ΤΜΗΜΑ : ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕΙ ΑΘΗΝΑΣ

Μάθημα : ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Ονομ/νυμο: Ειρήνη Φλεριανού

Αρ. Μητρώου : 13009

ΕΡΓΑΣΙΑ 4 : ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y όταν :

i) $x+yi=(x-yi)^2$ ii) $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{3+2i}=\frac{5+6i}{8i-1}$

i)

$$x+yi=(x-yi)^2 \Leftrightarrow x+yi=x^2-2xyi+y^2i^2 \Leftrightarrow x+yi=x^2-2xyi-y^2 \Leftrightarrow$$
$$x+yi=\left(x^2-y^2\right)-2xyi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2-y^2 (1) \\ y=-2xy \Leftrightarrow y+2xy=0 \Leftrightarrow y(1+2x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \eta \\ 1+2x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathrm{H}\,(1)\, \gamma\iota\alpha\ y=0 \Rightarrow x=x^2 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0\ \eta\ x=1$$

$$\mathrm{H}\,(1)\, \gamma\iota\alpha\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-y^2 \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-y^2 \Rightarrow y^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα οι λύσεις είναι : $(x,y)=(1,0),(0,0),\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii) $\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{3+2i}=\frac{5+6i}{8i-1} \Leftrightarrow$

$$\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{(5+6i)(8i+1)}{(8i-1)(8i+1)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x(1-2i)}{1+4}+\frac{y(3-2i)}{9+4}=\frac{(5+6i)(8i+1)}{-64-1} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x(1-2i)}{5}+\frac{y(3-2i)}{13}=\frac{(5+6i)(8i+1)}{-65} \Leftrightarrow$$
$$13x(1-2i)+5y(3-2i)=-(5+6i)(8i+1) \Leftrightarrow$$
$$13x-26i+15y-10yi=-40i-5+48-6i \Leftrightarrow$$
$$(13x+15y)-(26+10y)i=43-46i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x+15y=43 \\ 26+10y=46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x+15y=43 \\ 10y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x+30=43 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

2. Να εκφραστεί ο παρακάτω μιγαδικός στη μορφή α+βi : $\dfrac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2(2-3i)}$

$$\frac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2(2-3i)}=\frac{16-8i+i^2-2-4i}{(9+6i+i^2)(2-3i)}=\frac{16-8i-1-2-4i}{(9+6i-1)(2-3i)}=$$

$$\frac{13-12i}{(8+6i)(2-3i)}=\frac{13-12i}{16-24i+12i+18}=\frac{13-12i}{34-12i}=\frac{13-12i}{2(17-6i)}=$$

$$\frac{(13-12i)(17+6i)}{2(17-6i)(17+6i)}=\frac{221+81i-204i+72}{2(289+36)}=\frac{293-123i}{650}=\frac{293}{650}-\frac{123}{650}i$$

3. Αν $z_1=1-i, z_2=2-i\ \kappa\alpha\iota\ z_3=\sqrt{3}-i$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$\alpha)\operatorname{Re}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right),\ \beta)\left|z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_3\right|\ \kappa\alpha\iota\ \gamma)z_1\left(\overline{z_1}\right)^{-1}+\overline{z_1}z_1^{-1}$$

α)

$$\frac{z_1z_2}{z_3}=\frac{(1-i)(2-i)}{\sqrt{3}-i}=\frac{2-i-2i+i^2}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1-3i)\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}=\frac{\sqrt{3}+i-3\sqrt{3}i+3}{3+1}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+\frac{(1-3\sqrt{3})i}{4}$$

Άρα $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1z_2}{z_3}\right)=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

β)

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_3=(1-i)(2+i)+(1+i)(2-i)+\sqrt{3}-i=$$

$$=2+\cancel{i}-\cancel{2i}+1+2-\cancel{i}+\cancel{2i}+1+\sqrt{3}-i=$$

$$=\left(6+\sqrt{3}\right)-i$$

Άρα :

$$\left|z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_3\right|=\sqrt{\left(6+\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=$$

$$=\sqrt{36+12\sqrt{3}+3+1}=$$

$$=\sqrt{40+12\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{4(10+3\sqrt{3})}=$$

$$=2\sqrt{10+3\sqrt{3}}$$

γ)

$$z_1\left(\overline{z_1}\right)^{-1}+\overline{z_1}z_1^{-1}=\frac{z_1}{\overline{z_1}}+\frac{\overline{z_1}}{z_1}=\frac{z_1^2+\left(\overline{z_1}\right)^2}{\overline{z_1}\cdot z_1}=\frac{z_1^2+\left(\overline{z_1}\right)^2}{\left|z_1\right|^2} \qquad \left(z\overline{z}=\left|z\right|^2\right)$$

$$=\frac{\left(1-i\right)^2+\left(1+i\right)^2}{\sqrt{2}^2}=\frac{1-2i-1+1+2i-1}{2}=0$$

4. Να εκφραστεί συναρτήσει των μιγαδικών συζυγών συντεταγμένων η εξίσωση $x^2+16y^2=25$

$$x^2+16y^2=25 \Leftrightarrow x^2-16y^2i^2=25 \Leftrightarrow (x-4yi)(x+4yi)=25 (1)$$

Αν $z=x+4yi$ η (1) γράφεται : $z\cdot\overline{z}=25$

5. Να υπολογιστεί ο παρακάτω μιγαδικός αριθμός και οι ρίζες να γραφούν στην πολική και εκθετική μορφή $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}$

Έστω $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε :

$$\left|z\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

Άρα $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ και $z^2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$z^{2/3}=\cos\frac{2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}}{3}+i\sin\frac{2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}}{3} \quad \kappa=0,1,2$$

	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	ΠΟΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ
$\kappa=0 \quad z^{2/3}=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$	$e^{i\frac{2\pi}{9}}$	$1^{\underline{\vert 40}}$
$\kappa=1 \quad z^{2/3}=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$	$e^{i\frac{8\pi}{9}}$	$1^{\underline{\vert 160}}$
$\kappa=2 \quad z^{2/3}=\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}$	$e^{i\frac{14\pi}{9}}$	$1^{\underline{\vert 280}}$

6. Να λυθούν στο C οι εξισώσεις $5z^2+2z+10=0 \;\; και \;\; z^2+(i-2)z+(3-i)=0$

- $5z^2+2z+10=0$

  $\Delta = 4-200=-196=196i^2$

  Άρα : $z_{1,2}=\dfrac{-2\pm i\sqrt{196}}{10}=\dfrac{-2\pm 14i}{10}=\dfrac{-1\pm 7i}{5}=-\dfrac{1}{5}\pm\dfrac{7}{5}i$

- $z^2+(i-2)z+(3-i)=0$

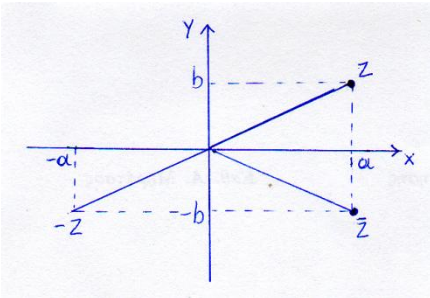
  $\Delta=(i-2)^2-4(3-i)=i^2-\cancel{4i}+4-12+\cancel{4i}=-1+4-12=-9$

  Άρα : $z_{1,2}=\dfrac{-i+2\pm i3}{2}\Rightarrow\begin{cases} z_1=\dfrac{-i+2+3i}{2}=\dfrac{2i+2}{2}=1+i \\ z_2=\dfrac{-i+2-3i}{2}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i \end{cases}$

7. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθούν γεωμετρικά οι μιγαδικοί $\bar{z},-z,z^2,\dfrac{1}{z}$

Έστω $z=a+bi$ τότε : $\bar{z}=a-bi,\ -z=-a-bi$.

Δηλ. ο συζυγής μιγαδικός είναι το συμμετρικό του z ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών x'x και ο αντίθετος του z είναι το συμμετρικό του z ως προς την αρχή των αξόνων O (σχ. 1).

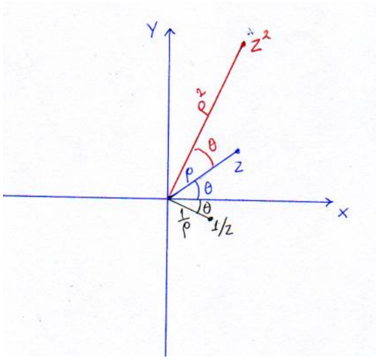


Σχήμα 1

Αν ο μιγαδικός z γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή :

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow\begin{cases} z^2=\rho^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta) \\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\rho}\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right] \end{cases}$$

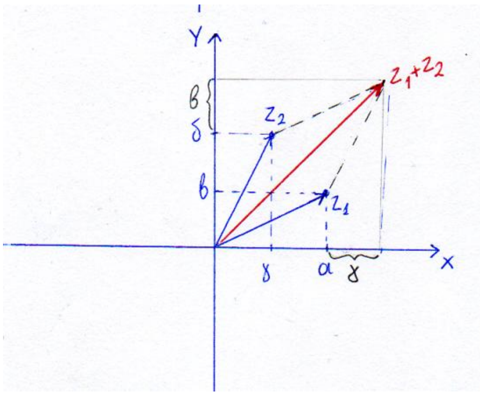
Έτσι ο z^2 έχει διανυσματική ακτίνα ρ^2 και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 2θ (δηλ. στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία θ) ενώ ο 1/z έχει διανυσματική ακτίνα 1/ρ και στρέφει την διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία –θ (δηλ. κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού) (δες σχ. 2)



Σχήμα 2

8. Όμοια $z_1+z_2,\ z_1z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$

Έστω $z_1=\alpha+\beta i, z_2=\gamma+\delta i$, τότε $z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ δηλ. είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων (σχ. 3)



Σχήμα 3

Αν

$$z_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$

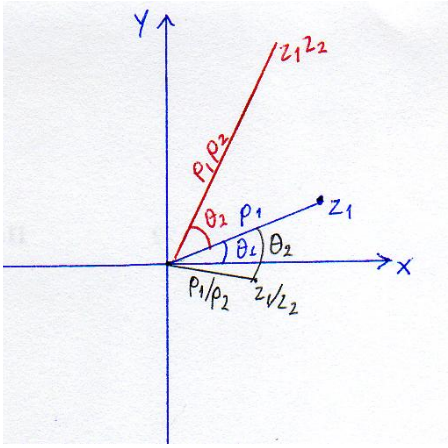
$$z_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

τότε

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right],\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right].$$

Δηλ. ο πολλαπλασιασμός του z_1 με τον z_2 είναι ένας μιγαδικός που έχει διανυσματική ακτίνα ίση με το γινόμενο των διανυσματικών ακτίνων και που προκύπτει αν στρέψουμε στο μιγαδικό επίπεδο τον z_1 κατά γωνία θ_2.

Αντίστοιχα, η διαίρεση του z_1 με τον z_2 είναι ένας μιγαδικός που έχει διανυσματική ακτίνα ίση με το πηλίκο των διανυσματικών ακτίνων και που προκύπτει αν στρέψουμε στο μιγαδικό επίπεδο τον z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ (σχήμα 4).



Σχήμα 4

9. Δείξτε ότι $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

Έστω $z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$. Τότε :

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$$

$$e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)} = \frac{e^{x_1 - x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2)}{(\cos y_2 + i\sin y_2)(\cos y_2 - i\sin y_2)} =$$

$$= \frac{e^{x_1 - x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2)}{\cos^2 y_2 - i^2 \sin^2 y_2} = \frac{e^{x_1 - x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2)}{\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2} =$$

$$= e^{x_1 - x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1 - x_2}\left(\cos y_1 \cdot \cos y_2 - i\cos y_1 \cdot \sin y_2 + i\sin y_1 \cdot \cos y_2 + \sin y_1 \cdot \sin y_2\right) =$$

$$= e^{x_1 - x_2}\left[\left(\cos y_1 \cdot \cos y_2 + \sin y_1 \cdot \sin y_2\right) + i\left(\sin y_1 \cdot \cos y_2 - \cos y_1 \cdot \sin y_2\right)\right] =$$

$$\overset{(*)}{=} e^{x_1 - x_2}\left[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)\right] = e^{z_1 - z_2} \quad \alpha\phi o\upsilon$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i \Rightarrow e^{z_1 - z_2} = e^{x_1 - x_2}\left[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)\right]$$

$$I\sigma\chi\upsilon\epsilon\iota \quad \left.\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \end{aligned}\right\}(*)$$

10. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $z \in \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει $e^{-3z} = i$

$$e^{-3z} = i \Leftrightarrow -3z = \ln i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{3}\ln i \quad (1)$$

Έστω z=0+1i, τότε :

$$|z| = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= 0 \\ \sin\theta &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Άρα $\ln i = \ln 1 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right) = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right),\ \kappa = 0, \pm 1, \ldots$

Έτσι η (1) γίνεται : $z=-\frac{1}{3}i\left(\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi\right),\ \kappa=0,\pm1,\ldots$

11. Να υπολογιστεί η τιμή του λογαρίθμου των μιγαδικών αριθμών :

i) $z=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)$ ii) $z=1-i$

i) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Άρα :

$$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\,(1)$$

$$\sin\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)(2)$$

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}\theta=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\\ \theta=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$\kappa=0\rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}\ ,\theta=-\frac{2\pi}{3}$$

$$\kappa=1\rightarrow\theta=2\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3},\theta=2\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$(2)\Rightarrow\begin{cases}\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\\ \theta=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

$$\kappa=0\rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3},\ \theta=\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$$

Άρα $Argz=\pi+\frac{\pi}{3}$

Επομένως :

$$\ln z=\ln|z|+i\left(Argz+2k\pi\right)\ \ k=0,\pm1,\ldots$$

$$\ln z=\ln1+i\left(\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=i\left(2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\quad k=0,\pm1,\ldots$$

ii) $z=1-i$

$$|z|=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}\theta=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ \theta=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\quad\text{(A)}$$

$$\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}\theta=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}\\ \theta=2\kappa\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{4}\end{cases}\quad\text{(B)}$$

(A) $\kappa=0\rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \theta=-\dfrac{\pi}{4}$

$\kappa=1\rightarrow\theta=2\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{9\pi}{4},\ \theta=2\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}$

(B) $\kappa=0\rightarrow\theta=-\dfrac{\pi}{4},\ \theta=\dfrac{5\pi}{4}$

$\kappa=1\rightarrow\theta=2\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4},\ \theta=2\pi+\dfrac{5\pi}{4}=\dfrac{13\pi}{4}$

Άρα $Argz=\dfrac{7\pi}{4}$

Επομένως :

$$\begin{aligned}\ln z&=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{7\pi}{4}+2\kappa\pi\right)\qquad\kappa=0,\pm1,\ldots\\&=\ln 2^{\frac{1}{2}}+i\left(\frac{7\pi}{4}+2\kappa\pi\right)\\&=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{7\pi}{4}+2\kappa\pi\right)\end{aligned}$$

12. Δείξτε ότι :

i) $\left(1+i\right)^{i}=\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{2}}$ ii) $\left|(-i)^{-i}\right|=e^{\frac{3\pi}{2}}$

i) Έστω α=1+i

Τότε :

$$|a|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Αν z=i ψάχνω το α^z.

$$a^{z}=e^{z\ln a}\Rightarrow\left(1+i\right)^{i}=e^{i\ln\left(1+i\right)}\ (1)$$

Όμως :

$$L\mathrm{n}\left(1+i\right)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}=\ln 2^{\frac{1}{2}}+i\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}\ (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\left(1+i\right)^{i}=e^{i\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{1}{2}\ln 2}\cdot e^{i^{2}\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\ln 2}{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}}\overset{(*)}{=}\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right]\cdot e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y\,(*)$$

ii) $(-i)^{-i}=e^{-i\ln(-i)}\ (1)$ $\qquad\qquad$ $\alpha\phi o\upsilon\ \alpha^{z}=e^{z\ln a}$

Έστω:

$$z=-i=0-1i$$

$$|z|=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta=\frac{0}{1}=0\\ \sin\theta=\frac{-1}{1}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}$$

Άρα : $L\mathrm{n}(-i)=\ln 1+i\frac{3\pi}{2}=i\frac{3\pi}{2}$ και η (1) γίνεται :

$$(-i)^{-i}=e^{-i^{2}\frac{3\pi}{2}}=e^{\frac{3\pi}{2}}$$

Επομένως $\left|(-i)^{-i}\right|=\left|e^{\frac{3\pi}{2}}\right|=e^{\frac{3\pi}{2}}$