

## Εργασία 4

# ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$ , όταν

$$i) \quad x + yi = (x - yi)^2 \qquad ii) \quad \frac{x}{1 + 2i} + \frac{y}{3 + 2i} = \frac{5 + 6i}{8i - 1}.$$

2. Να εκφραστεί οι παρακάτω μιγαδικός στη μορφή  $\alpha + \beta i$

$$\frac{(4 - i)^2 - 2(1 + 2i)}{(3 + i)^2(2 - 3i)}.$$

3. Αν  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 2 - i$  και  $z_3 = \sqrt{3} - i$ , να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{z_3}\right), \quad |z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_3| \quad \text{και} \quad z_1 (\bar{z}_1)^{-1} + \bar{z}_1 z_1^{-1}.$$

4. Να εκφραστεί συναρτήσει των μιγαδικών συζυγών συντεταγμένων η εξίσωση

$$x^2 + 16y^2 = 25.$$

5. Να υπολογιστεί ο παρακάτω μιγαδικός αριθμός και οι ρίζες να γραφούν στην πολική και την εκθετική μορφή

$$\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}.$$

6. Να λυθούν στο  $\mathbb{C}$  οι εξισώσεις

$$5z^2 + 2z + 10 = 0 \quad \text{και} \quad z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0.$$

7. Αν  $z \in \mathcal{C}$  να παρασταθούν γεωμετρικά οι μιγαδικοί (προαιρετική)

$$\bar{z}, \quad -z, \quad z^2, \quad \frac{1}{z} \quad \text{με } z \neq 0.$$

8. Όμοια (προαιρετική)

$$z_1 + z_2, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2},$$

όταν  $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$  με  $z_2 \neq 0$ .

6. Δείξτε ότι

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}.$$

7. Να προσδιοριστούν οι τιμές του  $z \in \mathcal{C}$  για τις οποίες ισχύει  $e^{-3z} = i$ .

8. Να υπολογιστεί τιμή του λογάριθμου των μιγαδικών αριθμών

$$i) \quad z = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i) \qquad ii) \quad z = 1 - i.$$

9. Δείξτε ότι

$$i) \quad (1 + i)^i = \left[ \cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \right] e^{-\frac{\pi}{4}},$$

$$ii) \quad |(-1)^{-i}| = e^{\frac{3\pi}{2}}.$$