ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΠΕΡΙΟΔΟΥ *ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2016*

ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

1^o (βαθμός 3.5)

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = 1 + \frac{y}{t}\,, \quad \text{όταν} \quad t \in [1,\, 1.1] \quad \text{με θεωρητική λύση:} \quad y(t) = 2t + t\ln t, \tag{1}$$

όπου η αρχική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική.

- Αν το βήμα είναι $\ell = 0.1$, να λυθεί με τη μέθοδο Runge Kutta 4ης τάξης και ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων το πρόβλημα (1) και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή.

  Υπόδειξη: Αν $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, όπου

  $$k_1 = f(t_i, y_i)\,, \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}\,k_1\right), \quad k_3 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2}, y_i + \frac{\ell}{2}\,k_2\right), \quad k_4 = f(t_i + \ell, y_i + \ell k_3)\,.$$

- Ποια είναι η μορφή της λύσης του προβλήματος (1) με τη μέθοδο Taylor τάξης $\nu = 2$;

2^o (βαθμός 4)

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int_0^{0.6} \sqrt{1 + x^4}\, dx. \tag{2}$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (2):

- Προσεγγίζοντας την ολοκληρωτέα συνάρτηση με το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton στους κόμβους: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$ και $x_2 = 0.6$.
- Με το σύνθετο κανόνα του Simpson, όταν $h = 0.1$. *Υπόδειξη*:

  $$\mathrm{I} \approx \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2N-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2N-2})\right] + f(x_{2N})\right\}$$

Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή $\mathrm{I} = \mathit{0.607\,642}$.

3^o

i) Δώστε τους ορισμούς της spline και της φυσικής spline. Δικαιολογείστε γιατί μια κυβική φυσική spline πρέπει να είναι 1ου βαθμού στα άκρα διαστήματα.

ii) Με τη μέθοδο του Newton να υπολογιστεί η θετική ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = x^2 - 5 = 0,$$

όταν η αρχική τιμή είναι $x_0 = 2$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 3η επανάληψη. Τι παρατηρείτε; Να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή $x^* = \mathit{2.2361}$.

Αθήνα 8 Φεβρουαρίου 2016

Α. Μπράτσος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ Α. Μπράτσος
E-mail: bratsos@teiath.gr **URL:** http://users.teiath.gr/bratsos/

ΘΕΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
ΠΕΡΙΟΔΟΥ *ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2016*
ΤΜΗΜΑΤΟΣ **ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**

1^o (βαθμός 2)

Με τη μέθοδο του Newton να υπολογιστεί η πραγματική ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = x^3 - 7 = 0,$$

όταν η αρχική τιμή είναι $x_0 = 1.7$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 3η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;
Θεωρητική λύση: $x^* = 1.912\,931$.

2^o (βαθμός 3)

Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2}\,dx, \quad \text{όταν} \quad h = 0.1$$

και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με τη θεωρητική τιμή $\mathrm{I} = 0.520\,114$.
Υπόδειξη: $I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1})\right] + f(x_N)\right\}$

3^o

Να λυθεί με τη μέθοδο Runge-Kutta 3ης τάξης και ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad \text{όταν} \quad t \in [1,\, 1.1], \quad \ell = 0.1 \quad \text{με θεωρητική λύση:} \quad y(t) = 2t + t\ln t$$

και η αρχική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική.
Υπόδειξη: Αν $y = y(t)$ και $y' = f(t, y)$, τότε $y_{i+1} = y_i + \frac{\ell}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$, όπου

$$k_1 = f(t_i, y_i)\,; \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\ell}{2},\, y_i + \frac{\ell}{2}k_1\right); \quad k_3 = f(t_i + \ell,\, y_i - \ell k_1 + 2\ell k_2)\,.$$

Αθήνα 8 Φεβρουαρίου 2016

Α. Μπράτσος