ΛΟΓΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ-ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

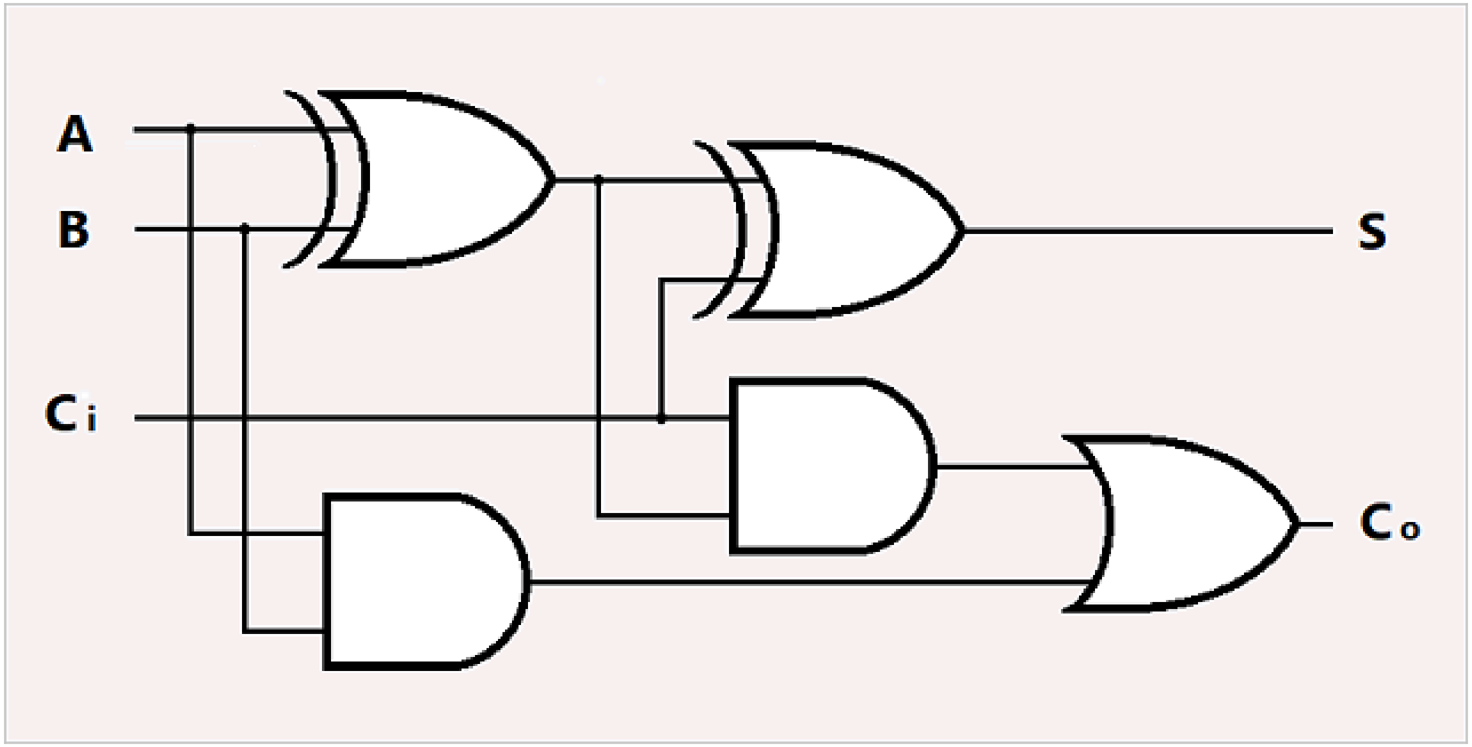
Λογικό κύκλωμα

Λογικό κύκλωμα ονομάζεται το κύκλωμα που εκτελεί λογικές πράξεις στα σήματα εισόδου του. Τα λογικά κυκλώματα μπορεί να είναι συνδυαστικά ή ακολουθιακά.

Συνδυαστικά λογικά κυκλώματα

Ένα λογικό κύκλωμα με n γραμμές εισόδου και m γραμμές εξόδου, ονομάζεται ***συνδυαστικό*** (*combinational*) εάν οι τιμές των εξόδων σε δεδομένη χρονική στιγμή εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παρούσες τιμές των εισόδων και εκφράζονται με λογικές παραστάσεις.

Συνδυαστικό λογικό κύκλωμα



Άλγεβρα Boole

Η **σχεδίαση των ψηφιακών συστημάτων** βασίζεται στην Άλγεβρα των Διακοπτών (Switching Algebra). Η Άλγεβρα των Διακοπτών μπορεί να θεωρηθεί σαν μία ειδική περίπτωση της Άλγεβρας Boole (Boolean Algebra).

Άλγεβρα Boole είναι μια αλγεβρική δομή, η οποία αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων *B* εφοδιασμένο με πράξεις, η αναπαράσταση των οποίων γίνεται με τη χρήση των τελεστών **+,** ·, ¯ και πληρεί τα αξιώματα που δίδονται στην συνέχεια.

Βασικά αξιώματα της Άλγεβρας Boole

Α.1. *Κλειστότητα* του Β ως προς τις πράξεις **+, ·**

$x+y \in B, \quad x \cdot y \in B \qquad (\in$: ανήκει)

Α.2. *Ύπαρξη ουδετέρων στοιχείων* για τις πράξεις +, ·

$x+0 = x, \quad x \cdot 1 = x$

Α.3. *Αντιμεταθετική ιδιότητα*

$x+y=y+x, \quad x \cdot y=y \cdot x$

Α.4. Προσεταιρισμού

$x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$

Α.5. Επιμεριστική ιδιότητα

$x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z, \quad x+y \cdot z=(x+y) \cdot (x+z)$

A.6. Ύπαρξη συμπληρώματος

$$x + \overline{x} = 1 \qquad x \cdot \overline{x} = 0$$

A.7. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία *x*, *y* $\in$B, τέτοια ώστε: *x* $\neq$ *y*.

Θεώρημα 3.1. Δυϊσμού

Έστω ότι ισχύει μια πρόταση της Άλγεβρας Boole, τότε ισχύει και η δυική της πρόταση, δηλαδή αυτή που προκύπτει με την εναλλαγή του **+** με το · και του 0 με το 1.

Θεώρημα 3.2. Μοναδικότητας

α) Τα στοιχεία 0 και 1 είναι μοναδικά.

β) Το συμπλήρωμα $\overline{x}$ του *x* είναι μοναδικό.

Βασικά θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Θ3.3. $x+x=x, \quad x \cdot x=x$

Θ3.4. $x+1=1, \quad x \cdot 0=0$

Θ3.5. $\overline{0}=1 \qquad \overline{1}=0$

Θ3.6. Απορρόφησης

$x+x \cdot y=x, \quad x \cdot (x+y)=x$

Θ3.7. $\overline{\overline{x}}=x$

Θ3.8. $x+\overline{x} \cdot y=x+y \qquad x \cdot (\overline{x}+y)=x \cdot y$

Θ3.9. De Morgan

$$\overline{x+y}=\overline{x} \cdot \overline{y} \qquad \overline{x \cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$$

Θ3.10. $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = x$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x$$

Θ3.11. Θεώρημα De Morgan για πολλές μεταβλητές

$$\overline{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \ldots \cdot x_0} = \overline{x_{n-1}} + \overline{x_{n-2}} + \ldots + \overline{x_0}$$

$$\overline{x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_0} = \overline{x_{n-1}} \cdot \overline{x_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \overline{x_0}$$

Άλγεβρα των διακοπτών

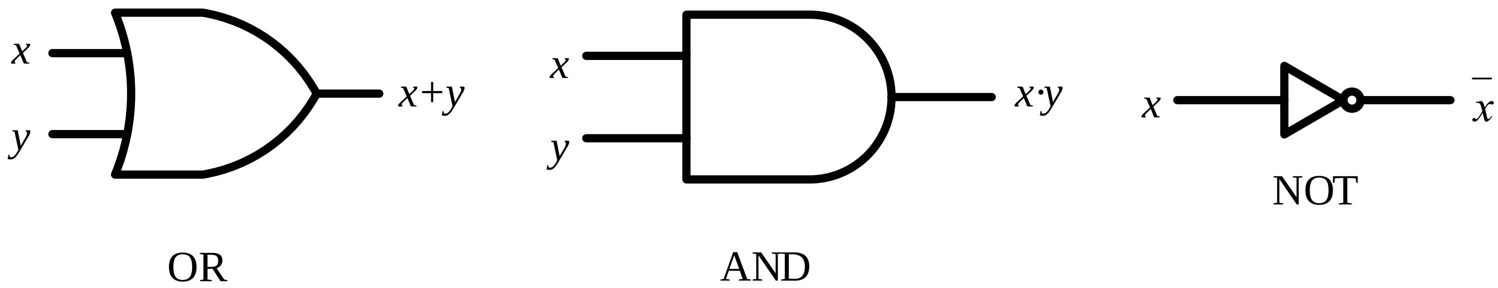
Η *Άλγεβρα Διακοπτών* είναι ένα σύνολο B = {0,1} το οποίο είναι εφοδιασμένο με τις λογικές πράξεις **+**, **·**, και $\overline{}$, οι οποίες για κάθε x, $y \in$ {0,1} ορίζονται όπως στην συνέχεια

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Βασικές λογικές πύλες



Λογικές συναρτήσεις, πίνακες αληθείας

Λογικές συναρτήσεις *n* μεταβλητών

$$f(x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$$

είναι μονοσήμαντες απεικονίσεις του τύπου

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\{0, 1\}^n = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$$

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε μια λογική συνάρτηση. Από αυτούς, δίδονται στη συνέχεια οι δύο βασικοί, που είναι οι παραστάσεις με **πίνακες αληθείας** και με **λογικές παραστάσεις**.

Πίνακας Αληθείας (*Truth Table*) μιας λογικής συνάρτησης είναι ένας πίνακας ο οποίος περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών των μεταβλητών της και για κάθε συνδυασμό δίνεται η τιμή της συνάρτησης.

x	y	f
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Παράδειγμα.

Πίνακας αληθείας λογικής συνάρτησης δύο μεταβλητών f(x, y) της οποίας η τιμή γίνεται 1 όταν ο αριθμός των μεταβλητών της με τιμή 1 είναι άρτιος (even) αριθμός.

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Το **0** θεωρείται άρτιος αριθμός

Παράδειγμα

Πίνακας αληθείας λογικής συνάρτησης τριών μεταβλητών της οποίας η τιμή γίνεται 1 όταν ο αριθμός των μεταβλητών της με τιμή 1 είναι άρτιος αριθμός.

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Το **0** θεωρείται άρτιος αριθμός

Λογικές παραστάσεις

Οι ***λογικές παραστάσεις*** (***switching expressions***) χρησιμοποιούνται για να περιγραφούν αλγεβρικά πλήρως καθορισμένες λογικές συναρτήσεις με τον ίδιο τρόπο που οι αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των αλγεβρικών συναρτήσεων.

Οι λογικές παραστάσεις είναι παρόμοιες με αλγεβρικές παραστάσεις με μόνη την διαφορά της χρήσης του επί πλέον τελεστή συμπληρώματος.

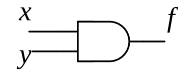
Λογικές πύλες

Η υλοποίηση των λογικών παραστάσεων γίνεται με την κατάλληλη σύνδεση λογικών πυλών.

Λογικές πύλες (*logic gates*) είναι κυκλώματα που υλοποιούν απλές λογικές συναρτήσεις.

Βασικές Λογικές Πύλες

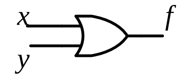
AND



$f = x \cdot y$

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

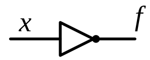
OR



$f = x + y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

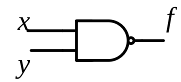
Inverter



$f = \overline{x}$

x	f
0	1
1	0

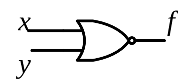
NAND



$f = \overline{x \cdot y}$

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

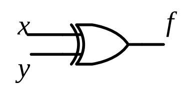
NOR



$f = \overline{x + y}$

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

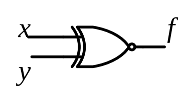
XOR



$f = x \oplus y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR

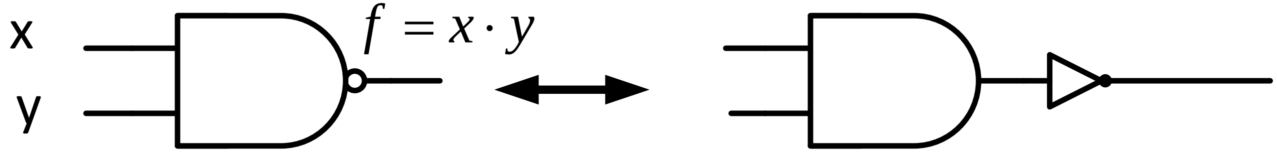


$f = \overline{x \oplus y}$

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

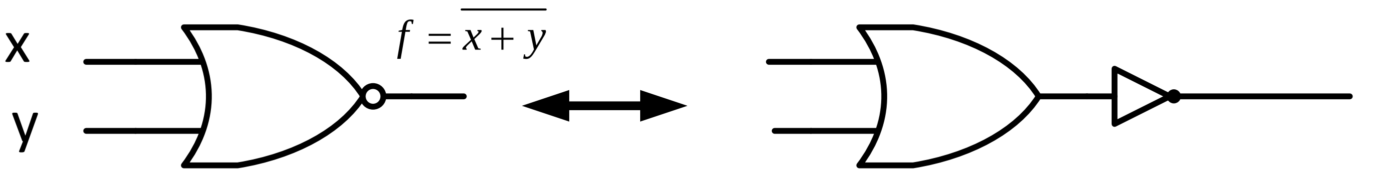
Πύλη NAND δύο εισόδων

$$f = \overline{x \cdot y}$$



x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

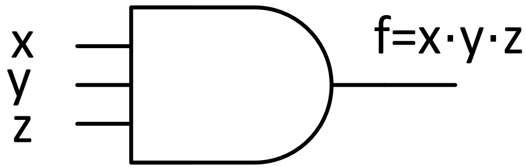
Πύλη NOR δύο εισόδων



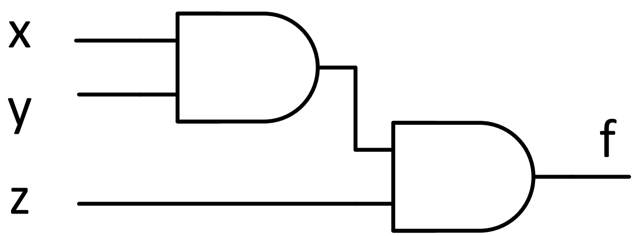
$f = \overline{x + y}$

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Πύλη AND τριών εισόδων

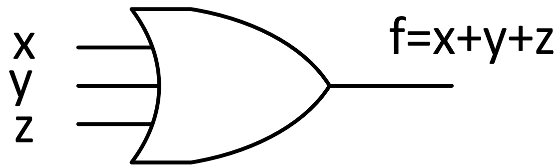


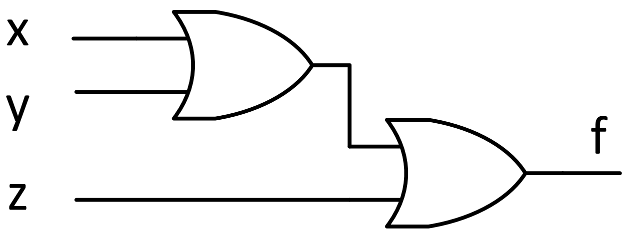
$$x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$$



x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

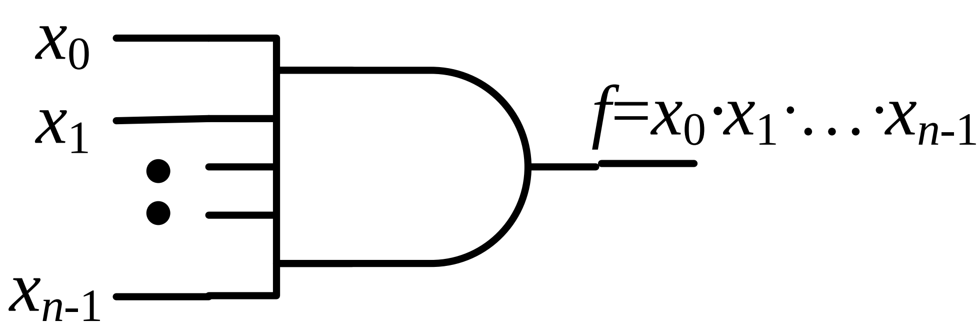
Πύλη OR τριών εισόδων

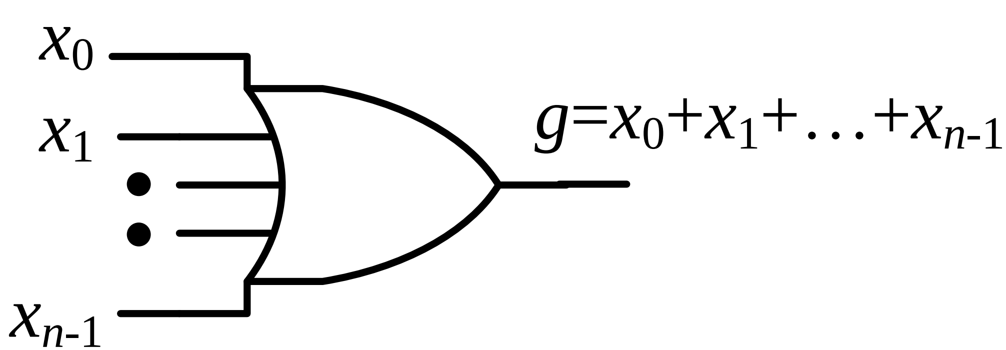




x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

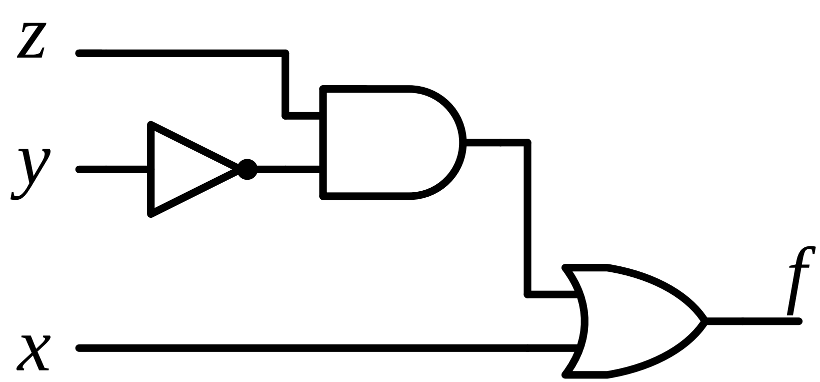
Λογικές πύλες AND OR με *n* εισόδους





Υλοποίηση με λογικές πύλες AND, OR, NOT της λογικής παράστασης

$$f(x,y,z) = x + \overline{y} \cdot z = x + (\overline{y} \cdot z)$$



Ελαχιστόροι

Ελάχιστος όρος *ή* ***ελαχιστόρος*** (*minimum term ή minterm*) *n* μεταβλητών είναι ένα λογικό γινόμενο στο οποίο εμφανίζεται κάθε μεταβλητή ή το συμπλήρωμά της.

Ένας ελαχιστόρος έχει την τιμή 1 όταν όλοι οι όροι που τον αποτελούν έχουν την τιμή 1, δηλαδή όταν οι μη συμπληρωματικές μεταβλητές πάρουν την τιμή 1 και οι συμπληρωματικές την τιμή 0.

Ελαχιστόροι δύο μεταβλητών

x	y	f
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

$$m_0 = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$m_1 = \overline{x} \cdot y$$

$$m_2 = x \cdot \overline{y}$$

$$m_3 = x \cdot y$$

Ελαχιστόροι τριών μεταβλητών

x	y	z	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$$m_0 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

$$m_1 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$$

$$m_2 = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$$

$$m_3 = \overline{x} \cdot y \cdot z$$

$$m_4 = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

$$m_5 = x \cdot \overline{y} \cdot z$$

$$m_6 = x \cdot y \cdot \overline{z}$$

$$m_7 = x \cdot y \cdot z$$

Τιμές ελαχιστόρων δύο μεταβλητών

j	$x\ y$	m_0 $\bar{x}\,\bar{y}$	m_1 $\bar{x}\,y$	m_2 $x\,\bar{y}$	m_3 $x\,y$
0	0 0	1	0	0	0
1	0 1	0	1	0	0
2	1 0	0	0	1	0
3	1 1	0	0	0	1

Τιμές ελαχιστόρων τριών μεταβλητών

j	$x\ y\ z$	m_0 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_1 $\bar{x}\bar{y}z$	m_2 $\bar{x}y\bar{z}$	m_3 $\bar{x}yz$	m_4 $x\bar{y}\bar{z}$	m_5 $x\bar{y}z$	m_6 $xy\bar{z}$	m_7 xyz
0	0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

Εξαγωγή λογικής παράστασης σαν άθροισμα ελαχιστόρων από τον πίνακα αληθείας

x	y	f	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	1	$x \cdot \overline{y}$
1	1	1	$x \cdot y$

$$f = x \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

Εξαγωγή λογικής παράστασης σαν άθροισμα ελαχιστόρων από τον πίνακα αληθείας

x	y	z	f	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

$$f = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

Παράδειγμα. Να απεικονισθεί σε πίνακα αληθείας το άθροισμα ελαχιστόρων που δίδεται στην συνέχεια

$$f = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz$$

Υπόδειξη

x	y	z	f	
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		$\bar{x}y\bar{z}$
0	1	1		$\bar{x}yz$
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		$xy\bar{z}$
1	1	1		xyz

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Μεγιστόροι

Μέγιστος όρος ή μεγιστόρος (*maximum term ή maxterm*) *n* μεταβλητών είναι λογικό άθροισμα *n* literals στο οποίο εμφανίζεται κάθε μεταβλητή ή το συμπλήρωμά της.

Ένας μεγιστόρος έχει την τιμή 0 όταν όλα τα literals που τον αποτελούν έχουν την τιμή 0, δηλαδή όταν οι μη συμπληρωματικές μεταβλητές παίρνουν την τιμή 0 και οι συμπληρωματικές την τιμή 1.

Μεγιστόροι δύο μεταβλητών

x	y	f
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

$$M_0 = x + y$$

$$M_1 = x + \overline{y}$$

$$M_2 = \overline{x} + y$$

$$M_3 = \overline{x} + \overline{y}$$

Μεγιστόροι τριών μεταβλητών

x	y	z	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$$M_0 = x + y + z$$
$$M_1 = x + y + \overline{z}$$
$$M_2 = x + \overline{y} + z$$
$$M_3 = x + \overline{y} + \overline{z}$$
$$M_4 = \overline{x} + y + z$$
$$M_5 = \overline{x} + y + \overline{z}$$
$$M_6 = \overline{x} + \overline{y} + z$$
$$M_7 = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

Τιμές μεγιστόρων δύο μεταβλητών

j	$x\ y$	M_0 $x+y$	M_1 $x+\overline{y}$	M_2 $\overline{x}+y$	M_3 $\overline{x}+\overline{y}$
0	0 0	0	1	1	1
1	0 1	1	0	1	1
2	1 0	1	1	0	1
3	1 1	1	1	1	0

Τιμές μεγιστόρων τριών μεταβλητών

j	$x\ y\ z$	M_0 $x+y+z$	M_1 $x+y+\bar{z}$	M_2 $x+\bar{y}+z$	M_3 $x+\bar{y}+\bar{z}$	M_4 $\bar{x}+y+z$	M_5 $\bar{x}+y+\bar{z}$	M_6 $\bar{x}+\bar{y}+z$	M_7 $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$
0	0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

Εξαγωγή λογικής παράστασης σαν γινόμενο μεγιστόρων από τον πίνακα αληθείας

x_2	x_1	x_0	f	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(x_2 + \bar{x}_1 + x_0)$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$(\bar{x}_2 + x_1 + x_0)$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

$$f = (x_2 + \bar{x}_1 + x_0) \cdot (\bar{x}_2 + x_1 + x_0)$$

Θεώρημα 3.14. Κάθε ελάχιστος όρος είναι συμπλήρωμα του αντίστοιχου μέγιστου όρου και αντιστρόφως.

Θεώρημα 3.15. Το λογικό άθροισμα όλων των ελαχίστων όρων είναι ίσο με 1, όπου *n* είναι ο αριθμός των μεταβλητών.

Θεώρημα 3.16. Το λογικό γινόμενο όλων των μέγιστων όρων ισούται με 0, όπου *n* είναι ο αριθμός των μεταβλητών.

Ισοδύναμες λογικές παραστάσεις

Οι λογικές συναρτήσεις μπορεί να αναπαρασταθούν συνήθως με περισσότερες από μία λογικές παραστάσεις. Δύο λογικές παραστάσεις λέγονται ***ισοδύναμες*** (*equivalent*) εάν αναπαριστούν την ίδια λογική συνάρτηση.

Είναι προφανές ότι το σύνολο των λογικών παραστάσεων μπορεί να χωριστεί σε ***κλάσεις***, τα μέλη των οποίων αναπαριστούν την ίδια λογική συνάρτηση.

Κανονική μορφή λογικών συναρτήσεων

Τα αθροίσματα ελαχιστόρων και τα γινόμενα μεγιστόρων είναι οι *κανονικές παραστάσεις* (*canonical forms*) των λογικών συναρτήσεων.
Για να μετατραπεί μία λογική παράσταση στην κανονική μορφή συνάρτησης στην οποία αντιστοιχεί, δηλαδή σαν άθροισμα ελαχιστόρων ή σαν γινόμενο μεγιστόρων μετατρέπεται αρχικά σε άθροισμα γινομένων ή σε γινόμενο αθροισμάτων.

Μετατροπή λογικών παραστάσεων στην αντίστοιχη κανονική

Η παράσταση είναι εκφρασμένη σαν άθροισμα γινομένων.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της συνάρτησης με, $x_i + \bar{x}_i (=1)$ όπου x_i είναι οι μεταβλητές που λείπουν από τον όρο και στη συνέχεια εκτελούμε τις λογικές πράξεις μέχρι να καταλήξουμε σε άθροισμα ελαχιστόρων.

Παράδειγμα. Να μετατραπεί η λογική παράσταση

$$f = xy + yz$$

στην κανονική της μορφή σαν άθροισμα ελαχιστόρων.

Υπόδειξη

$$f = xy + yz$$

$$= xy1 + 1yz = xy(z + \overline{z}) + (x + \overline{x})yz$$

$$= xyz + xy\overline{z} + xyz + \overline{x}yz$$

$$= \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$$

$$= m_3 + m_6 + m_7 = \Sigma(3, 6, 7)$$

Παράδειγμα 3.13. Να μετατραπεί η λογική παράσταση

$$f = x_1\bar{x}_0 + x_2$$

στην κανονική της μορφή σαν άθροισμα ελαχιστόρων.

$$f = x_1\bar{x}_0 + x_2$$

$$= (x_2 + \bar{x}_2)x_1\bar{x}_0 + x_2(x_1 + \bar{x}_1)(x_0 + \bar{x}_0)$$

$$= x_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2(x_1x_0 + \bar{x}_1x_0 + x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_1\bar{x}_0)$$

$$= x_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1x_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + \cancel{x_2x_1\bar{x}_0} + x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

$$= x_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1x_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2\bar{x}_1\bar{x}_0$$

Η συνάρτηση είναι εκφρασμένη σαν γινόμενο αθροισμάτων

Προσθέτουμε σε κάθε όρο της συνάρτησης τα $x_i \cdot \overline{x}_i$, όπου x_i είναι οι μεταβλητές που λείπουν και στη συνέχεια εκτελούμε τις λογικές πράξεις μέχρι να καταλήξουμε σε γινόμενο μεγιστόρων.

Παράδειγμα.. Να μετατραπεί η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια στην κανονική της μορφή σαν γινόμενο μεγιστόρων.

$$
\begin{aligned}
f &= (x+y+z)(\overline{x}+y) \\
&= (x+y+z)(\overline{x}+y+0) \\
&= (x+y+z)(\overline{x}+y+z\cdot\overline{z}) \\
&= (x+y+z)(\overline{x}+y+z)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.14. Να μετατραπεί η λογική παράσταση

$$z = x_2 \cdot (x_1 + \bar{x}_0)$$

στην κανονική της μορφή σαν γινόμενο μεγιστόρων.

$$z = x_2 \cdot (x_1 + \bar{x}_0)$$

$$= [x_2 + x_1\bar{x}_1 + x_0\bar{x}_0][x_2\bar{x}_2 + (x_1 + \bar{x}_0)]$$

$$= [(x_2 + x_1)(x_2 + \bar{x}_1) + x_0\bar{x}_0](x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

$$= [(x_2 + x_1)(x_2 + \bar{x}_1) + x_0][(x_2 + x_1)(x_2 + \bar{x}_1) + \bar{x}_0](x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

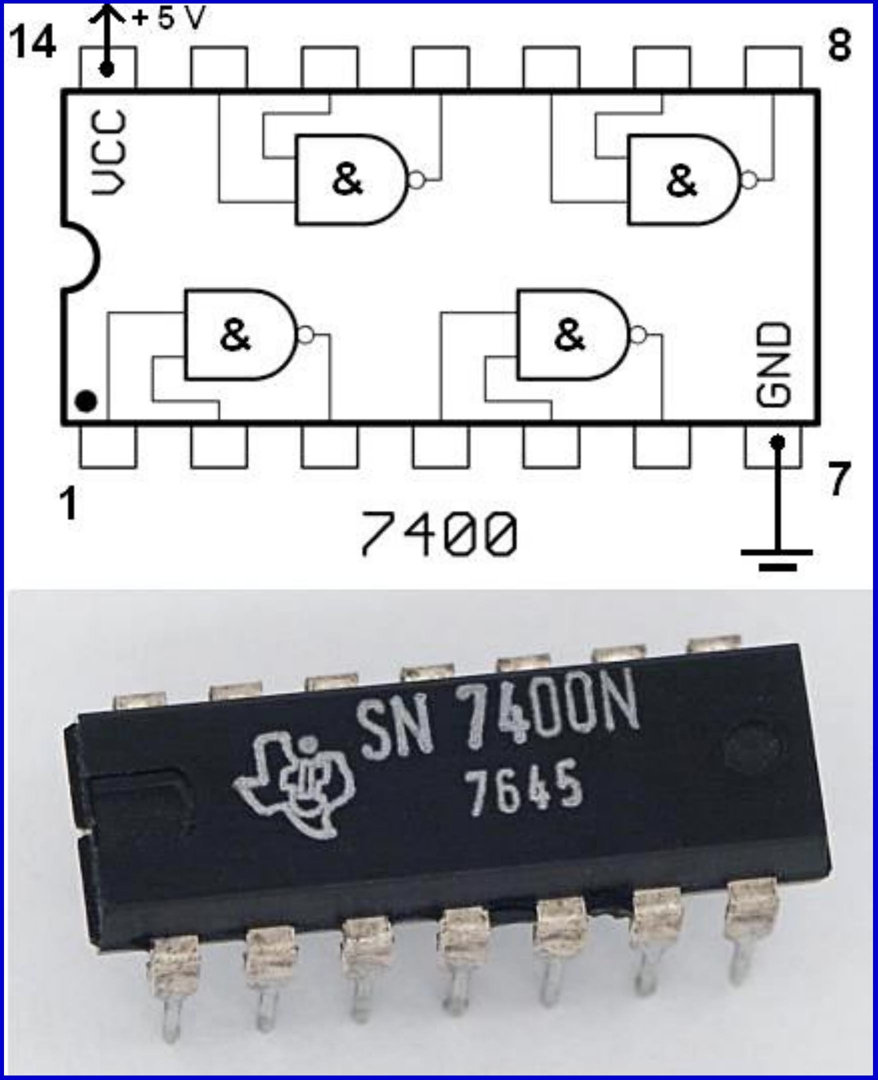
$$= (x_2 + x_1 + x_0)(x_2 + \bar{x}_1 + x_0)(x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)(x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

$$= (x_2 + x_1 + x_0)(x_2 + \bar{x}_1 + x_0)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)(x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)$$

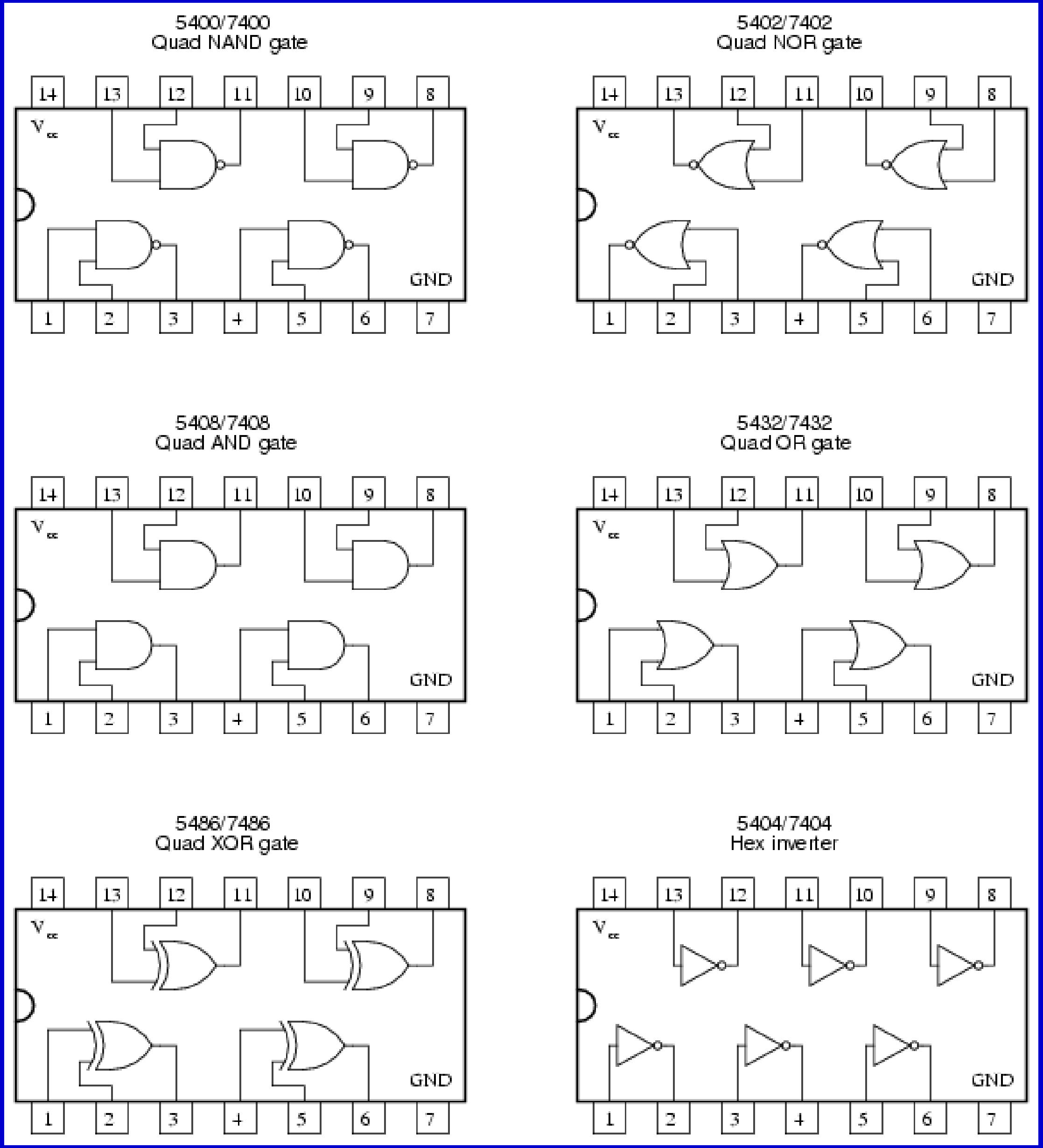
Μη *πλήρως καθορισμένη λογική συνάρτηση* είναι αυτή της οποίας η τιμή δεν είναι καθορισμένη για κάποιους συνδυασμούς τιμών των εισόδων. Η τιμή της συνάρτησης για αυτές τις τιμές ονομάζεται "don’t care" και συμβολίζεται με X (ή d, ή -).

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	X
0	1	1	1
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

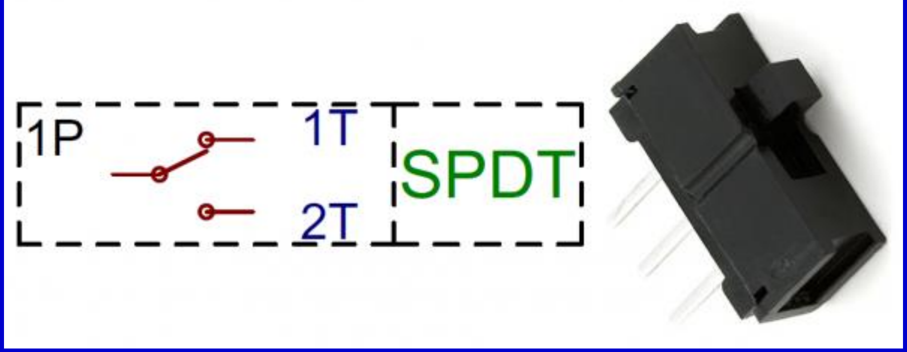
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΚΥΚΛΩΜΑ 7400 ΜΕ 4 ΠΥΛΕΣ NAND-2



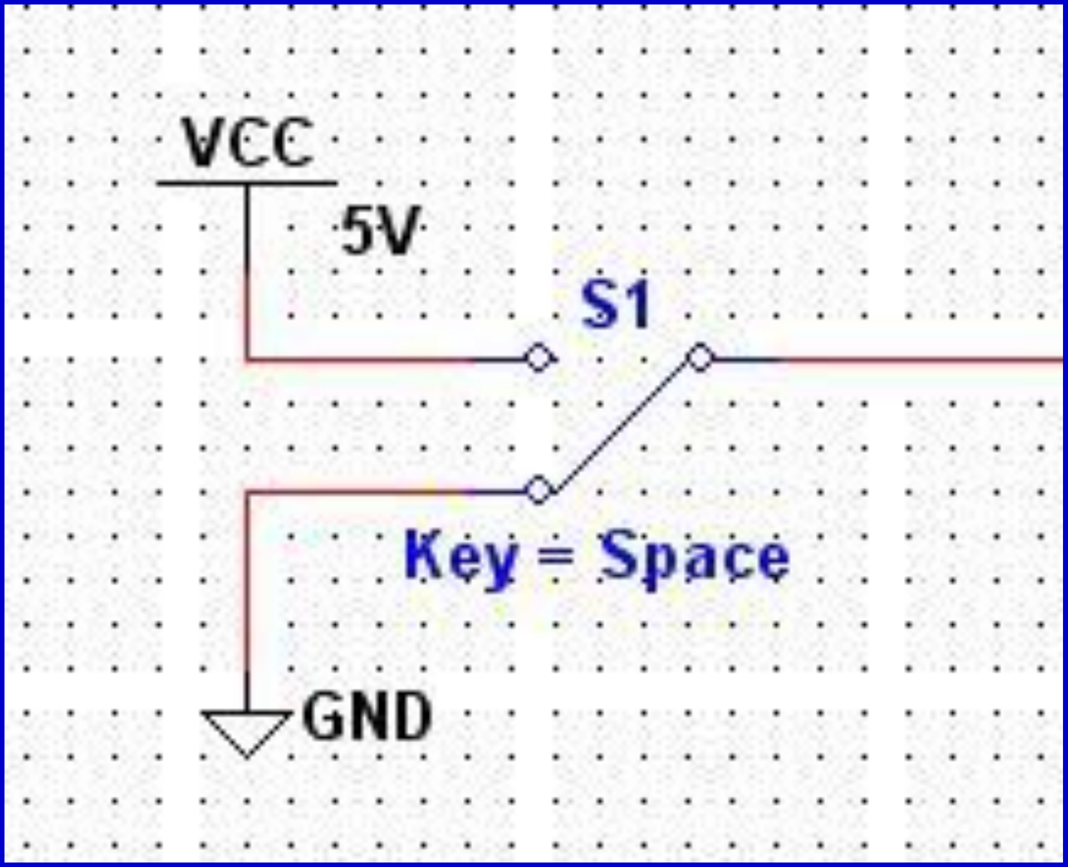
Ολοκληρωμένα κυκλώματα με λογικές πύλες



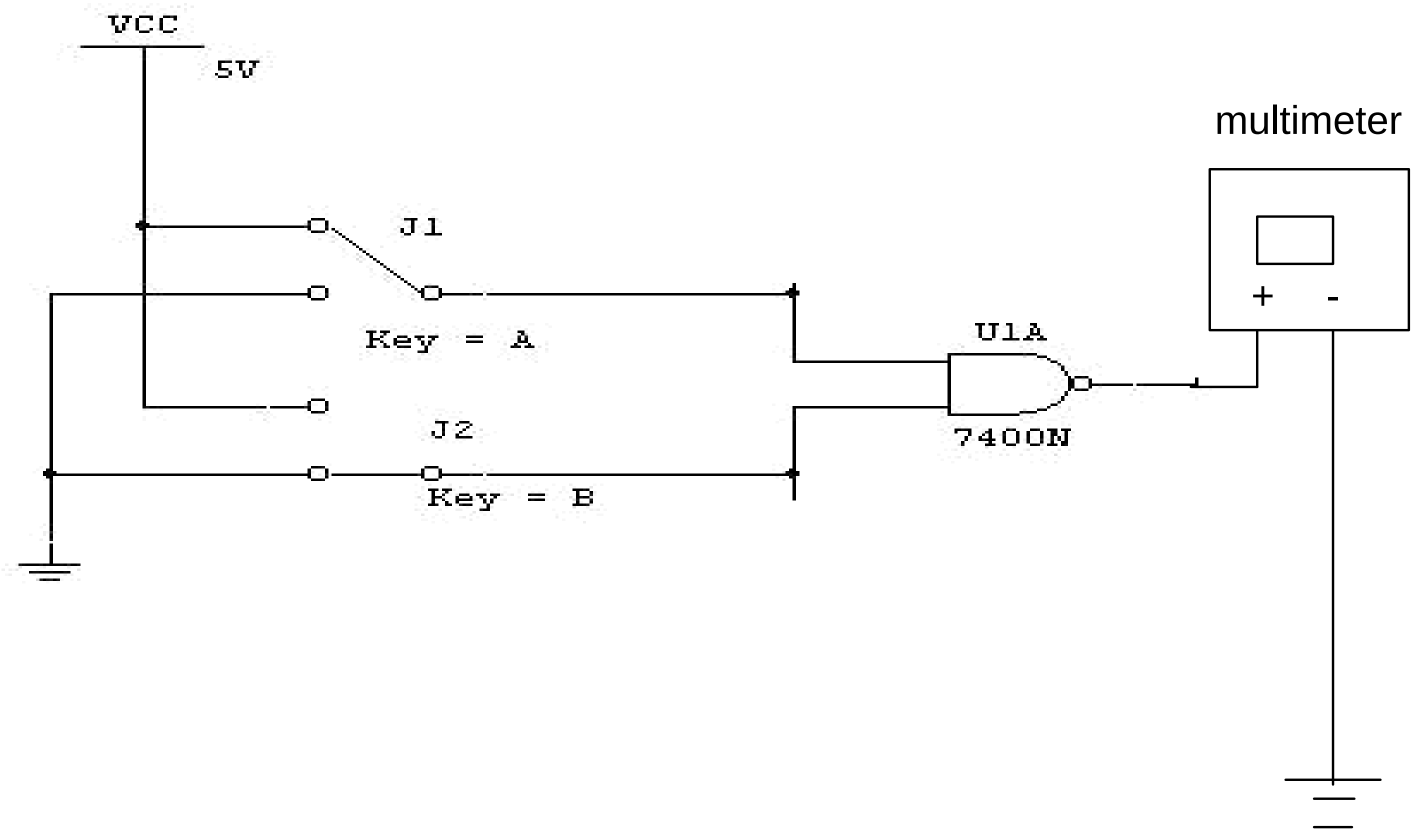
Διακόπτης SPDT



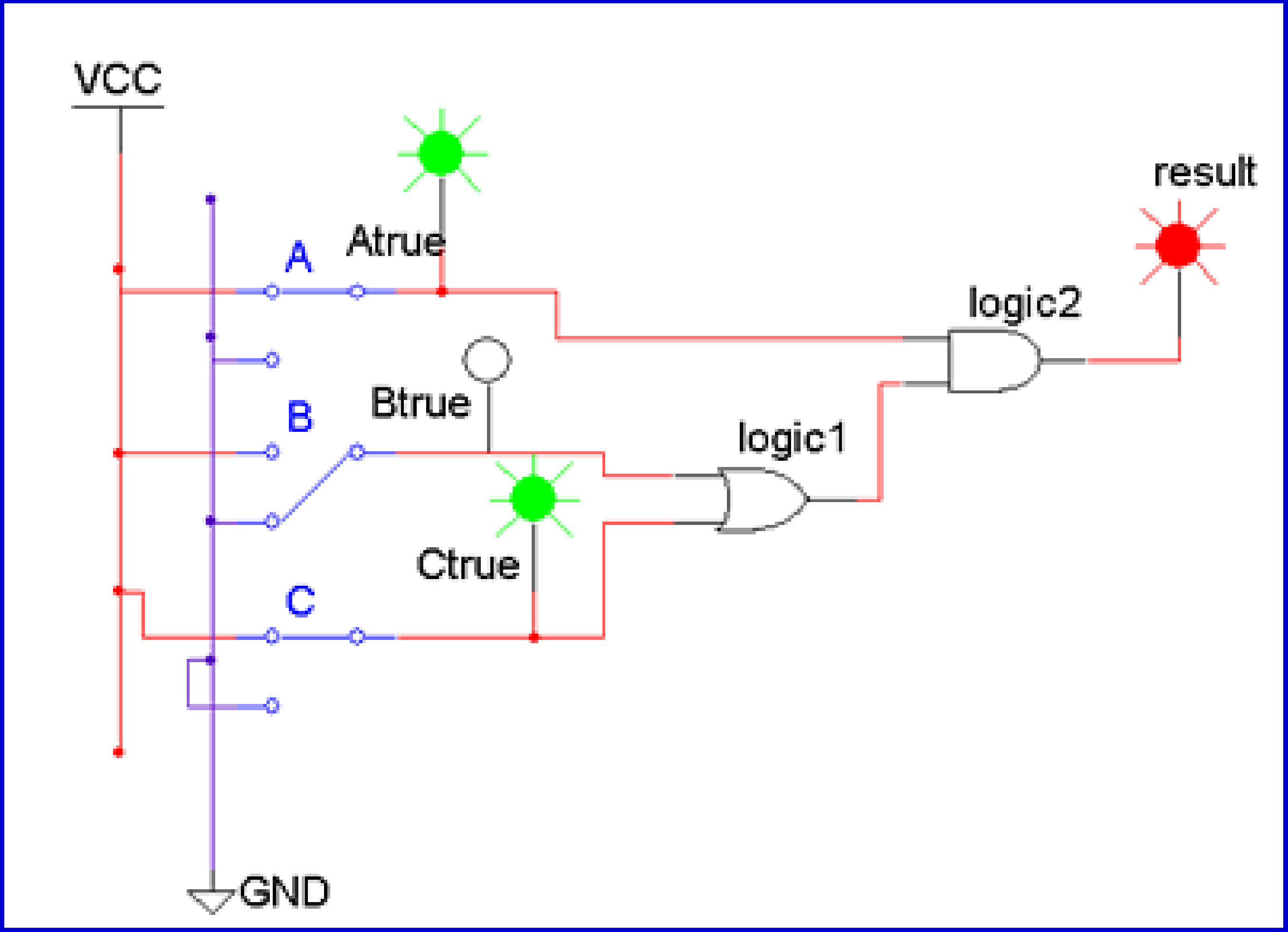
Κύκλωμα παραγωγής των 0, 1 με διακόπτη SPDT



Κύκλωμα ελέγχου λειτουργίας λογικής πύλης



Κύκλωμα ελέγχου λειτουργίας λογικού κυκλώματος



Ασκήσεις

3.1 Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων η λογική συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Υπόδειξη

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\overline{x} \cdot y$

$x \cdot \overline{y}$

$$f = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

3.2 Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων η λογική συνάρτηση ο πίνακας αληθείας της οποίας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Υπόδειξη

x	y	z	f	
0	0	0	1	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{x}yz$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	xyz

3.3 Να γραφεί στην κανονική της μορφή σαν γινόμενο μεγίστων όρων η λογική συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3.4. Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό μορφή γινομένου μεγίστων όρων η λογική συνάρτηση ο πίνακας αληθείας της οποίας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

3.5. Να μετατραπούν στην κανονική τους μορφή σαν άθροισμα ελαχίστων όρων οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στη συνέχεια

$$f = x \cdot y + y \cdot z \qquad\qquad g = \overline{x} + y \cdot \overline{z}$$

3.6. Να μετατραπούν στην κανονική τους μορφή σαν γινόμενο μεγίστων όρων οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στη συνέχεια

$$f = (x + y) \cdot (y + z) \qquad\qquad g = \overline{x} \cdot (y + \overline{z})$$

3.7 Να αποδειχθούν αλγεβρικά οι επόμενες ταυτότητες.

$$\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y + x \cdot y = \overline{x} + y$$

$$\overline{x} \cdot y + \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot y + \overline{y} \cdot z = 1$$

$$y + \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{y} = x + y + z$$

Υπόδειξη

$$\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + x \cdot y =$$

$$= \bar{x}(\bar{y} + y) + x \cdot y =$$

$$= \bar{x}1 + x \cdot y =$$

$$= \bar{x} + x \cdot y =$$

$$= (\bar{x} + x)(\bar{x} + y) =$$

$$= 1(\bar{x} + y) =$$

$$= \bar{x} + y$$

$$y+\overline{x}\cdot z+x\cdot\overline{y}=$$

$$\overline{x}\cdot z+(y+x)\cdot(y+\overline{y})=$$

$$\overline{x}\cdot z+y+x=$$

$$(\overline{x}+x)\cdot(z+x)+y=$$

$$x+y+z$$

3.8 Να αποδειχθεί ότι οι επόμενες λογικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες.

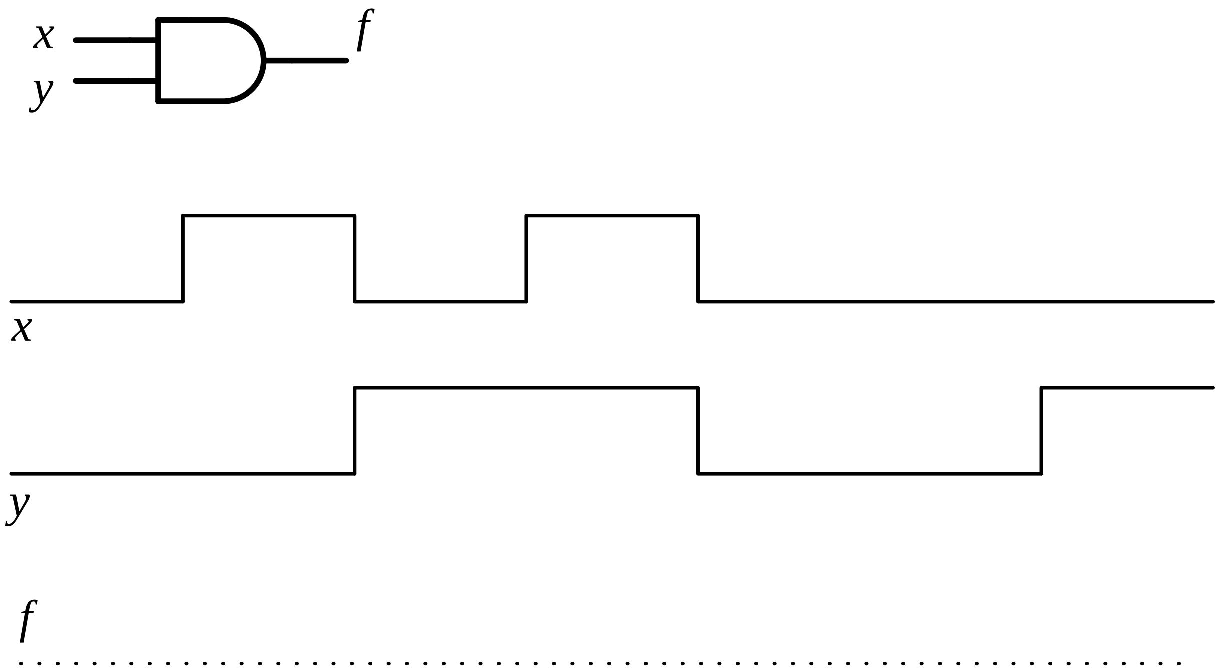
$$f = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z$$

$$g = x \cdot \overline{y} + y \cdot z$$

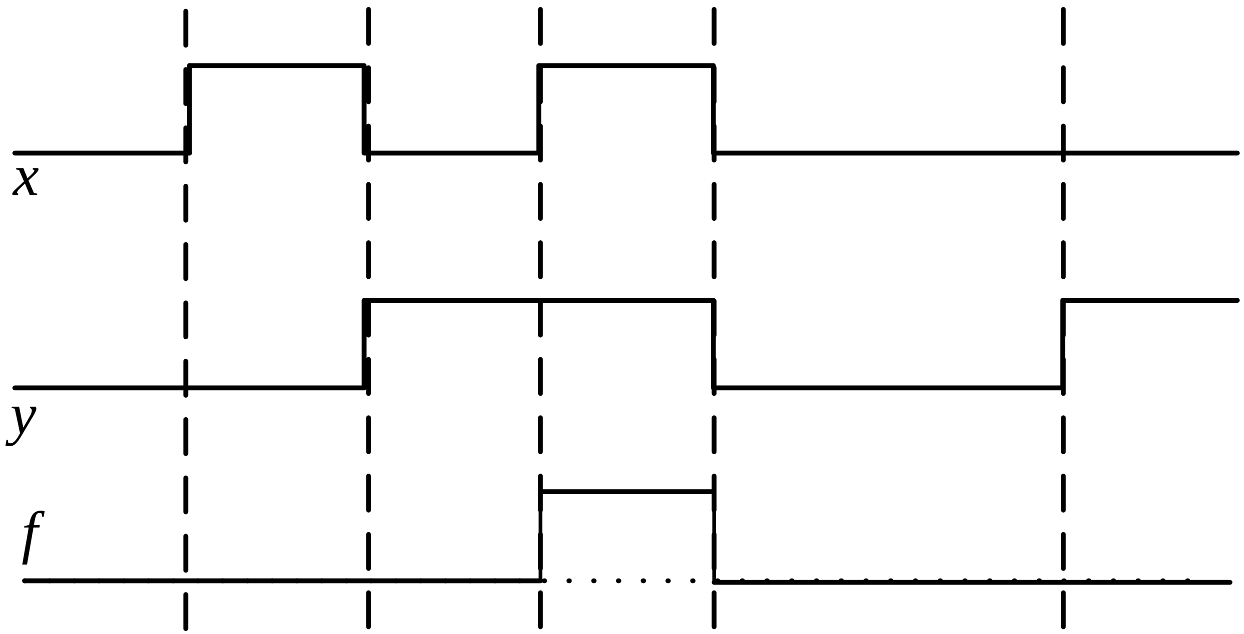
Υπόδειξη

Μετατρέπονται στην κανονική τους μορφή

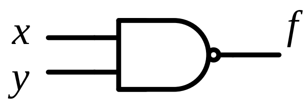
3.9 Να σχεδιασθεί η έξοδος της πύλης AND-2 που δίδεται στη συνέχεια για τις δοσμένες εισόδους.

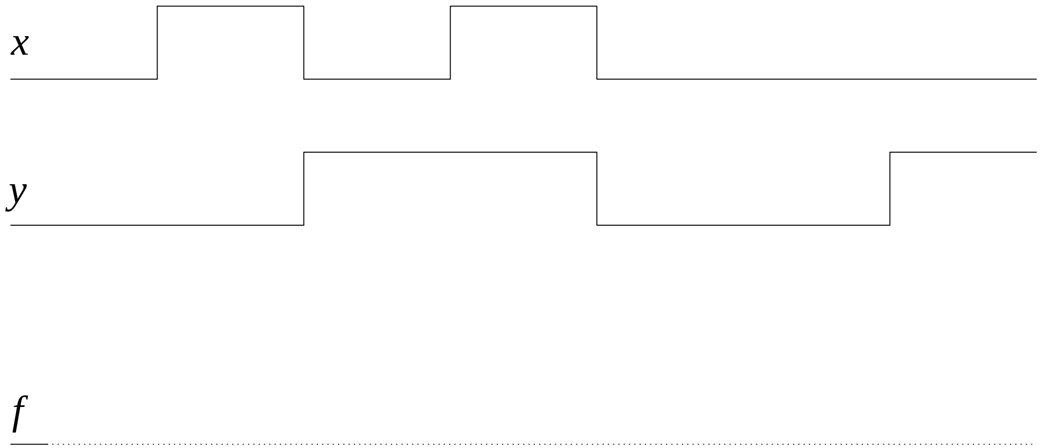


Υπόδειξη



3.10 Να σχεδιασθεί η έξοδος της πύλης NAND-2 που δίδεται στη συνέχεια για τις δοσμένες εισόδους.





3.11. Να δοθούν ο πίνακας αληθείας και το λογικό σύμβολο:

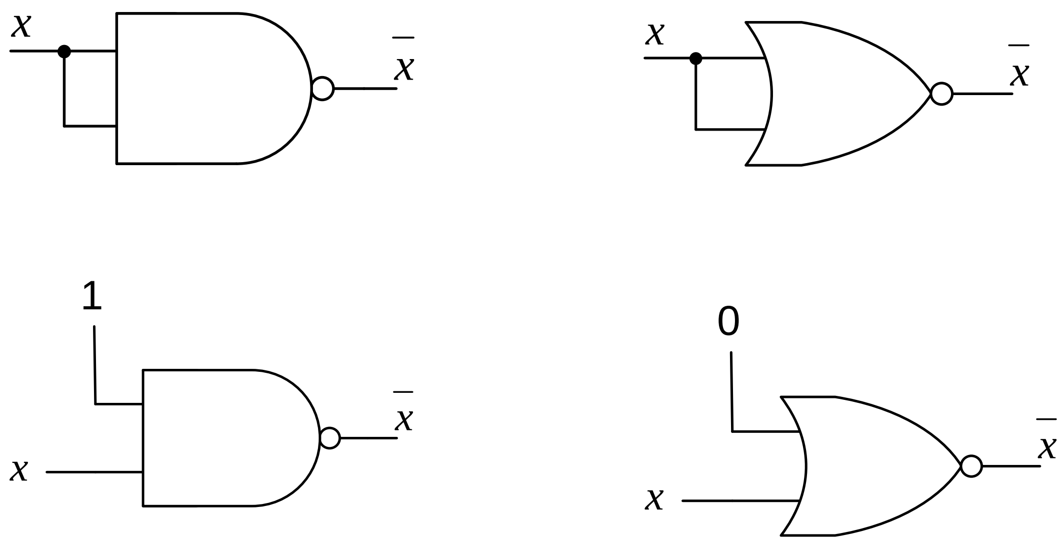
α) Μιας πύλης NAND τριών εισόδων.

β) Μιας πύλης NOR τριών εισόδων.

3.14. Να μετατραπεί σε αντιστροφέα (inverter), δηλαδή σε πύλη NOT, με όλους τους δυνατούς τρόπους

α) Μία πύλη NAND δύο εισόδων.

β) Μία πύλη NOR δύο εισόδων.



3.13 Να σχεδιασθεί με πύλες NAND δύο εισόδων

α) Μια πύλη AND δύο εισόδων (AND-2)

β) Μία πύλη OR δύο εισόδων (OR-2)

3.14 Να σχεδιασθεί με πύλες NOR δύο εισόδων.

α) Μία πύλη OR-2.

β) Μια πύλη AND-2.

3.16 Να σχεδιασθεί κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης NAND τριών εισόδων με πύλες NAND δύο εισόδων.

3.17 Να σχεδιασθεί κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης NOR τριών εισόδων με πύλες NOR δύο εισόδων.

3.18 Να δοθεί ο πίνακας αληθείας που αντιστοιχεί στη λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια.

$$f = xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz$$

Υπόδειξη

$$xyz \rightarrow 111$$

$$x\overline{y}\,\overline{z} \rightarrow 100$$

$$\overline{x}yz \rightarrow 011$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3.18 Να δοθεί ο πίνακας αληθείας που αντιστοιχεί στη λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια.

$$f = xy + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz$$

3.19 Να δοθεί ο πίνακας αληθείας της συμπληρωματικής συνάρτησης, της συνάρτησης της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στην συνέχεια

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$\overline{f}$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	