Το μάθημα
5/11/23

Σφάλματα Μετρήσεων

Με ένα όργανο (π.χ. αμπερόμετρο) μετρούμε πολλές (N) φορές την ένταση του ρεύματος που περνάει σ' ένα κύκλωμα: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ σε A. Η καλύτερη τιμή που χαρακτηρίζει τις μετρήσεις είναι η μέση τιμή $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \,/\, N$$

Η μέση τιμή $\bar{x}$ παίζει λίγο από τις μεμονωμένες μετρήσεις. Το μέσο αυτό παίξιμο καλείται το απόλυτο σφάλμα του μεγέθους x.

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i^2}{N(N-1)}} \quad \text{όπου} \quad \Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

Το σχετικό σφάλμα είναι: $\sigma\% = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$

Γράφουμε το τελικό αποτέλεσμα: $\bar{x} \pm \sigma$ ή $\bar{x} \pm \sigma\%$

Τα σφάλματα διακρίνονται σε συστηματικά και τυχαία. Συστηματικά όταν επηρεάζουν το αποτέλεσμα πάντοτε κατά την ίδια φορά. Είτε μόνο το αυξάνουν είτε μόνο το ελαττώνουν. Τυχαία και κατά τις δύο φορές.

π.χ. Συστηματικό είναι το σφάλμα όταν η βελόνα του αμπερομέτρου δεν αρχίζει από το (0,0) αλλά πιο πάνω (θετικό συστηματικό σφάλμα). Αυτό ευρίσκεται και διορθώνεται στις μετρήσεις μας.

Τυχαία όταν οφείλεται σε αστάθμητους και τυχαίους παράγοντες, π.χ. μέτρηση θερμοκρασίας που παίζει τυχαία. Το τυχαίο σφάλμα μειώνεται όταν αυξηθεί το πλήθος των μετρήσεων γιατί ακολουθούν τους νόμους των πιθανοτήτων (κατανομή Gauss).

Γενικά τα σφάλματα μπορεί να οφείλονται:

α) στο όργανο

β) στον παρατηρητή

γ) στο περιβάλλον. Αστάθεια εξωτερικών συνθηκών που επηρεάζουν τις μετρήσεις στη διάρκεια του πειράματος π.χ. θερμοκρασία, πίεση, τάση δικτύου κ.λ.π.

Πώς γράφουμε τα αποτελέσματα

1ο/ Σημαντικά ψηφία ενός αριθμού

Τα ψηφία του που είναι γνωστά με βεβαιότητα και ακόμη ένα επιπλέον ψηφίο που προκύπτει από εκτίμηση.

π.χ. 0,001 : Ένα Σ.Ψ.

4,2, 0,00086, $6,3 \cdot 10^5$: Δύο Σ.Ψ.

0,693, $4,20 \cdot 10^3$: Τρία Σ.Ψ.

12,56, 0,03100, $7,200 \cdot 10^6$ Τέσσερα Σ.Ψ.

Πράξεις αριθμών. Πλήθος δεκαδικών ψηφίων στο αποτέλεσμα (δεκαδικών)

Πρόσθεση, αφαίρεση: Κρατάμε τον μικρότερο αριθμό ψηφίων εκ των όρων του αθροίσματος π.χ.

$$\underbrace{2,0001}_{\substack{5\ \Sigma.\Psi. \\ \text{δεκάκις χιλιοστό}}} + \underbrace{0,00042}_{\substack{2\ \Sigma.\Psi. \\ \text{εκατοντάκις χιλιοστό}}} = \Big(\underbrace{2,00052}_{6\ \Sigma.\Psi.}\Big) \longrightarrow \underbrace{2,0005}_{\substack{5\ \Sigma.\Psi. \\ \text{δεκάκις χιλιοστό}}}$$

Επίσης:

$$\underbrace{1,0004}_{\substack{5\ \Sigma.\Psi. \\ \text{δεκάκις χιλιοστό}}} - \underbrace{0,996}_{\substack{3\ \Sigma.\Psi. \\ \text{χιλιοστό}}} = \underbrace{0,008}_{\substack{1\ \Sigma.\Psi. \\ \text{χιλιοστό}}}$$

Πολλαπλασιασμός, διαίρεση:

$$\underbrace{(12,0\ mm)}_{3\ \Sigma.\Psi.} \cdot \underbrace{(5,0\ mm)}_{2\ \Sigma.\Psi.} = \underbrace{60,0\ mm^2}_{3\ \Sigma.\Psi.} \downarrow \underbrace{60\ mm^2}_{2\ \Sigma.\Psi.}$$

Πάμε με τα λιγότερα σημαντικά.

Αν χρειαστεί στρογγυλοποίηση:

Αν το τελευταίο ψηφίο που θα κρατήσουμε ακολουθείται από ψηφίο μεγαλύτερο του 5 τότε το αυξάνουμε κατά μονάδα, αν μικρότερο του 5 το αφήνουμε όπως είναι, αν (ακολουθείται) από το ψηφίο 5 αυξάνουμε κατά 1 αν είναι το (τελευταίο) που θα κρατήσουμε ψηφίο περιττό, ενώ το αφήνουμε όπως είναι αν είναι άρτιο.

Απλή μέτρηση διαμέτρου X κυλίνδρου

α/α	X (cm)	$\bar{X}$ (cm)	$\Delta X_i = \bar{X} - X_i$ cm	ΔX_i^2 cm^2
1	2,2		+0,02	0,0004
2	2,3	2,22	−0,08	0,0064
3	2,1		+0,12	0,0144
4	2,3		−0,08	0,064
5	2,2		+0,02	0,004

$\Sigma X_i = 11,1$ cm $\qquad \Sigma \Delta X_i^2 = 0,0280$ cm^2

$$\sigma(X) = \pm\sqrt{\frac{\Sigma \Delta X_i^2}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{0,0280}{5 \cdot 4}} = \pm\sqrt{0,0014} = \pm 0,037 \text{ cm}$$

Κρατάμε 2 δεκαδικά $\quad \sigma(X) = \pm 0,04$ cm

$$\Rightarrow \quad \bar{X} \pm \sigma(\bar{X}) = (2,22 \pm 0,04) \text{ cm}$$

Σύνθετη μέτρηση: Πάνω από μία μεταβλητές

Όγκος κυλίνδρου με διάμετρο X και ύψος Y

Βρίσκουμε $\bar{Y}$ και $\sigma(\bar{y})$ όπως για το X.

Τότε: $\quad \bar{V} = \pi \dfrac{\bar{X}^2}{4} \cdot \bar{y}$

$$\sigma(V) = \pm \frac{\partial V}{\partial x}\sigma(x) + \frac{\partial V}{\partial y}\sigma(y) \qquad \text{μέγιστο σφάλμα}$$

$$\sigma(\bar{V}) = \left[\left[\frac{\partial V}{\partial x}\sigma(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial V}{\partial y}\sigma(y)\right]^2\right]^{1/2} \qquad \text{μέσο σφάλμα}$$

∂: για μερική παράγωγο.

$\dfrac{\partial V}{\partial X}$ είναι το $\dfrac{dV}{dX}$ αν θεωρήσουμε το y σταθερό

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2\pi \bar{X}}{4}\bar{y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{dV}{dy}\Big/_{x=\text{σταθερό}} = \pi\frac{\bar{X}^2}{4}$$