Μάθημα: Ανώτερα Μαθηματικά I
Τμήμα: Ναυπηγικής
Ον/μο: Ειρήνη Φλεριανού

Εργασία 3 (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

① i) $\sqrt{3x^2-5x+4}$ / $D=\mathbb{R}$

$3x^2-5x+4 \geq 0$

$\Delta = 25-4\cdot3\cdot4$

$=25-48=-23<0$

$-\infty$	$+\infty$
$+$	

Άρα ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$

vii) $\ln(x^2-x-2)$

$x^2-x-2>0$

$\Delta = 1+8=9$

$x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$

Άρα $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

iii) $\frac{x}{|x+3|}$ / $\mathbb{R}-\{3\}$

$|x+3| \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

$\Rightarrow x+3 \neq 0$

vi) $\tan^{-1} 5x$ / $D=\mathbb{R}$

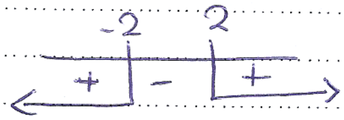
$5x \in \mathbb{R}$

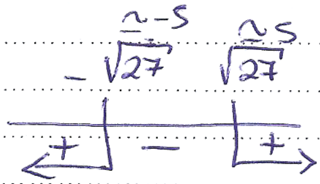
iv) $\sin^{-1} 3x$ / $D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

Πρέπει $-1 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

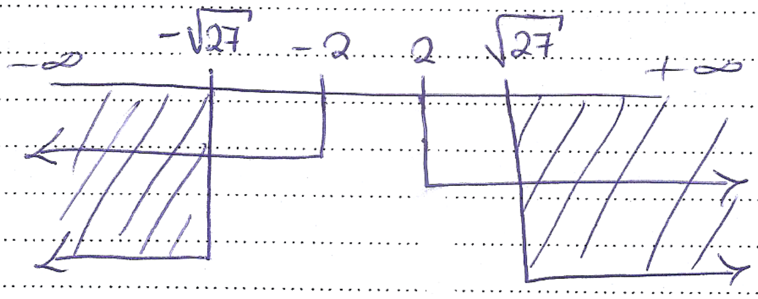
ix) $\dfrac{3x^2+4x-5}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x^2-54}}$ / $(-\infty,-\sqrt{27})\cup(\sqrt{27},+\infty)$

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \longrightarrow \\ 2x^2-54\geq 0 \longrightarrow \\ \sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x^2-54}\neq 0 \end{cases}$$





$\Rightarrow x^2-4\neq 0$ κ' $2x^2-54\neq 0$ ισχύει



v) $\sqrt{\dfrac{1-x}{(x-2)(x+5)}}$ / $D=(-\infty,-5)\cup[1,2)$

$x\neq 2$
$x\neq -5$

$(1-x)(x-2)(x+5)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-5)\cup[1,2)$

	$-\infty$	-5	1	2	$+\infty$
$1-x$	+	+	0 −	−	
$x-2$	−	−	−	+	
$x+5$	−	+	+	+	
	+	−	+	−	

xi) $(x+1)^{\frac{1}{x}}$ $\quad / D = (-1,0) \cup (0,+\infty)$

$x \neq 0$
$x+1 > 0$
$x > -1$

viii) $\cosh\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $\quad / D = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$

$x \neq -1$
$x(x+1) \geq 0$

	-1		0	
$+$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$

x) $\frac{\coth x}{x \neq -1}$ $\quad / D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\frac{x-1}{x+1} \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

xii) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$ $\quad x \in (0,\pi)$ $\quad (T = 2\pi)$
$(2\pi, 3\pi)$

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{x} > 0 \Rightarrow x \cdot \sin x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$x \in (0 + 2k\pi, 2k\pi + \pi)$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

x	-2π	$-\pi$	0	π		2π
x		$-$	$+$	$-$		
$\sin x$		$-$	$+$	$+$		
		$+$	$+$	$-$		

ii) $\tan(\sin 2x)$

$\sin 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$2x \neq \arcsin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$x \neq \frac{\arcsin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

② $f(x) = \ln(\sin 2x)$

*Πρέπει $\sin 2x > 0$

$\Rightarrow 0 < 2x < \pi$

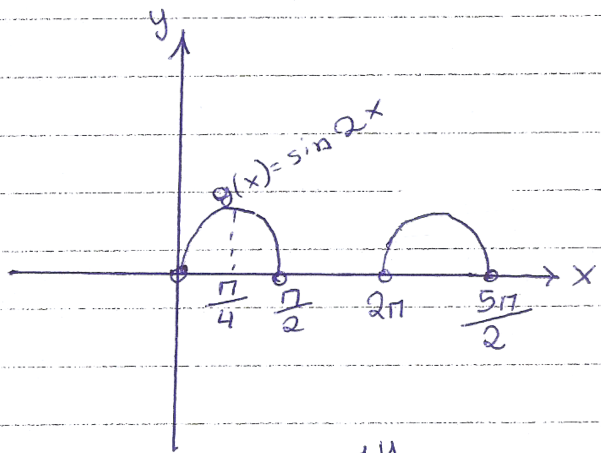
$\Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$

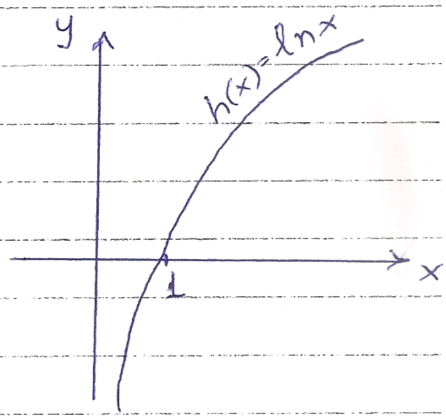
Άρα πεδίο ορισμού $(0, \frac{\pi}{2})$ (ή $(0+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ $k=0, \pm 1, \ldots$)

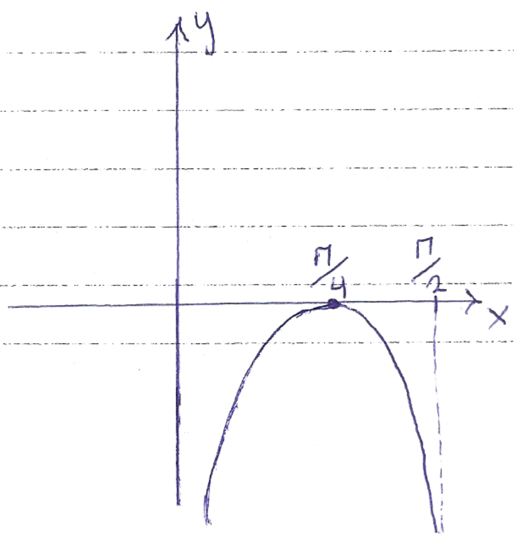
* $0 < \sin 2x < 1$

$\Rightarrow \ln(\sin 2x) < \ln 1$
$\Rightarrow \ln(\sin 2x) < 0$

Άρα σύνολο τιμών $(-\infty, 0)$







(3) $f(x) = \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)$

Πρέπει : $\cos\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < \pi$

ή

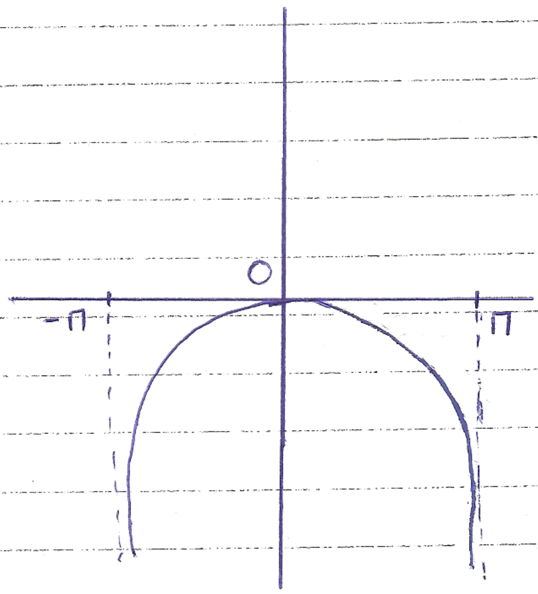
$\frac{x}{2} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \frac{x}{2} < 2\pi \Rightarrow 3\pi < x < 4\pi$

Άρα πεδίο ορισμού $(0, \pi) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, 4\pi\right)$

(γενικότερα $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), (3\pi + 2k\pi, 4\pi + 2k\pi)$)
$k = 0, \pm 1, \ldots$

Επειδή $0 < \cos\frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) < \ln 1 = 0$

Άρα σύνολο τιμών $(-\infty, 0)$



4 i) $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (e^{x}+e^{-x})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (e^{x}-e^{-x})^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (e^{x} + \cancel{e^{-x}} + e^{x} - \cancel{e^{-x}})(\cancel{e^{x}} + e^{-x} - \cancel{e^{x}} + e^{-x})$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}}\cancel{2} \cdot e^{x} \cdot 2e^{-x} = 1$$

ii) $\sinh(-x) = -\sinh x$

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-x}) = -\sinh x$$

iii) $\sinh(x+\psi) = \sinh x \cdot \cosh\psi + \cosh x \cdot \sinh\psi$

$$\sinh(x+\psi) = \frac{1}{2}\left(e^{x+\psi} - e^{-(x+\psi)}\right)$$

$$\sinh x \cdot \cosh\psi + \cosh x \cdot \sinh\psi =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^{\psi} + e^{-\psi}) + \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\frac{1}{2}(e^{\psi} - e^{-\psi}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+\psi} + e^{x-\psi} - e^{-x+\psi} - e^{-(x+\psi)}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+\psi} - e^{x-\psi} + e^{-x+\psi} - e^{-(x+\psi)}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{4}e^{x+\psi}} + \cancel{\frac{1}{4}e^{x-\psi}} - \cancel{\frac{1}{4}e^{-x+\psi}} - \frac{1}{4}e^{-(x+\psi)} + \underline{\frac{1}{4}e^{x+\psi}} - \cancel{\frac{1}{4}e^{x-\psi}} + \cancel{\frac{1}{4}e^{-x+\psi}} - \frac{1}{4}e^{-(x+\psi)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{x+\psi} - \frac{1}{2}e^{-(x+\psi)} = \frac{1}{2}\left(e^{x+\psi} - e^{-(x+\psi)}\right) = \sinh(x+\psi)$$

iv) ομοίως με (iii)

⑤ $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{2}\,\frac{(e^{2x}-1)}{e^x} \Rightarrow$

$2ye^x = e^{2x} - 1 \Rightarrow$

$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \qquad (1)$

Έστω $\boxed{\kappa = e^x > 0}$

$(1) \Rightarrow \kappa^2 - 2y\kappa - 1 = 0$

$\Delta = 4y^2 + 4 > 0$

$\kappa = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$

Επειδή $\kappa > 0 \Rightarrow \kappa = y + \sqrt{y^2+1}$

$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$= x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

Άρα $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$\tanh x = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \text{Έστω } k = e^{2x} > 0$$

$$y = \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow yk + y = k - 1 \Rightarrow k - ky = y + 1 \Rightarrow k(1-y) = y+1$$

$$\Rightarrow k = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow 2x = \ln\frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}$$

Άρα $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}$

$$\coth x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \Rightarrow \qquad k = e^{2x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow ky - y = k + 1 \Rightarrow ky - k = 1 + y$$

$$\Rightarrow k(y-1) = 1+y$$

$$\Rightarrow k = \frac{1+y}{y-1}$$

$$\Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

Άρα $\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow$

$$2y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow 2y = \frac{(e^x)^2 + 1}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 + 1 = 2ye^x$$

$\Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$

$\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 1 = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$

y		-1		1	
y^2-1	$+$		$-$		$+$

Πρέπει $y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Όμως $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0$

Άρα $\boxed{y \in [1, +\infty)}$

Τότε : $e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2-1)}}{2} \Rightarrow$

$$e^x = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2-1}}{2}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

$\ln e^x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right) \Rightarrow$

$$x = \begin{cases} \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \\ \text{ή} \\ \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \end{cases} \quad y \in [1, +\infty)$$

Άρα $\cosh^{-1} x = \begin{cases} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \end{cases}$ με $x \in [1, +\infty)$

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

α) Της $\sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Πρέπει $x+\sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$ (1)

• Αν $x<0$ τότε $-x>0$ και η (1) γίνεται:
$\sqrt{x^2+1}^{\,2} > (-x)^2 \Rightarrow x^2+1 > x^2$ ισχύει

• Αν $x>0$ τότε $-x<0$ κι' επειδή $\sqrt{x^2+1} > 0$
η (1) ισχύει

Άρα $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ για οποιαδήποτε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, δηλ. το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$

β) της $\cosh^{-1} x = \begin{cases} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \end{cases}$

Έχω δείξει στην εύρεση του τύπου της $\cosh^{-1} x$ ότι $x \in [1, +\infty)$, δηλ. πεδίο ορισμού $[1, +\infty)$

γ) της $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Πρέπει $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0$

Άρα $x \in (-1, 1)$ δηλ. Π.Ο. $\rightarrow (-1, 1)$

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

δ) ως $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

Πρέπει $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0$

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$+$	0	$-$	0	$+$

⑥ i) $\sin 3x$

Πρέπει $f(x+\tau)=f(x)$ με $\tau\neq 0$

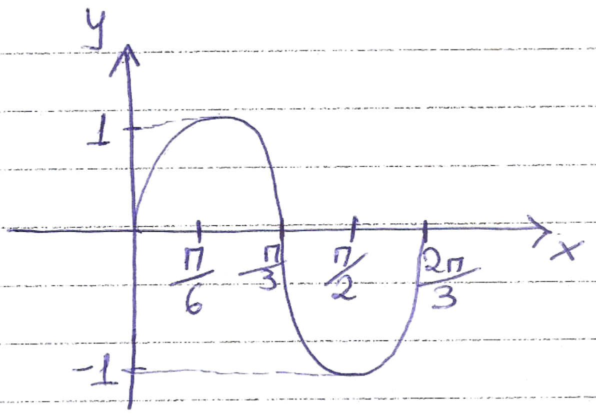
$\Rightarrow \sin[3(x+\tau)]=\sin 3x$

$\Rightarrow \sin(3x+3\tau)=\sin 3x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3\tau=2\kappa\pi+3x \Rightarrow \tau=\dfrac{2\kappa\pi}{3} \ (1), \ \kappa\in\mathbb{Z} \\ 3x+3\tau=2\kappa\pi+\pi-3x \Rightarrow 6x+3\tau=2\kappa\pi+\pi \end{cases}$$

Απορρίπτεται γιατί δεν είναι ανεξάρτητη του x

Απο (1) για $\kappa=1 \Rightarrow \boxed{T=\dfrac{2\pi}{3}}$



ii) $\sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ \sin(-x), & x < 0 \end{cases}$

$\sin(-x) = -\sin x$

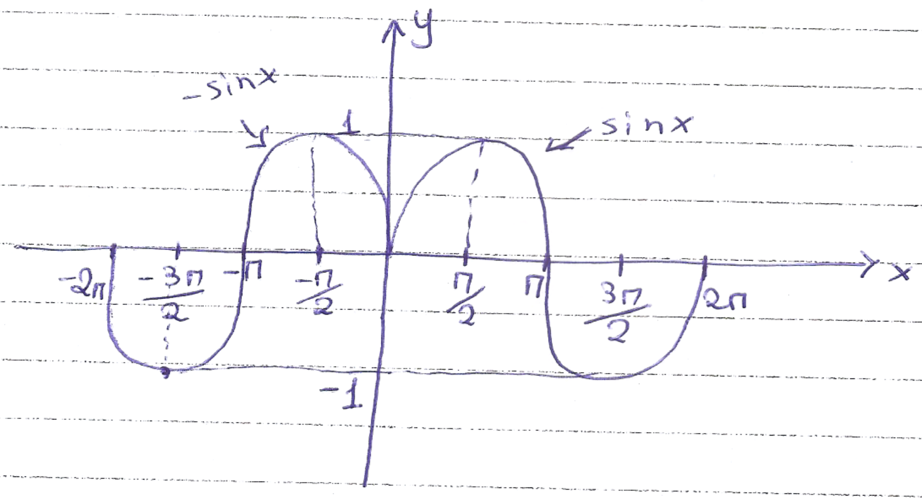
▸ Για τον κλάδο sinx είναι γνωστό ότι έχει βασική περίοδο $T = 2\pi$

▸ Για τον κλάδο -sinx είναι προφανές ότι έχει επίσης βασική περίοδο $T = 2\pi$, αφού πρέπει:

$$-\sin(x+\tau) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \sin(x+\tau) = \sin x$$

Άρα $\tau = 2\kappa\pi$



v) $\cos x^2$

Για να είναι περιοδική πρέπει: $f(x+\tau)=f(x) \Rightarrow$
$\cos(x+\tau)^2=\cos x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+\tau)^2 = 2\kappa\pi + x^2 & (1) \\ (x+\tau)^2 = 2\kappa\pi - x^2 & (2) \end{cases}$$

Η (1) δίνει: $x^2+2x\tau+\tau^2=2\kappa\pi+x^2 \Rightarrow \tau^2+2x\tau-2\kappa\pi=0$

$\Delta = 4x^2-4\cdot(-2\kappa\pi$
$\Delta = 4x^2+8\kappa\pi$
$\Delta = 4(x^2+2\kappa\pi)$

$\tau = \dfrac{-2x \pm 2\sqrt{x^2+2\kappa\pi}}{2}$ εξαρτάται από το x

Η (2) δίνει $x^2+2x\tau+\tau^2=2\kappa\pi-x^2 \Rightarrow \tau^2+2x\tau+2x^2-2\kappa\pi=0$

$\Delta = 4x^2-4(2x^2-2\kappa\pi)=4x^2-8x^2+8\kappa\pi=8\kappa\pi-4x^2$
$\Rightarrow \Delta = 4(2\kappa\pi-x^2)$
$\tau = \dfrac{-2x \pm 2\sqrt{2\kappa\pi-x^2}}{2}$ εξαρτάται από το x

Άρα η συνάρτηση $\cos x^2$ Δεν είναι περιοδική

iii) $|\sin \omega x|$

$$f(x+\tau) = f(x) \Rightarrow \left|\sin\left[\omega(x+\tau)\right]\right| = |\sin\omega x|$$

$$\Rightarrow |\sin(\omega x + \omega\tau)| = |\sin \omega x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega x+\omega\tau) = \sin\omega x \quad (1) \\ \text{ή} \\ \sin(\omega x+\omega\tau = -\sin\omega x \quad (2) \\ \qquad\qquad\qquad = \sin(-\omega x) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\omega x} + \omega\tau = 2\kappa\pi + \cancel{\omega x} \Rightarrow \boxed{\tau = \dfrac{2\kappa\pi}{\omega}} \ (A) \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \omega x + \omega\tau = 2\kappa\pi + \pi - \omega x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega\tau = 2\kappa\pi + \pi - 2\omega x$$

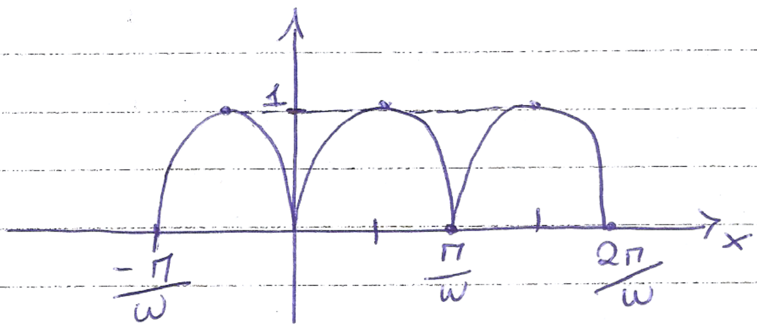
Απορρίπτεται γιατί εξαρτάται από το x

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \omega x + \omega\tau = 2\kappa\pi - \omega x \quad \text{Απορρίπτεται (εξαρτάται απο το } x\text{)}. \\ \text{ή} \\ \cancel{\omega x} + \omega\tau = 2\kappa\pi + \pi + \cancel{\omega x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\kappa\pi + \pi}{\omega} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega}} \quad (B)$$

Άρα $\tau = \dfrac{\kappa\pi}{\omega}$ κ' για $\kappa = 1$ έχουμε $T = \dfrac{\pi}{\omega}$



iii) $|\sin \omega x|$

$$f(x+\tau) = f(x) \Rightarrow |\sin[\omega(x+\tau)]| = |\sin \omega x|$$
$$\Rightarrow |\sin(\omega x+\omega\tau)| = |\sin \omega x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega x+\omega\tau) = \sin\omega x \quad (1) \\ \text{ή} \\ \sin(\omega x+\omega\tau = -\sin\omega x \quad (2) \\ \qquad = \sin(-\omega x) \end{cases}$$

$$(1) = \begin{cases} \cancel{\omega x}+\omega\tau = 2\kappa\pi+\cancel{\omega x} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2\kappa\pi}{\omega}} \ (A) \quad \kappa\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \omega x+\omega\tau = 2\kappa\pi+\pi-\omega x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega\tau = 2\kappa\pi+\pi-2\omega x$$

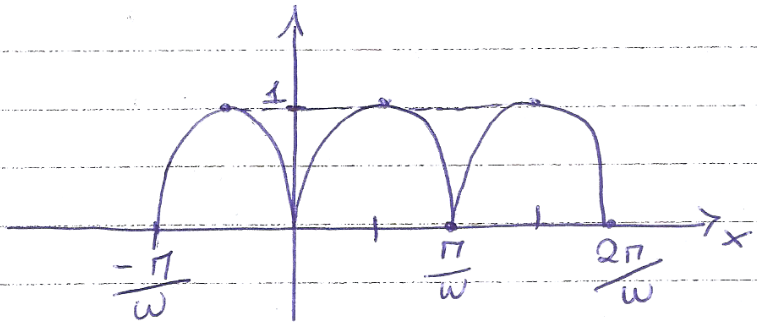
Απορρίπτεται γιατί εξαρτάται από το x

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \omega x+\omega\tau = 2\kappa\pi-\omega x \quad \text{Απορρίπτεται (εξαρτάται από το x)} \\ \text{ή} \\ \cancel{\omega x}+\omega\tau = 2\kappa\pi+\pi+\cancel{\omega x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2\kappa\pi+\pi}{\omega} \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{(2\kappa+1)\pi}{\omega}} \quad (B)$$

Άρα $\tau = \frac{\kappa\pi}{\omega}$ κ' για $\kappa=1$ έχουμε $T = \frac{\pi}{\omega}$



iv) $|\cos\omega x|$

$$f(x+\tau)=f(x) \Rightarrow |\cos\omega(x+\tau)| = |\cos\omega x|$$

$$\Rightarrow |\cos(\omega x+\omega\tau)| = |\cos\omega x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\omega x+\omega\tau)=\cos\omega x & (1) \\ \text{ή} \\ \cos(\omega x+\omega\tau)=-\cos\omega x=\cos(\pi-\omega x) & (2) \end{cases}$$

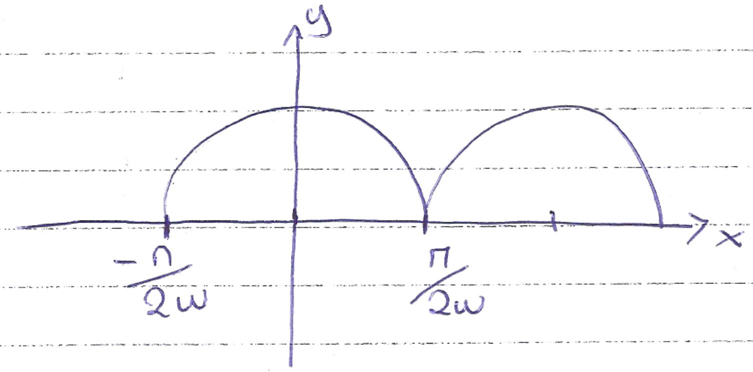
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\omega x}+\omega\tau=2\kappa\pi+\cancel{\omega x} \Leftrightarrow \boxed{\tau=\frac{2\kappa\pi}{\omega}} \ (A) \ \kappa\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \omega x+\omega\tau=2\kappa\pi-\omega x \ \text{Απορρίπτεται (εξαρτάται από το x)} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \omega x+\omega\tau=2\kappa\pi+\pi-\omega x \ \text{Απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ \cancel{\omega x}+\omega\tau=2\kappa\pi-\pi+\cancel{\omega x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau=\frac{2\kappa\pi-\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau=\frac{(2\kappa-1)\pi}{\omega}} \ (B) \ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Άρα γενικώς $\tau=\frac{\kappa\pi}{\omega}$ κ' για $\kappa=1 \Rightarrow \boxed{T=\frac{\pi}{\omega}}$



vi) $|\tan 2x|$

$$f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow |\tan 2(x+T)| = |\tan 2x|$$

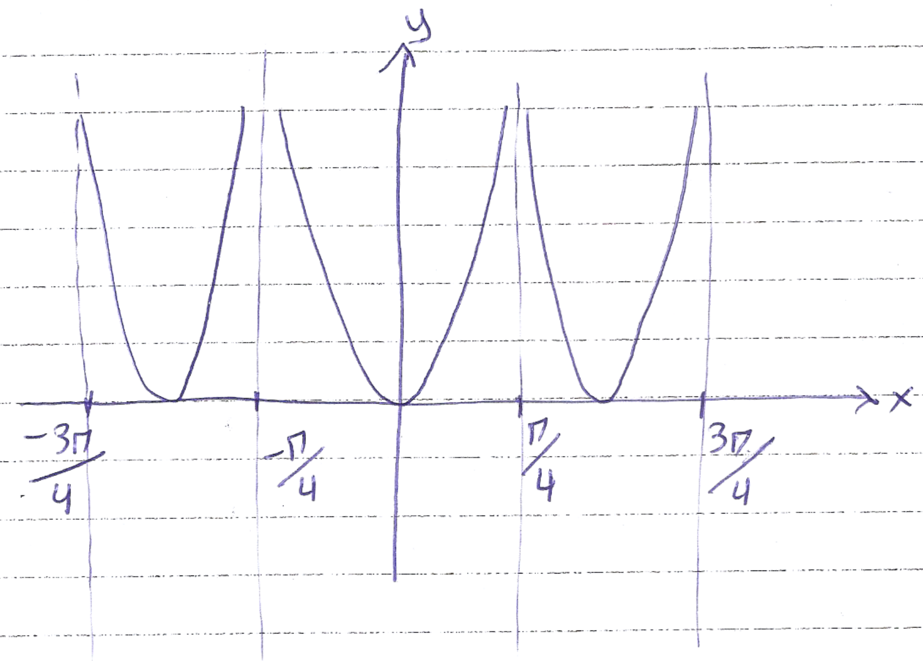
$$\Leftrightarrow |\tan(2x+2T)| = |\tan 2x|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(2x+2T) = \tan 2x & (1) \\ \text{ή} \\ \tan(2x+2T) = -\tan 2x = \tan(-2x) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \cancel{2x}+2T = \kappa\pi + \cancel{2x} \Leftrightarrow \boxed{T=\frac{\kappa\pi}{2}}$$

$(2) \Leftrightarrow 2x+2T = \kappa\pi - 2x$ Απορρίπτεται

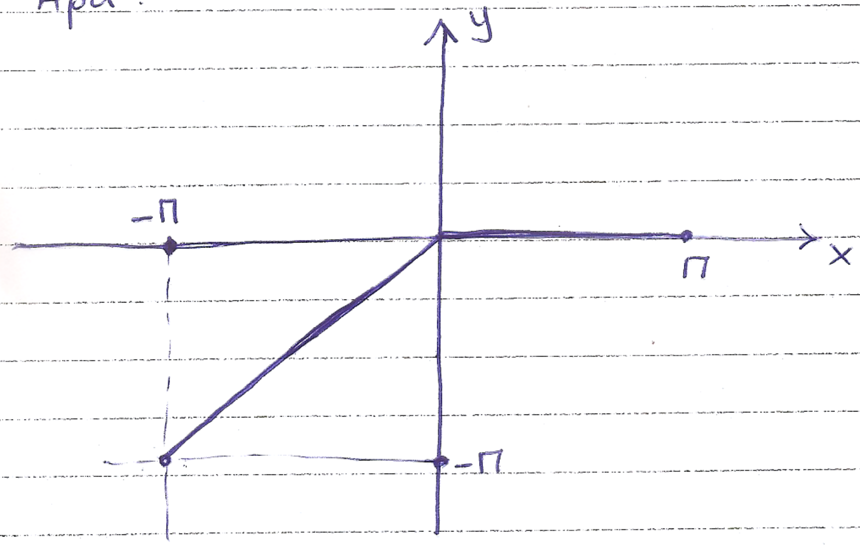
Για $\kappa=1$ έχουμε $T=\frac{\pi}{2}$



⑦ iii) $f(t) = \begin{cases} t & \text{αν } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{αν } 0 \leq t < \pi \end{cases}$

Η $f(t) = t$ είναι η διχοτόμος του $1^{ου}$ τεταρτημορίου

Άρα:

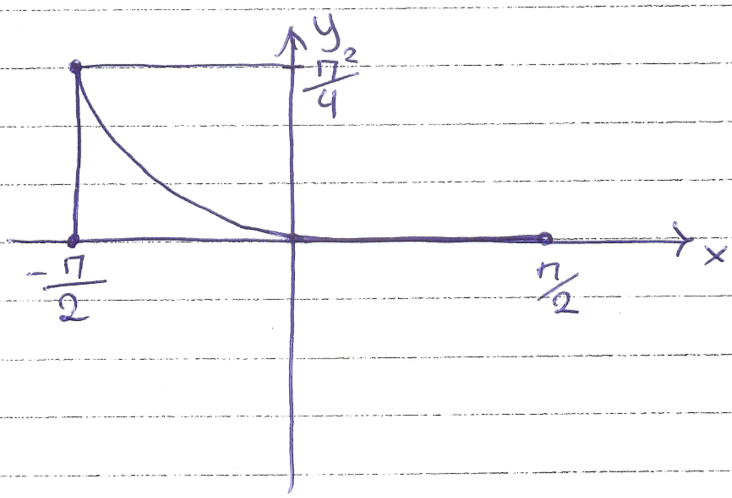


iv) $f(t)=\begin{cases} t^2 & \alpha\nu \ \frac{-\pi}{2} \leq t < 0 \\ 0 & \alpha\nu \ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

t	$\frac{-\pi}{2}$	0
$f(t)$	$\frac{\pi^2}{4}$	0

Η $f(t)=t^2$ είναι παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$ που στρέφει τα κοίλα άνω

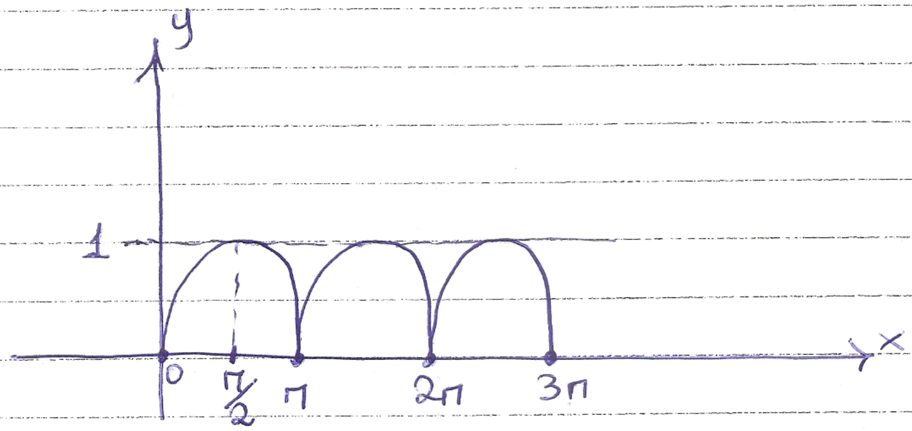
Άρα:



v) $f(t)=|\sin t|$

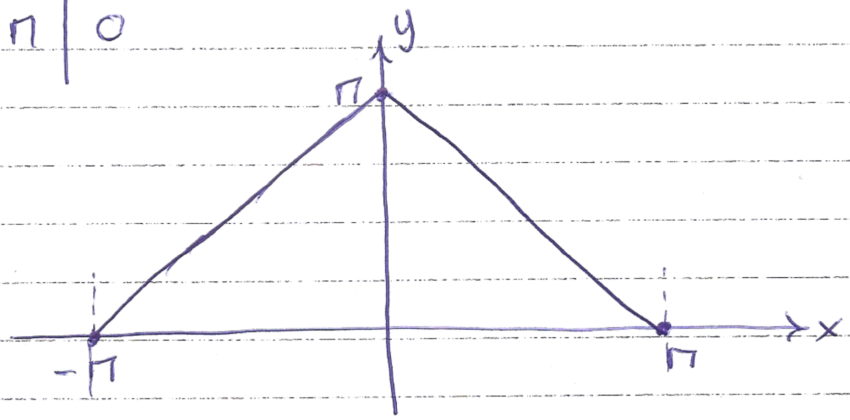
Όπως έδειξα στην άσκηση 6 η συνάρτηση $|\sin \omega x|$ έχει περίοδο $T=\frac{\pi}{\omega}$

Άρα η $f(t)=|\sin t|$, για $\omega=1$, έχει περίοδο $T=\pi$



vi) $f(t)=\begin{cases} \pi+t, & \text{αν } -\pi \leq t < 0 \\ \pi-t, & \text{αν } 0 \leq t < \pi \end{cases}$

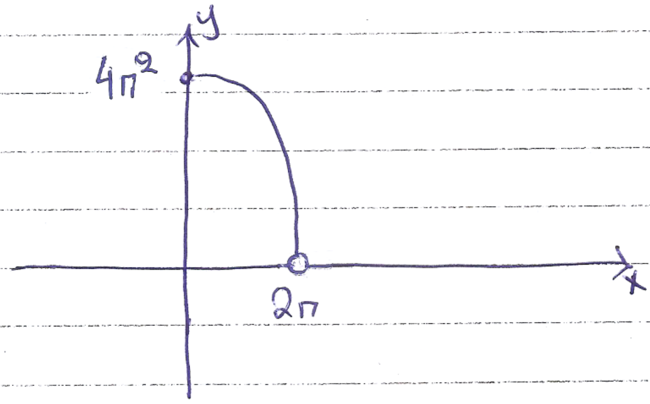
t	$-\pi$	0	π
$f(t)$	0	π	0



ii) $f(t)=4\pi^2-t^2$, αν $0\le t<2\pi$

$f(t)=-t^2+4\pi^2$ που είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\gamma$ με $\alpha<0$. Άρα είναι παραβολή, με κορυφή το $(0,4\pi^2)$ και στρέφει τα κοίλα κάτω.

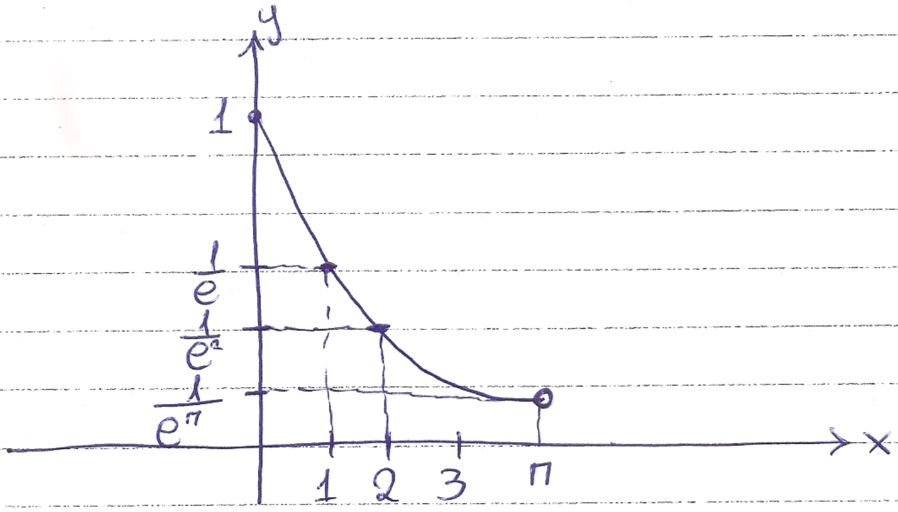
t	0	2π
$f(t)$	$4\pi^2$	0



i) $f(t) = e^{-t}$, για $0 \le t < \pi$

$f'(t) = -1 \cdot e^{-t} < 0 \Rightarrow f(t) \downarrow$

t	0	1	2	π
$f(t)$	1	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	$e^{-\pi} = \frac{1}{e^{\pi}}$



⑧ i) <u>Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$</u>

Με εφαρμογή της τέλειας επαγωγής έχουμε:

• Για $\kappa=1 \Rightarrow f(t)=f(t+T)$ που ισχύει, αφού η $f(t)$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T.

• Δέχομαι ότι ισχύει για τυχαίο φυσικό αριθμό ρ. δηλ. ότι $f(t+\rho T)=f(t)$ ①

• Θα δείξω ότι ισχύει και για $\kappa=\rho+1$, δηλ. $f[t+(\rho+1)T]=f(t)$

$$f[t+(\rho+1)T]=f(t+\rho T+T)=f((t+T)+\rho T)\overset{①}{=}$$

$$\Rightarrow f(t+T)=f(t)$$

Άρα $f(t)=f(t+\kappa T)$ για $\kappa \in \mathbb{N}$

Έστω $\kappa \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow -\kappa \in \mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$

Οπότε θα ισχύει $f(t-\kappa T)=f(t)$ και για $t=t+\kappa\pi$ έχουμε $f(t+\kappa T-\kappa T)=f(t+\kappa T)$
$\Rightarrow f(t)=f(t+\kappa T)$

ii) • Έστω $k \in \mathbb{N}$

Αρκεί να δείξω ότι $f(kt) = f(k(t+T))$

* Για $k=1$ έχω $f(t) = f(t+T)$ που ισχύει αφού $f(t)$ περιοδική

* Δέχομαι ότι ισχύει για $k=p$, δηλ. $f(pt) = f(p(t+T))$
$$= f(pt+pT) \quad (1)$$

* Θα δείξω ότι ισχύει και για $k=p+1$ δηλ.

$$f((p+1)t) = f((p+1)(t+T)) .$$

$$f((p+1)(t+T)) = f(pt+pT+t+T)$$
$$= f(t(p+1)+T(p+1))$$
$$\overset{(1)}{=} f(t(p+1))$$

• Αν $k \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow$

$-k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ισχύει $f(-kt) = f(-k(t+T))$
$$\Rightarrow f(kt) = f(-kt-kT)$$

Για $t = -t - T$ η σχέση γίνεται:

$$f(-k(-t-T)) = f(-k(-t-T)-kT)$$
$$f(kt+kT) = f(kt+\cancel{kT}-\cancel{kT})$$
$$f(kt+kT) = f(kt)$$
$$f(k(t+T)) = f(kt)$$

(9) $h(x) = (\kappa f + \lambda g)(x) = \kappa f(x) + \lambda g(x)$

Αρα $h(x+\tau) = \kappa f(x+\tau) + \lambda g(x+\tau) =$

$= \kappa f(x) + \lambda g(x)$

$= h(x)$

αφου f, g περιοδικες

$f(x+\tau) = f(x)$, $g(x+\tau) = g(x)$