ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2020
ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΑΔΑΜΙΔΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ 6ο

Υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου

1. ΣΚΟΠΟΣ

Σκοπός της άσκησης αποτελεί ο υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου K. Πόσο δύσκολο είναι στην επικοινωνία.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

2.1 ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ HOOKE

Παραμόρφωση υφίσταται ένα αντικείμενο όταν πάνω του ασκείται δύναμη.
Ελαστικότητα είναι η φυσική ιδιότητα των αντικειμένων να επανέλθουν στο φυσικό τους σχήμα έπειτα από παραμόρφωση.
Ο Νόμος του Hooke ορίζει πως η ελαστική περιοχή χαρακτηρίζεται από μια γραμμική σχέση μεταξύ της τάσης που ασκείται πάνω σε ένα σώμα και της αντίστοιχης καταπόνησης που προκαλείται σε αυτό. Εφαρμόζοντάς τον έχουμε την σχέση:

$$F = -K \cdot X \quad (1)$$ Δύναμη επαναφοράς

όπου X : μετατόπιση από την αρχική θέση
F : δύναμη επαναφοράς, αντίθετη προς την ευτροπή.
K : η σταθερά που χαρακτηρίζει το ελατήριο (δυσκολία στην ευτροπή)

Βλέπε Σχήμα 1

Μονάδες μέτρησης στο S.I.:

x σε m

F σε N (ή $Kg \cdot m \cdot s^{-2}$)

K σε N/m (ή $Kg \cdot s^{-2}$)

2.2 ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΗ ΜΑΖΑ.

Με βάση τον νόμο του Hooke

(α) $F_1 = -K \cdot x_1$ απο την αρχική θέση

$F_1 = m \cdot g \Rightarrow mg = -K \cdot x_1$ (2)

Βλέπε Σχήμα 2

(β) $F = -K(x_1 + x)$ (3)

$-K(x_1+x) - mg = m \cdot a$ (4)

Απο τις σχέσεις (2), (4) $\Rightarrow$

$-K \cdot x = m a$

Τελικά έχουμε την Διαφορική Εξίσωση Α.Α.Τ.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x = 0 \qquad (5)$$

με λύσεις:

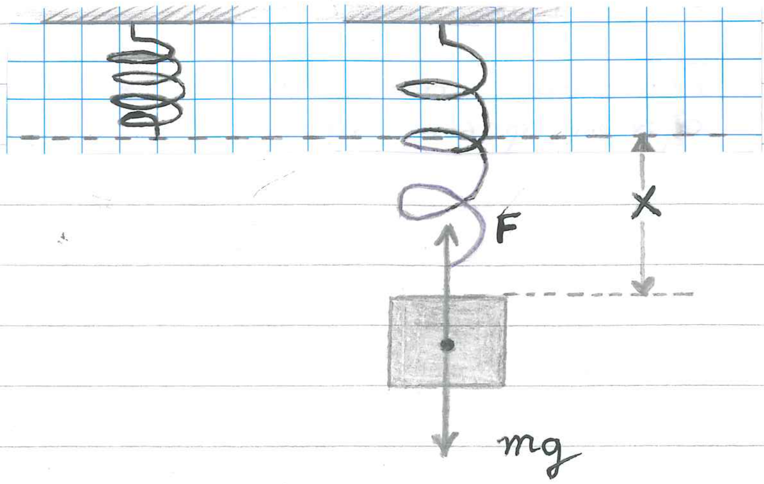
$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \qquad (6α)$$

ή

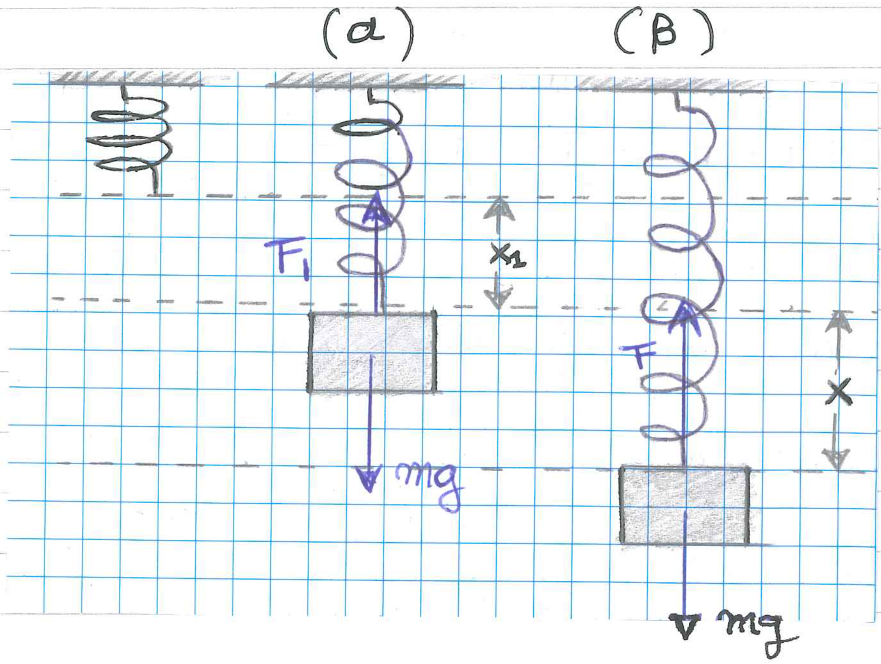
$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \qquad (6β)$$

όπου: C_1, C_2 σταθερές εξαρτωμενες των αρχικών συνθηκών.

Σχήμα 1. Επιμήκυνση και ισορροπία



Σχήμα 2. Ταλάντωση

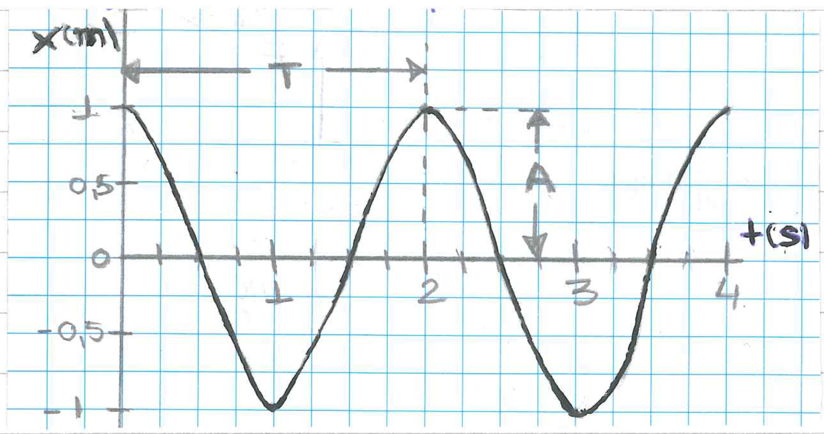


ω : η κυκλική συχνότητα
A : πλάτος ταλάντωσης (μέγιστη θέση απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας)
φ : αρχική φάση.

Αποδεικνύωνται οι παρακάτω σχέσεις :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} , \quad \tan\varphi = \frac{C_2}{C_1} \qquad (6\gamma)$$

Παρακάτω απεικονίζεται η εξάρτηση της θέσης x από τον χρόνο t για αρχική φάση $\varphi = 0$.



Τό σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση μεταξύ 1 και -1 από την θέση ισορροπίας 0. Αυτή η κίνηση ονομάζεται ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ Α.Α.Τ.

Εκφράζοντας την περίοδο T σε σχέση με την κυκλική συχνότητα ω έχουμε :

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow A\cos[\omega(t+T)] = A\cos\omega t$$
$$\Rightarrow \omega(t+T) = \omega t + 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (7)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6), (7) έχουμε :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(αν θεωρήσουμε την μάζα του ελατηρίου αμελητέα). Εάν όχι, στο σύστημα ελατήριο-μάζα έχουμε

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_{ελ}/3}{k}} \qquad (8)$$

όπου $m_{ελ}$ η μάζα ελατηρίου.

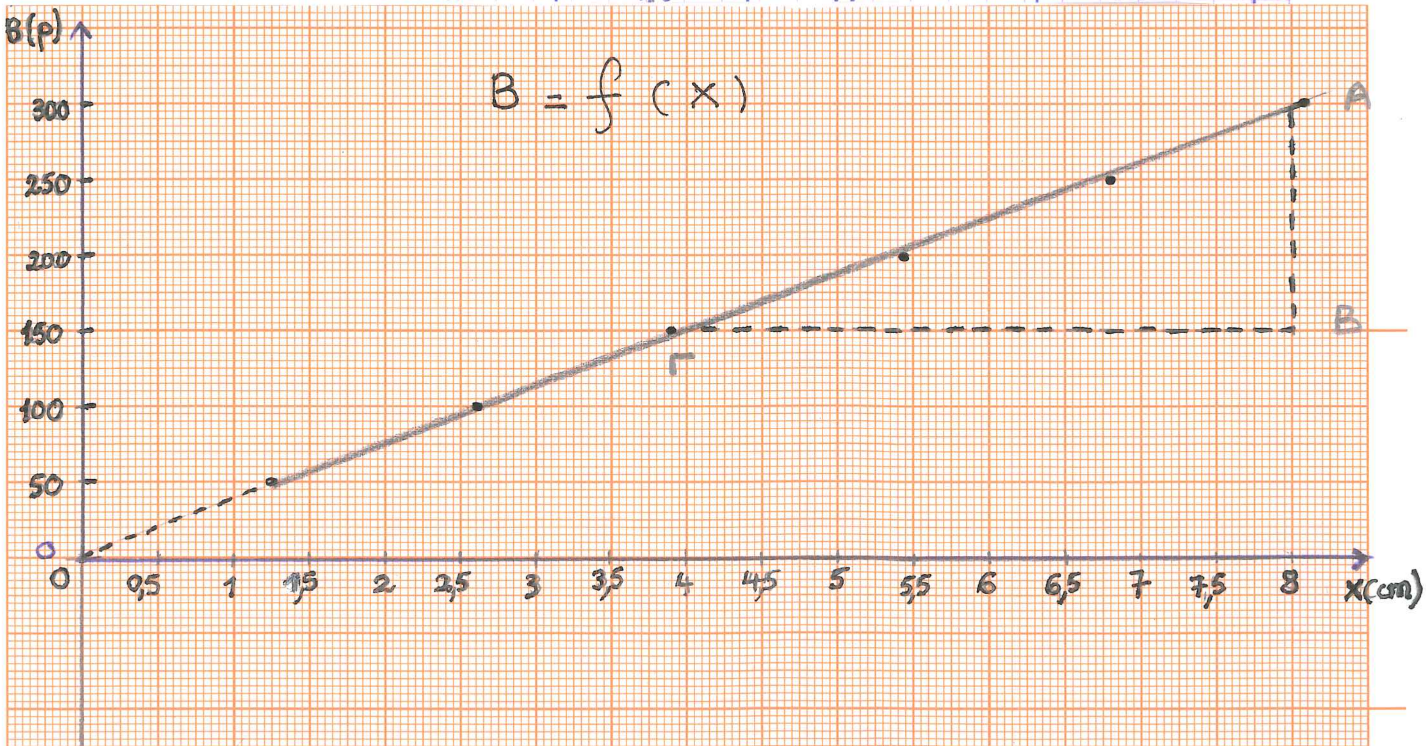
1 Υπολογισμός της σταθεράς του ελατηρίου από τον νόμο του Hooke

Επιλέγουμε κάποιο σταθερό σημείο στο ελατήριο (το τέλος του ή ο δείκτης που έχει) και σημειώνουμε την αρχική ένδειξη x_0 χωρίς βάρος στο ελατήριο. $x_0 = 23{,}8$ cm

Τοποθετούμε διαδοχικά τις 10 γνωστές μάζες στο άκρο του ελατηρίου την μία μετά την άλλη και σημειώνουμε κάθε φορά την αντίστοιχη ένδειξη x_1 του σημείου. Στη συνέχεια αφαιρούμε διαδοχικά μια-μια τις μάζες σημειώνοντας κάθε φορά την αντίστοιχη θέση x_2. Υπολογίζουμε τη μέση για κάθε μάζα m του σημείου $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα μετρήσεων.

Α/Α	m(g)	B(p)	x_1(cm)	x_2(cm)	$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$ (cm)	$x = \bar{x} - x_0$ (cm)
1	50		25,0	25,1	25,05	1,25
2	100		26,4	26,4	26,40	2,60
3	150		27,8	27,6	27,70	3,90
4	200		29,3	29,2	29,25	5,45
5	250		30,6	30,6	30,60	6,80
6	300		31,9	31,9	31,90	8,10

$\boxed{B = K \cdot x}$



$$\text{κλίση} = K = \frac{(300-150)p}{(8-4)cm} = \frac{150p}{4{,}0cm} = 37{,}5\,\frac{p}{cm} = \frac{37{,}5\,10^{-2}N}{10^{-2}m} = 37{,}5\ N/m$$

$\Rightarrow D_H = 37{,}5\ N/m$ μέθοδος Hooke

2. Υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου από την Α.Α.Τ.

Για κάθε τιμή μάζας m μετράμε το χρόνο που απαιτείται για 10 περιόδους 10T. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για 6 διαφορετικές τιμές μάζας m. Καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον κάτωθι πίνακα μετρήσεων, αφού υπολογίσουμε το T και το T^2 για την γραμμικοποίηση

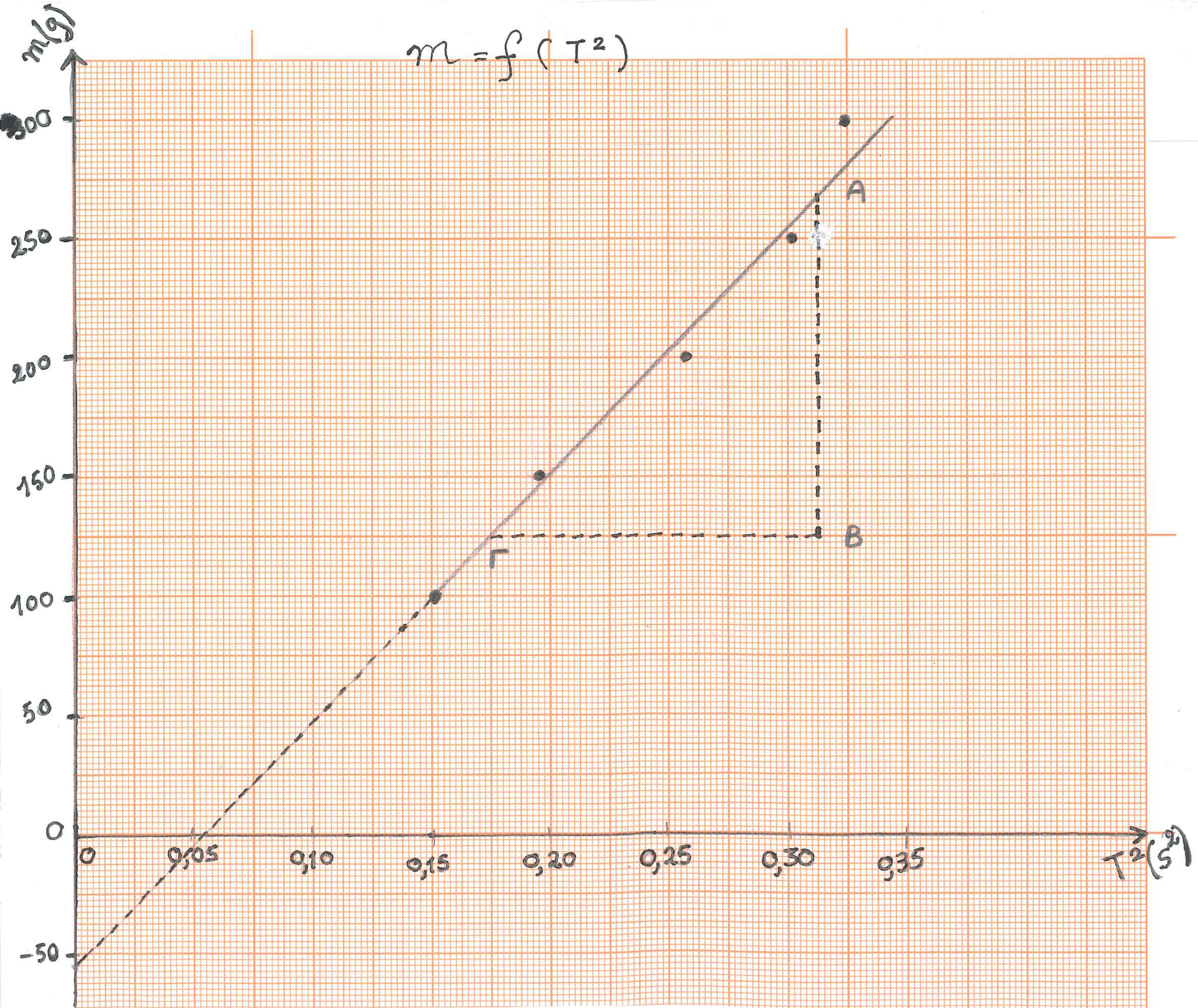
Α/Α	m(g)	10T(s)	T(s)	$T^2(s^2)$
1	100	3,94	0,394	0,155
2	150	4,35	0,435	0,189
3	200	5,13	0,513	0,263
4	250	5,55	0,555	0,308
5	300	5,69	0,569	0,323

Βάσει της σχέσεως 8

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_{ελ}/3}{K}}$$

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{(m + m_{ελ}/3)}{K}, \quad m \to Y, T^2 \to X$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{T^2}{4\pi^2} K - \frac{m_{ελ}}{3}} \quad Y = a \cdot X + B$$



Από τη γραφική:

$-m_{ελ}/3 = -55 \Rightarrow m_{ελ} = 165\ g$

Θεωρία : $κλίση = \frac{K}{4\pi^2}$

Πείραμα : $κλίση = \frac{AB}{BΓ} = \frac{142,5}{0,125}\frac{g}{s^2} = 1140\ g/s^2$

ΠΑΝΤΡΕΙΑ : $\frac{K}{4\pi^2} = 1140\ g/s^2 \Rightarrow K = 4\pi^2 \cdot 1140\ g/s^2$

$\Rightarrow K = 45,0\ Kg/s^2 = 45,0\ N/m$

διότι: $1\ Kg/s^2 = 1\ Kg\frac{m}{s^2}\frac{1}{m} = 1\ N/m$

$\Rightarrow D_T = 45,0\ \frac{N}{m}$ μέθοδος ταλάντωσης

Να έχετε πάντα στο μυαλό σας ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος για την παραπάνω διαδικασία και είστε ελεύθεροι να διαμορφώσετε όπως θέλετε τον θεωρητικό τύπο και το γράφημα σας.

Να συγκρίνετε τις δύο τιμές για τη σταθερά ελατηρίου που προσδιορίσατε από τις δύο μεθόδους (D_H και D_T) και να δώσετε τη σχετική απόκλιση $\left|\frac{D_H - D_T}{D_H}\right| \times 100\ \%$

$\left|\frac{D_H - D_T}{D_H}\right| = \left|\frac{37,5 - 45,0}{37,5}\right| = 20\%$

Συμπεράσματα :

- Η κλίση έχει μεγαλύτερη αξιοπιστία κ ακρίβεια από ότι ο σταθερός όρος. Ο προσδιορισμός έτσι της $m_{ελ}$ έχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα από ότι η σταθερά ελατηρίου.
- Περισσότερες μετρήσεις θα βοηθούσαν.
- Η μέθοδος Hooke φαίνεται πιο ακριβής από ότι η μέθοδος της ταλάντωσης.