ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Τα γεωμετρικά στοιχεία μιας επίπεδης επιφάνειας είναι :

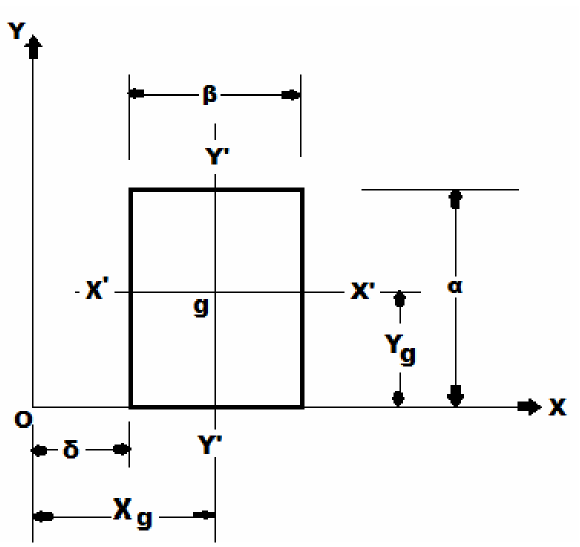
1. εμβαδόν της επιφάνειας Α

2. ροπές της επιφάνειας ως προς τους άξονες ΟΧ , ΟΥ ή τους παράλληλους προς αυτούς άξονες συμμετρίας Χ’Χ’ , Υ’Υ΄ της επιφάνειας

3. ροπές αδρανείας (δεύτερες ροπές επιφάνειας) ως προς τους άξονες ΟΧ , ΟΥ ή τους παράλληλους προς αυτούς συμμετρίας Χ’Χ’ , Υ’Υ΄ της επιφάνειας

4. συντεταγμένες του κέντρου της επιφάνειας

Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα -1- , είναι :



Σχήμα -1-

Εμβαδόν επιφάνειας : $A = a \times \beta$

Ροπή επιφάνειας ως προς άξονα ΟΧ : $M_X = (\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha) \times \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 \times \beta}{2}$

Ροπή επιφάνειας ως προς άξονα ΟΥ : $M_Y = (\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha) \times \left(\delta + \frac{\beta}{2}\right) = a \times \beta \times \left(\delta + \frac{\beta}{2}\right)$

Συντεταγμένες κέντρου επιφάνειας :

$$X_g = \frac{M_Y}{A} = \frac{a \times \beta \times \left(\delta + \frac{\beta}{2}\right)}{a \times \beta} = \delta + \frac{\beta}{2} \quad , \quad Y_g = \frac{M_X}{A} = \frac{\frac{a^2 \times \beta}{2}}{a \times \beta} = \frac{\alpha}{2}$$

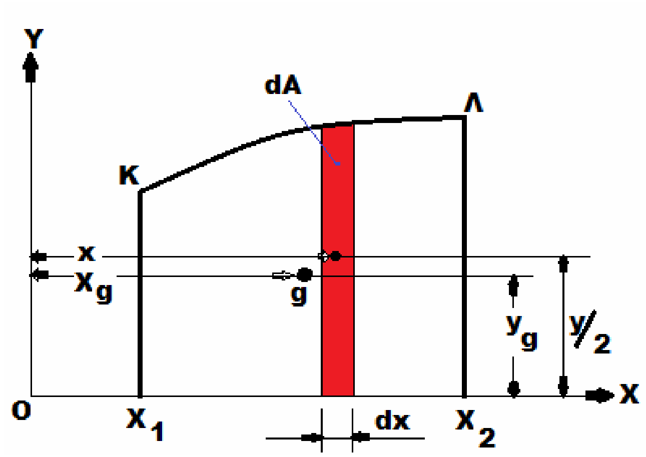
Ροπή αδρανείας ως προς άξονα ΟΧ : $I_X = \dfrac{a^3 \times \beta}{3}$

Ροπή αδρανείας ως προς άξονα Χ'Χ' : $I_{XX} = \dfrac{a^3 \times \beta}{12}$

Ροπή αδρανείας ως προς άξονα Υ'Υ' : $I_{YY} = \dfrac{a \times \beta^3}{12}$

Ροπή αδρανείας ως προς άξονα ΟΥ : $I_Y = I_{YY} + \left(A \times X_g^2\right)$ (θεώρημα Steiner)

Σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις , μπορούν να υπολογιστούν τα αντίστοιχα γεωμετρικά στοιχεία μιας επιφάνειας (Κ Λ X_1 X_2) στο σχήμα -2- :



Επομένως , θεωρώντας τη στοιχειώδη επιφάνεια dA , οι ιδιότητες είναι :

Εμβαδόν επιφάνειας : $dA = (y)dx$ ……… (1)

Ροπή επιφάνειας ως προς άξονα ΟΧ : $dM_X = dA \bullet \dfrac{y}{2} = (ydx) \bullet \dfrac{y}{2} = \left(\dfrac{y^2}{2}\right)dx$

Ροπή επιφάνειας ως προς άξονα ΟΥ : $dM_Y = dA \bullet (x) = (ydx) \bullet (x) = (yx)dx$ …. (2)

Ροπή αδρανείας ως προς άξονα ΟΧ : $dI_X = (dx) \bullet \dfrac{y^3}{3} = \left(\dfrac{y^3}{3}\right)dx$ …. (3)

Ροπή αδρανείας ως προς άξονα ΟΥ : $dI_Y = (dA) \bullet \left(x^2\right) = (ydx) \bullet \left(x^2\right) = \left(yx^2\right)dx$ …. (4)

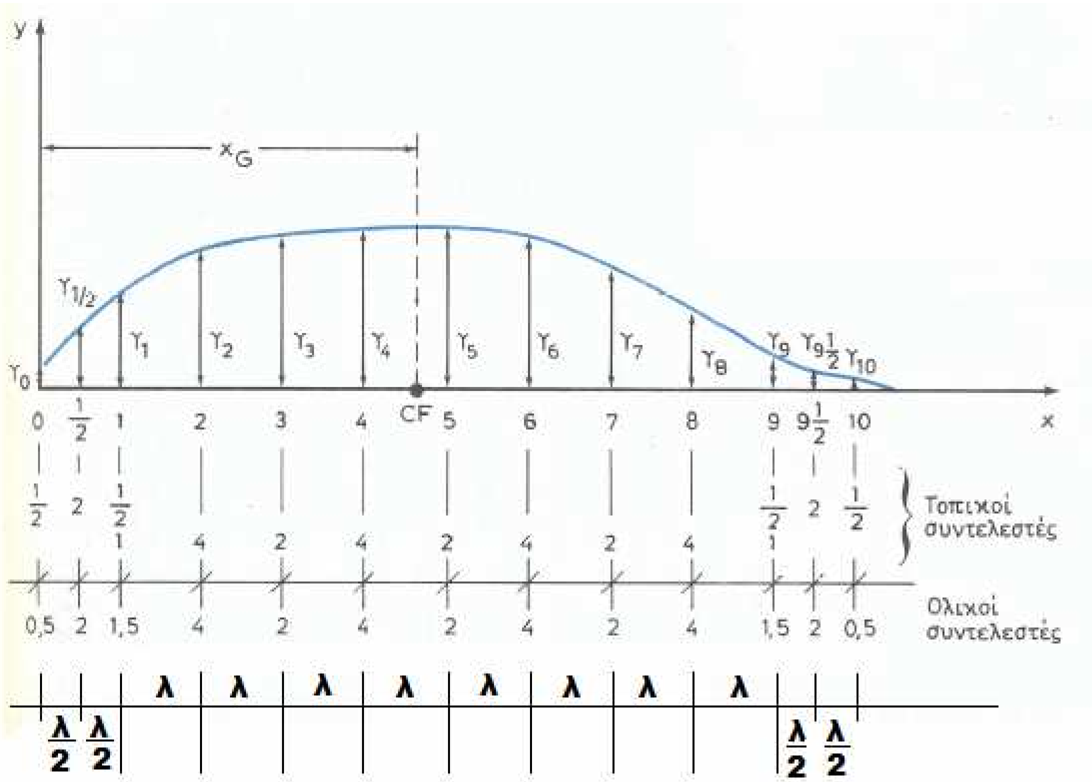
Για το υπολογισμό των ιδιοτήτων ολόκληρης της επιφάνειας , ολοκληρώνονται οι παραπάνω σχέσεις της στοιχειώδους επιφάνειας , χρησιμοποιώντας τις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΙΣΑΛΩΝ

Οι ιδιότητες των ισάλων που είναι χρήσιμες για διάφορους υπολογισμούς είναι :

- εμβαδόν της ισάλου
- διαμήκης θέση του κέντρου της ισάλου
- οι ροπές αδρανείας της ισάλου ως προς τον διαμήκη και εγκάρσιο άξονα που περνούν από το κέντρο της ισάλου.

Στο επόμενο σχήμα παριστάνεται η μισή (λόγω συμμετρίας) ίσαλος με τους συντελεστές Simpson για κάθε σταθμό (νομέα) .



Οι υπολογισμοί των γεωμετρικών στοιχείων γίνονται με τη χρήση σχετικού πίνακα και για την εύρεση των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των συντελεστών του ολοκληρώματος για κάθε σχέση υπολογισμού , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

Στοιχεία υπολογισμού	Αντίστοιχη σχέση	Ποσότητα για ολοκλήρωση	Συντελεστής ολοκληρώματος
Εμβαδόν (Α)	(1)	y	$S_1 = \frac{\delta}{3}\times 2 = \frac{2\delta}{3}$
Ροπή επιφάνειας (M_Y)	(2)	(yx)	$S_2 = \frac{\delta}{3}\times\delta\times 2 = \frac{2\delta^2}{3}$
Ροπή αδρανείας ως προς ΟΧ (I_X)	(3)	$\frac{y^3}{3}$	$S_3 = \frac{\delta}{3}\times\frac{1}{3}\times 2 = \frac{2\delta}{9}$
Ροπή αδρανείας ως προς ΟΥ (I_Y)	(4)	(yx^2)	$S_4 = \frac{\delta}{3}\times\delta^2\times 2 = \frac{2\delta^3}{3}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΙΣΑΛΟΥ

Α/Α	½ ΠΛΑΤΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3 = 1 x 2	ΜΧΛ 4	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 5 = 3 x 4	ΜΧΛ 6	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 7 = 5 x 6	(ΗΜΙΠΛ.)^3 8 = (1)^3	Σ.Σ 9	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 10 = 8 x 9
			Σ_1 =		**Σ_2 =**		**Σ_3 =**			**Σ_4 =**

λ ……………………………………………………………………. = …………….

Εμβαδόν : $A = \frac{2}{3} \times \lambda \times \Sigma_1$……………………………….……... = …………….

Ροπή επιφάνειας : $M_Y = \frac{2}{3} \times \lambda^2 \times \Sigma_2$ ……………………. = …………….

Διαμήκης θέση κέντρου επιφάνειας : $\xi = LCF = \frac{M_Y}{A}$ ………... = …………….

Ροπή αδρανείας ως προς ΟΥ : $I_Y = \frac{2}{3} \times \lambda^3 \times \Sigma_3$………… = …………….

Ροπή αδρανείας ως προς ΟΧ : $I_X = \frac{2}{9} \times \lambda \times \Sigma_4$………….. = …………….

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΕΞΑΜΕΝΗΣ

ΙΣΑΛΟΣ ....

Α/Α	ΠΛΑΤΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3 = 1 * 2	ΜΧΛ 4	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 5 = 3 * 4	ΚΥΒΟΙ ΠΛΑΤΩΝ 6^3	Σ.Σ. 7	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 8 = 6 * 7
			Σ_1 =		Σ_2 =			Σ_4 =

λ = ……… (m)

ΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 = ...$

$M = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 = ...$

$\xi = M/A = ...$

$I = \left(\frac{\lambda}{3}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) \times \Sigma_4 = ...$

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΜΙΣΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 = ...$

$M = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 = ...$

$\xi = M/A = ...$

$I = \left(\frac{4}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 = ...$

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 = ...$

$M = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 = ...$

$\xi = M/A = ...$

$I = 2 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 = ...$

ΙΣΑΛΟΣ ....

Α/Α	ΠΛΑΤΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3 = 1 * 2	ΜΧΛ 4	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 5 = 3 * 4	ΚΥΒΟΙ ΠΛΑΤΩΝ 6^3	Σ.Σ. 7	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 8 = 6 * 7
			Σ_1 =		Σ_2 =			Σ_4 =

λ = ……… (m)

ΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 = ...$

$M = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 = ...$

$\xi = M/A = ...$

$I = \left(\frac{\lambda}{3}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) \times \Sigma_4 = ...$

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΜΙΣΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 = ...$

$M = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 = ...$

$\xi = M/A = ...$

$I = \left(\frac{4}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 = ...$

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 = ...$

$M = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 = ...$

$\xi = M/A = ...$

$I = 2 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 = ...$

ΙΣΑΛΟΣ ....

Α/Α	ΠΛΑΤΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3 = 1 * 2	ΜΧΛ 4	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 5 = 3 * 4	ΚΥΒΟΙ ΠΛΑΤΩΝ 6^3	Σ.Σ. 7	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 8 = 6 * 7
			Σ_1 =		Σ_2 =			Σ_4 =

λ = ……… (m)

ΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 =$ ....

$M = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 =$ ....

$\xi = \frac{M}{A} =$ ....

$I = \left(\frac{\lambda}{3}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) \times \Sigma_4 =$ ....

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΜΙΣΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 =$ ....

$M = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 =$ ....

$\xi = \frac{M}{A} =$ ....

$I = \left(\frac{4}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 =$ ....

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 =$ ....

$M = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 =$ ....

$\xi = \frac{M}{A} =$ ....

$I = 2 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 =$ ....

ΙΣΑΛΟΣ ....

Α/Α	ΠΛΑΤΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3 = 1 * 2	ΜΧΛ 4	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 5 = 3 * 4	ΚΥΒΟΙ ΠΛΑΤΩΝ 6^3	Σ.Σ. 7	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 8 = 6 * 7
			Σ_1 =		Σ_2 =			Σ_4 =

λ = ……… (m)

ΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 =$ ....

$M = \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 =$ ....

$\xi = \frac{M}{A} =$ ....

$I = \left(\frac{\lambda}{3}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) \times \Sigma_4 =$ ....

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΜΙΣΟΙ Σ.Σ.

$A = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 =$ ....

$M = \left(\frac{4}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 =$ ....

$\xi = \frac{M}{A} =$ ....

$I = \left(\frac{4}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 =$ ....

ΗΜΙΠΛΑΤΟΣ – ΟΛΟΚΛΗΡΟΙ Σ.Σ.

$A = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda \times \Sigma_1 =$ ....

$M = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \lambda^2 \times \Sigma_2 =$ ....

$\xi = \frac{M}{A} =$ ....

$I = 2 \times \left(\frac{1}{9}\right) \times \lambda \times \Sigma_4 =$ ....

ΟΓΚΟΣ

ΓΙΝΟΜΕΝΑ 13=12*11	Σ.Σ. 12	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 11	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 10=9*1	Σ.Σ. 9	ΙΣΑΛΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3=1*2	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 4	Σ.Σ. 5	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 6=4*5	ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 7	7 * h 8

h = ισαπόσταση ισάλων

VCB

ΓΙΝΟΜΕΝΑ 13=12*11	Σ.Σ. 12	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 11	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 10=9*1	Σ.Σ. 9	ΙΣΑΛΟΣ 1	Σ.Σ. 2	Γ ΙΝΟΜΕΝΑ 3=1*2	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 4	Σ.Σ. 5	ΓΙΝΟΜΕΝ Α 6=4*5	ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 7	8

Στήλη 8 = στήλη 7 / στήλη 7 όγκου

LCB

ΓΙΝΟΜΕΝΑ 13=12*11	Σ.Σ. 12	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 11	ΓΙΝΟΜΕΝ Α 10=9*1	Σ.Σ. 9	ΙΣΑΛΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3=1*2	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 4	Σ.Σ. 5	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 6=4*5	ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 7	8

Στήλη 8 = στήλη 7 / στήλη 7 όγκου

ΟΓΚΟΣ

ΓΙΝΟΜΕΝΑ 13=12*11	Σ.Σ. 12	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 11	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 10=9*1	Σ.Σ. 9	ΙΣΑΛΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3=1*2	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 4	Σ.Σ. 5	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 6=4*5	ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 7	7 * h 8

h = ισαπόσταση ισάλων

VCB

ΓΙΝΟΜΕΝΑ 13=12*11	Σ.Σ. 12	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 11	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 10=9*1	Σ.Σ. 9	ΙΣΑΛΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3=1*2	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 4	Σ.Σ. 5	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 6=4*5	ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 7	8

Στήλη 8 = στήλη 7 / στήλη 7 όγκου

LCB

ΓΙΝΟΜΕΝΑ 13=12*11	Σ.Σ. 12	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 11	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 10=9*1	Σ.Σ. 9	ΙΣΑΛΟΣ 1	Σ.Σ. 2	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 3=1*2	ΜΕΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 4	Σ.Σ. 5	ΓΙΝΟΜΕΝΑ 6=4*5	ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ 7	8

Στήλη 8 = στήλη 7 / στήλη 7 όγκου