ΕΡΓΑΣΙΑ 4 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

4.1 ΠΙΝΑΚΕΣ

1. Έστω Α, Β τετραγωνικοί πίνακες. Εξετάστε αν γενικά ισχύει $(AB)^2 = A^2B^2$ και δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στη συνέχεια υπολογίστε το ανάπτυγμα $(A+B)^2$

- Γενικά δεν ισχύει $(AB)^2 = A^2B^2$ αφού

$$(AB)^2 = AB \cdot AB$$
$$A^2B^2 = AA \cdot BB$$

και στους πίνακες δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλ. $AB \neq BA$.

Π.χ. Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Τότε : $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 12 & -48 \\ -24 & 108 \end{bmatrix}$ και $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 12 & -40 \\ -30 & 112 \end{bmatrix}$

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

2. Αν

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ δείξτε ότι

i) $(AB)^T = B^T A^T$ ii) $|AB| = |A||B|$.

Να γίνει επαλήθευση του αποτελέσματος και με το MATLAB

i) $(AB)^T = B^T A^T$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1\cdot 2+0\cdot(-1)+2\cdot 2 & -1\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+0\cdot 1+2\cdot 1 \\ 1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot 2 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+3\cdot 1 \\ -2\cdot 2+1\cdot(-1)+1\cdot 2 & -2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1) & -2\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 9 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Άρα $(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 2 & -1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) & -1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 3\cdot 2 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ -2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 & -2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) & -2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 9 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

<u>ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΕ ΤΟ MATLAB (*)</u>

```
--> A = [-1 0 2 ; 1 -1 3 ; -2 1 1];

--> B = [2 1 -1 ; -1 0 1 ; 2 -1 1];

--> transpose(A*B)

ans =

  2  9 -3

 -3 -2 -3

  3  1  4

--> transpose(B)*transpose(A)

ans =

  2  9 -3

 -3 -2 -3

  3  1  4
```

ii) $|AB| = |A||B|$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 9 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ άρα}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 9 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-8+3) + 3(36+3) + 3(-27-6) = -10 + 117 - 99 = 8$$

(*) Οι επαληθεύσεις έχουν γίνει με το FreeMat

$$|A||B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) \cdot \left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left[-1(-4) + 2(-1)\right] \cdot \left[2 \cdot 1 - 1(-3) - 1 \cdot 1\right]$$

$$= 2 \cdot 4 = 8$$

<u>ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΕ ΤΟ MATLAB (*)</u>

```
-->A = [-1 0 2 ; 1 -1 3 ; -2 1 1];

--> B = [2 1 -1 ; -1 0 1 ; 2 -1 1];

--> det(A*B)

ans =

   8.0000

--> det(A)*det(B)

ans =

 8
```

3. Όμοια, αν

$A = \begin{bmatrix} -1+i & i \\ i & 1+i \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$ ότι

i) $(A+B)^H = A^H + B^H$ ii) $(AB)^H = B^H A^H$.

i) $(A+B)^H = A^H + B^H$

$$A+B = \begin{bmatrix} -1+i & i \\ i & 1+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+i+2+i & i+1 \\ \cancel{i}+1-\cancel{i} & 1+i+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2i & 1+i \\ 1 & 3+i \end{bmatrix}$$

Άρα $\overline{A+B} = \begin{bmatrix} 1-2i & 1-i \\ 1 & 3-i \end{bmatrix}$ και $\boxed{(A+B)^H = \begin{bmatrix} 1-2i & 1 \\ 1-i & 3-i \end{bmatrix}}$

Όμως $\overline{A} = \begin{bmatrix} -1-i & -i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$ και $\overline{B} = \begin{bmatrix} 2-i & 1 \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$. Άρα

$A^H = \begin{bmatrix} -1-i & -i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$ και $B^H = \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (1). Επομένως :

$$A^H + B^H = \begin{bmatrix} -1-i & -i \\ -i & 1-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i+2-i & -i+1+i \\ 1-i & 1-i+2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A^H + B^H = \begin{bmatrix} 1-2i & 1 \\ 1-i & 3-i \end{bmatrix}}$$

<u>ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΕ ΤΟ MATLAB (*)</u>

```
--> A = [-1+i i ; i 1+i]

A =

  -1.0000 +  1.0000i   0.0000 +  1.0000i

   0.0000 +  1.0000i   1.0000 +  1.0000i

--> B = [2+i 1 ; 1-i 2]

B =

   2.0000 +  1.0000i   1.0000 +  0.0000i

   1.0000 -  1.0000i   2.0000 +  0.0000i

--> (A+B)'

ans =

   1.0000 -  2.0000i   1.0000 + -0.0000i

   1.0000 -  1.0000i   3.0000 -  1.0000i

--> A'+B'

ans =

   1.0000 -  2.0000i   1.0000 +  0.0000i

   1.0000 -  1.0000i   3.0000 -  1.0000i
```

ii) $(AB)^H = B^H A^H$

$$AB = \begin{bmatrix} -1+i & i \\ i & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1+i)(2+i)+i(1-i) & -1+i+2i \\ i(2+i)+(1+i)(1-i) & i+2(1+i) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \cancel{-i} + 2i + \cancel{i^2} + \cancel{i} \cancel{-i^2} & -1+3i \\ 2i + \cancel{i^2} + 1 \cancel{-i^2} & i+2+2i \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2+2i & -1+3i \\ 1+2i & 2+3i \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} -2-2i & -1-3i \\ 1-2i & 2-3i \end{bmatrix}$$

Άρα $(AB)^H = \begin{bmatrix} -2-2i & 1-2i \\ -1-3i & 2-3i \end{bmatrix}$.

$A^H = \begin{bmatrix} -1-i & -i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$ και $B^H = \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ [δες σχέση (1) ερώτημα (i)]. Επομένως

$$B^H A^H = \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1-i & -i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2-i)(-1-i)-i(1+i) & -i(2-i)+(1+i)(1-i) \\ -1-i-2i & -1-i+2(1-i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-2i+i+i^2-i-i^2 & -2i+i^2+1-i^2 \\ -1-3i & -i+2-2i \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$B^H A^H = \begin{bmatrix} -2-2i & 1-2i \\ -1-3i & 2-3i \end{bmatrix}$$

<u>ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΕ ΤΟ MATLAB (*)</u>

```
--> A = [-1+i i ; i 1+i]

A =

  -1.0000 +  1.0000i   0.0000 +  1.0000i

   0.0000 +  1.0000i   1.0000 +  1.0000i

--> B = [2+i 1; 1-i 2]

B =

   2.0000 +  1.0000i   1.0000 +  0.0000i

   1.0000 -  1.0000i   2.0000 +  0.0000i

--> (A*B)'

ans =

  -2.0000 -  2.0000i   1.0000 -  2.0000i

  -1.0000 -  3.0000i   2.0000 -  3.0000i

--> B'*A'

ans =

  -2.0000 -  2.0000i   1.0000 -  2.0000i

  -1.0000 -  3.0000i   2.0000 -  3.0000i
```

(*) Οι επαληθεύσεις έχουν γίνει με το FreeMat

4. Να προσδιοριστούν τα α, β και γ, έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -1 & a & -\beta \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

να είναι Ερμιτιανός. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η ορίζουσά του. Τι παρατηρείτε;

Έστω $A=\begin{bmatrix} -1 & a & -\beta \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$. Τότε $A^H=\begin{bmatrix} -1 & 3+5i & -i \\ \overline{\alpha} & 0 & 2-4i \\ \overline{-\beta} & \overline{\gamma} & 2 \end{bmatrix}$.

Για να είναι Ερμιτιανός ο Α πρέπει $A=A^H$. Δηλ.

$$\begin{cases} \alpha = 3+5i \\ -\beta = -i \\ \gamma = 2-4i \\ \overline{\alpha} = 3-5i \\ \overline{-\beta} = i \\ \overline{\gamma} = 2+4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3+5i \\ \beta = i \\ \gamma = 2-4i \end{cases}$$

Έτσι ο Α είναι :

$A=\begin{bmatrix} -1 & 3+5i & -i \\ 3-5i & 0 & 2-4i \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$ και επομένως η ορίζουσά του θα είναι :

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} -1 & 3+5i & -i \\ 3-5i & 0 & 2-4i \\ i & 2+4i & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -1\begin{vmatrix} 0 & 2-4i \\ 2+4i & 2 \end{vmatrix} - (3+5i)\begin{vmatrix} 3-5i & 2-4i \\ i & 2 \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} 3-5i & 0 \\ i & 2+4i \end{vmatrix} \\
&= (2-4i)(2+4i)-(3+5i)\left[2(3-5i)-i(2-4i)\right]-i(3-5i)(2+4i) \\
&= 4+16-(3+5i)(6-10i-2i-4)-i(6+12i-10i+20) \\
&= 20-(3+5i)(2-12i)-i(26+2i) \\
&= 20-(6-36i+10i+60)-26i+2 \\
&= 20-6+36i-10i-60-26i+2 \\
&= -44
\end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι η ορίζουσα ενός Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικός αριθμός.

4.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $A = diag(a_{ii})$ με $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1,...,4$, δείξτε ότι $A^{-1} = diag\left(a_{ii}^{-1}\right)$

1ος τρόπος

Έστω Α ένας διαγώνιος 4 x 4 πίνακας. Δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Τότε :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}a_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}a_{33}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}a_{44}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Άρα $A^{-1} = B$

2ος τρόπος

Έστω Α ένας διαγώνιος 4 x 4 πίνακας. Δηλ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}. \text{ Τότε } A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A).$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \neq 0$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{44} \qquad C_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} \cdot a_{33} \cdot a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}} \begin{bmatrix} a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} \cdot a_{33} \cdot a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{-1} \end{bmatrix}$$

4.3 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς διάταξη το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Να γίνει επαλήθευση του αποτελέσματος και με το MATLAB

<u>ΒΗΜΑ 1</u>

Εξίσωση 2 : = $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2(x_1 + x_2 + x_3) = 5 - 0$

Εξίσωση 3 := $3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = -3 - 0$

Δηλ.

Εξίσωση 2 : = $-3x_2 + 2x_3 = 5$

Εξίσωση 3 := $-x_2 - 4x_3 = -3$

Οπότε το σύστημα γράφεται :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -x_2 - 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

<u>ΒΗΜΑ 2</u>

Εξίσωση 3 := $-x_2 - 4x_3 - \frac{1}{3}\left(-3x_2 + 2x_3\right) = -3 - \frac{1}{3} \cdot 5$

Δηλ.

Εξίσωση 3:=

$$\begin{aligned} & -4x_3 - \frac{2}{3} = -3 - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \\ & -12x_3 - 2x_3 = -9 - 5 \Leftrightarrow \\ & -14x_3 = -14 \Leftrightarrow \\ & x_3 = 1 \end{aligned}$$

<u>ΒΗΜΑ 3</u>

Από την εξίσωση 2 έχουμε :

$-3x_2 + 2\cdot 1 = 5 \Leftrightarrow$

$-3x_2 = 3 \Leftrightarrow$

$x_2 = -1$

ΒΗΜΑ 4

Από την εξίσωση 1 έχουμε :

$x_1 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

Άρα η λύση του συστήματος είναι : $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 1)$

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΕ ΤΟ MATLAB (*)

```
--> A = [1 1 1; 2 -1 4; 3 2 -1]

A =

  1  1  1

  2 -1  4

  3  2 -1

--> b = [0; 5; -3]

b =

  0

  5

 -3

--> x = inv(A)*b

x =

   -0.0000

   -1.0000

    1.0000
```

(*) Οι επαληθεύσεις έχουν γίνει με το FreeMat