχουμε $P(A)=A^2-I=0$, και άρα

$$A^2=I,\quad A^3=A,\quad A^4=A^2=I,\quad A^5=A$$ κτλ., δηλ.

$$A^{\nu}=\begin{cases}A, & \nu=2k+1\\ I_2, & \nu=2k,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$