**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ**
**(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ**
**ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ**
**ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**
**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος**
**E-mail:** bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΠΕΡΙΟΔΟΥ *ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015*

ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

## $1^o$

Να λυθεί με τη μέθοδο Runge Kutta 4ης τάξης το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad \text{όταν} \quad t \in [0.4,\, 0.5], \quad \text{το βήμα} \quad \ell = 0.1, \quad \text{η θεωρητική λύση είναι } y(t) = 2t + t\ln t$$

και η αρχική τιμή $y_0$ ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική. Να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με την αντίστοιχη θεωρητική.

*Υπόδειξη*: Αν $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, όταν

$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right), \quad k_3 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(t_i + \ell, y_i + \ell k_3).$$

## $2^o$

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο $P(x)$ που διέρχεται από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, όταν $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$ και $x_2 = 0.6$. Στη συνέχεια να γίνει προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^{0.6} f(x)\,dx$$

με το πολυώνυμο $P(x)$ και το σύνθετο κανόνα του Simpson, όταν $h = 0.1$. Τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη θεωρητική τιμή *0.535 154*.

*Υπόδειξη*: Simpson

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2N-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2N-2})\right] + f(x_{2N})\right\}$$

## $3^o$

i) Δώστε τους ορισμούς της spline και της φυσικής spline. Δικαιολογείστε γιατί μια κυβική φυσική spline πρέπει να είναι 1ου βαθμού στα άκρα διαστήματα.

ii) Με τη μέθοδο του Jacobi και των Gauss-Seidel να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 8, \end{aligned}$$

όταν η αρχική τιμή είναι $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 1η επανάληψη. Εξετάστε αν οι μέθοδοι συγκλίνουν και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

*Θεωρητική λύση*: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1 \quad \text{και} \quad x_3 = 2.$

Αθήνα 16 Φεβρουαρίου 2015

Α. Μπράτσος

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ**
**(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ**
**ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ**
**ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**
**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος**
**E-mail:** bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
ΠΕΡΙΟΔΟΥ *ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015*
ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

## $1^o$

Να λυθεί με τη μέθοδο του Newton η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \text{όταν} \quad x_0 = 1.2.$$

Η διαδικασία να σταματήσει στη 3η επανάληψη.

## $2^o$

Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα των 3/8 του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.9} \sqrt{1+x^4}\, dx, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και το αποτέλεσμα να συγκριθεί με τη θεωρητική τιμή *0.954 609.*
*Υπόδειξη*:

$$\begin{aligned} I(f) \quad \approx \quad & \frac{3h}{8} \{ f(x_0) + 3\left[ f(x_1) + f(x_4) + \ldots + f(x_{3N-2}) \right] + 3\left[ f(x_2) + f(x_5) + \ldots + f(x_{3N-1}) \right] \\ & +2\left[ f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{3N-3}) \right] + f(x_{3N}) \} \end{aligned}$$

## $3^o$

Να λυθεί με τη μέθοδο του Taylor τάξης $\nu = 2$ το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t^2 + 1, \quad \text{όταν} \quad t \in [1, 1.1], \quad \text{το βήμα} \quad \ell = 0.1,$$

η θεωρητική λύση είναι

$$y(t) = 2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$$

και η αρχική τιμή $y_0$ ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική. Να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με την αντίστοιχη θεωρητική.

*Υπόδειξη*: Αν $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \ell\, f(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2} f'(t_i, y_i)$.

Αθήνα 16 Φεβρουαρίου 2015

Α. Μπράτσος