Μάθημα 2

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Γραμμικά συστήματα

2.1.1 Ορισμός γραμμικού συστήματος

Ορισμός 2.1.1 - 1. *Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος (linear system) m-εξισώσεων με n-αγνώστους $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ είναι:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{2.1.1 - 1}$$

όταν τα a_{ij} με $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m;\; j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ είναι οι συντελεστές του συστήματος και τα $b_i;\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$ είναι γνωστοί αριθμοί.

Σημείωση 2.1.1 - 1

Όπως προκύπτει από την $(2.1.1-1)$, κάθε εξίσωση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αγνώστων, δηλαδή οι άγνωστοι πολλαπλασιάζονται μόνο με σταθερές. Αν σε μια τουλάχιστον εξίσωση ένας άγνωστος, έστω ο x_1, είναι στη μορφή x_1^2 ή $x_1 x_2$ ή $\sin x_1$ κ.λπ., τότε το σύστημα $(2.1.1-1)$ λέγεται **μη γραμμικό** (nonlinear).

Παράδειγμα 2.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.1 - 1 το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array} \tag{2.1.1 - 2}$$

έχει 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους $(m=n=2)$, το

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 11x_3 & = & -17 \end{array} \tag{2.1.1 - 3}$$

3 εξισώσεις και 3 αγνώστους $(m=n=3)$, το

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 5x_2+ & 10x_3 & = & -3 \\ -2x_1+ & 2x_2+ & 3x_3 & = & 3 \\ 4x_1+ & x_2+ & 4x_3 & = & 1 \\ 4x_1+ & 3x_2+ & 4x_3 & = & 11 \end{array} \tag{2.1.1 - 4}$$

4 εξισώσεις $(m=4)$ και 3 αγνώστους $(n=3)$, ενώ το

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1+ & x_2- & 2x_3+ & x_4+ & 3x_5 & =2 \\ 2x_1- & x_2+ & 2x_3+ & 2x_4+ & 6x_5 & =3 \\ 3x_1+ & 2x_2- & 4x_3- & 3x_4- & x_5 & =0 \end{array} \tag{2.1.1 - 5}$$

3 εξισώσεων $(m=3)$ με 5 αγνώστους $(n=5)$.

Αν $b_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε το σύστημα $(2.1.1 - 1)$ λέγεται **ομογενές** και μία προφανής λύση του είναι η

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

ενώ, όταν ένα τουλάχιστον από τα $b_i;\ i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διάφορο του μηδενός, τότε λέγεται **μη ομογενές**.

Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα $(2.1.1 - 1)$ γράφεται[1]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \text{ ή } \overrightarrow{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} \text{ ή } \overrightarrow{b}}$$

ή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (2.1.1 - 6)$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων τάξης (m, n) και $\mathbf{b}$ διάνυσμα τάξης m με $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, αντίστοιχα $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, αντίστοιχα $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$.

Παράδειγμα 2.1.1 - 2

Τα συστήματα του Παραδείγματος 2.1.1 - 1 γράφονται στη μορφή $(2.1.1 - 6)$ διαδοχικά ως εξής:

- Σύστημα $(2.1.1 - 2)$:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array} \quad \text{ως} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}},$$

[1] Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Γραμμική Άλγεβρα*.

- $(2.1.1-3)$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 11x_3 & = & -17 \end{array} \quad \text{ως}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -17 \end{bmatrix},$$

- $(2.1.1-4)$:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 5x_2+ & 10x_3 & = & -3 \\ -2x_1+ & 2x_2+ & 3x_3 & = & 3 \\ 4x_1+ & x_2+ & 4x_3 & = & 1 \\ 4x_1+ & 3x_2+ & 4x_3 & = & 11 \end{array} \quad \text{ως}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix},$$

- $(2.1.1-5)$:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1+ & x_2- & 2x_3+ & x_4+ & 3x_5 & = 2 \\ 2x_1- & x_2+ & 2x_3+ & 2x_4+ & 6x_5 & = 3 \\ 3x_1+ & 2x_2- & 4x_3- & 3x_4- & x_5 & = 0 \end{array} \quad \text{ως}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Μέθοδοι λύσης

Οι μέθοδοι λύσης του συστήματος $(2.1.1-1)$ ισοδύναμα του $(2.1.1-6)$ χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

- **άμεσες** (direct), και
- **επαναληπτικές** (iterative).

Από τις παραπάνω δύο κατηγορίες λύσεων θα δοθούν στη συνέχεια μόνον οι κυριότερες που αναφέρονται στην περίπτωση όπου ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων είναι τετραγωνικός τάξης n και η ορίζουσά του $|A| \neq 0$.[2]

Στην παράγραφο που ακολουθεί κρίνεται σκόπιμο να δοθούν περιληπτικά οι κυριότερες άμεσοι μέθοδοι λύσης.

2.2 Άμεσοι μέθοδοι λύσης γραμμικών συστημάτων

2.2.1 Μέθοδος του Cramer

[3]Επειδή $|A| \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο A^{-1}, οπότε από την $(2.1.1-6)$ διαδοχικά έχουμε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \acute{\eta} \quad \overbrace{A^{-1}\,A}^{\mathrm{I}}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \acute{\eta} \quad \mathrm{I}\,\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n, δηλαδή τελικά

$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b}. \tag{2.2.1 - 1}$$

Αποδεικνύεται ότι η $(2.2.1-1)$ συναρτήσει των αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ του συστήματος γράφεται επίσης ως εξής:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2.1 - 2}$$

---

[2] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 3.

[3] Υπενθυμίζεται ότι:

Πόρισμα 2.2.1 - 1. *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$, μη αντιστρέψιμος.*

(Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Γραμμική Άλγεβρα*) όταν με $|A_i|$ συμβολίζεται η ορίζουσα που προκύπτει, αν η i-στήλη του πίνακα A αντικατασταθεί από τις συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{b}$.

Η μέθοδος αυτή, που είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Cramer**,[4] λόγω του μεγάλου αριθμού των πράξεων και των υπεισερχόμενων σφαλμάτων στρογγυλοποίησης (round-off errors) που απαιτούνται για τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα στη σχέση $(2.2.1-1)$, αντίστοιχα των οριζουσών στη $(2.2.1-2)$, έχει θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον.

Παράδειγμα 2.2.1 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-3\,x_1 & + & 6\,x_2 & - & 11\,x_3 & = & 5 \\
3\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 6\,x_3 & = & -2 \\
4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 13\,x_3 & = & 4
\end{array}$$

που γράφεται

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(2.1.1-6)$ ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων είναι

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix},$$

οπότε η ορίζουσά του $|A| = 10$. Τότε ο αντίστροφος πίνακας A^{-1} ισούται με

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

[4] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Cramer%27s_rule*

Επομένως ο τύπος $(2.2.1-1)$ δίνει την παρακάτω λύση:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.2 \\ -2.5 \\ -6.4 \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = -7.2 \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -2.5, \quad \text{και} \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = -6.4. \end{aligned}$$

Η παραπάνω λύση προκύπτει επίσης και από τον τύπο $(2.2.1-2)$ ως εξής: Η ορίζουσα $|A_1|$ θα προκύψει από τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix},$$

όταν η 1η στήλη αντικατασταθεί από τη στήλη των γνωστών όρων του συστήματος, δηλαδή

$$|A_1| = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -11 \\ -2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = -72.$$

Όμοια η 2η στήλη

$$|A_2| = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -11 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -25$$

και η 3η στήλη

$$|A_3| = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} = -64.$$

Άρα

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = -7.2 \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -2.5, \quad \text{και}$$
$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -6.4.$$

2.2.2 Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss ή ειδικότερα μέθοδος χωρίς διάταξη[5] (pivoting) περιγράφεται από τα παρακάτω **βήματα** (steps):

1ο βήμα

Έστω ότι οι εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (2.1.1 – 1):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \qquad (2.2.2 - 1)$$

έχουν διαταχθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $a_{11} \neq 0$. Το a_{11} λέγεται και **οδηγό στοιχείο** (pivot).

Τότε ο άγνωστος x_1 απαλείφεται από τη 2η, 3η, …, n-οστή εξίσωση, αφαιρώντας:

$$\begin{array}{lllllll} m_{21} & = & \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \text{φορές την} & \text{πρώτη} & \text{από τη δεύτερη εξίσωση} \\ m_{31} & = & \dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \text{''} & \text{''} & \quad\text{τρίτη} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \quad\vdots \\ m_{n1} & = & \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & \text{''} & \text{''} & \quad\text{τελευταία,} \end{array}$$

[5]Για άλλες περιπτώσεις βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 3. Επίσης *https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination*

όταν τα

$$m_{i1}; \quad i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n$$

είναι οι **πολλαπλασιαστές** του Gauss για το 1ο βήμα.

Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 1ου βήματος είναι:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}^{(1)}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}\,x_n & = & b_2^{(1)} \\ & & \vdots & & & & & \vdots & \\ & & a_{n2}^{(1)}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(1)}\,x_n & = & b_n^{(1)}, \end{array} \qquad (2.2.2 - 2)$$

όπου με $a_{ij}^{(k)}$, $b_i^{(k)}$; $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$ θα συμβολίζεται στο εξής η νέα τιμή των a_{ij} και b_i στο τέλος του k-βήματος γενικά.

Το σύστημα $(2.2.2-2)$ είναι **ισοδύναμο** με το αρχικό $(2.2.2-1)$, δηλαδή από αυτό προκύπτουν οι ίδιες με το αρχικό λύσεις, λόγω της διατήρησης στη νέα μορφή της 1ης εξίσωσης

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1$$

του αρχικού συστήματος.

2ο βήμα

Όμοια, έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $(2.2.2-2)$ έχουν διαταχθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Τότε ο άγνωστος x_2 απαλείφεται από την 3η, ... , n-οστή εξίσωση, αφαιρώντας

$$\begin{array}{lcllll} m_{32} & = & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \text{φορές τη} & \text{δεύτερη} & \text{από την τρίτη εξίσωση} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ m_{n2} & = & \dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \quad '' & \quad '' & \qquad \text{τελευταία.} \end{array}$$

Η μορφή του συστήματος στο τέλος του 2ου βήματος θα είναι:

$$\begin{array}{rcccccccl}
a_{11}\,x_1+ & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}\,x_2 & + & a_{23}^{(1)}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}\,x_n & = b_2^{(1)} \\
 & & & a_{33}^{(2)}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}\,x_n & = b_3^{(2)} \\
 & & & \vdots & & & & & \quad\vdots \\
 & & & a_{n3}^{(2)}\,x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(2)}\,x_n & = b_n^{(2)}.
\end{array} \tag{2.2.2 - 3}$$

Όμοια το σύστημα $(2.2.2-3)$ είναι ισοδύναμο με το αρχικό $(2.2.2-1)$, δηλαδή από αυτό προκύπτουν οι ίδιες με το αρχικό λύσεις, λόγω της διατήρησης στη νέα μορφή της 1ης εξίσωσης του $(2.2.2-1)$ και της 2ης του $(2.2.2-2)$, δηλαδή των

$$\begin{array}{rcccccccl}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)}.
\end{array}$$

n-1 βήμα

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο στο τέλος και του $n-1$ βήματος, η μορφή του αρχικού συστήματος $(2.2.2-1)$ τελικά θα είναι:

$$\begin{array}{rcccccl}
a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{22}^{(1)}\,x_2+a_{23}^{(1)}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(1)}\,x_n & = & b_2^{(1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{nn}^{(n-1)}\,x_n & = & b_n^{(n-1)}
\end{array} \tag{2.2.2 - 4}$$

που όμοια για τους παραπάνω λόγους είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Αλγόριθμος 2.2.2 - 1 (ανάδρομης αντικατάστασης)

$$
\begin{array}{lcl}
x_n & = & c_n / u_{nn} \\
x_{n-1} & = & \left[c_{n-1} - u_{n-1,\,n}\, x_n\right] / u_{n-1,\,n-1} \\
\vdots & & \vdots \\
x_1 & = & \left[c_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} u_{1j}\, x_j \right] / \, u_{11} \,.
\end{array}
$$

Το σύστημα $(2.2.2-4)$ γράφεται απλούστερα ως

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
u_{11}\,x_1 & + & u_{12}\,x_2 & + & u_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & u_{1n}\,x_n & = & c_1 \\
 & & u_{22}\,x_2 & + & u_{23}\,x_3 & + & \cdots & + & u_{2n}\,x_n & = & c_2 \\
 & & & & u_{33}\,x_3 & + & \cdots & + & u_{3n}\,x_n & = & c_3 \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & u_{nn}\,x_n & = & c_n
\end{array}
$$

ή με τη βοήθεια των πινάκων

$$
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\
 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & u_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},
$$

δηλαδή

$$
U\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \text{με} \quad U \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{ή} \quad U \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad (2.2.2 - 5)
$$

όπου ο U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Η λύση του συστήματος $(2.2.2-5)$ γίνεται με **ανάδρομη αντικατάσταση** (backward substitution), δηλαδή από την τελευταία προς την 1η εξίσωση. Η διαδικασία περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.2.2 - 1.

Παράδειγμα 2.2.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 5. \end{array} \qquad (2.2.2 - 6)$$

Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss η λύση προκύπτει ως εξής:

1ο βήμα

Γίνεται απαλοιφή του αγνώστου x_1 από τη 2η και 3η εξίσωση ως εξής:

$$\begin{array}{lclcll} \text{Εξίσωση } 2: & = & \text{Εξίσωση } 2 & - & m_{21} * \text{Εξίσωση } 1\,; & m_{21} = \;\; -1/2 \\ \text{Εξίσωση } 3: & = & \text{Εξίσωση } 3 & - & m_{31} * \text{Εξίσωση } 1\,; & m_{31} = \;\;\;\; 1/2. \end{array}$$

Άρα στο τέλος του 1ου βήματος το σύστημα γράφεται

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 6 \\ & & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & 3\,x_3 & = & 2, \end{array}$$

που προφανώς είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα $(2.2.2 - 6)$, επειδή έχει διατηρηθεί η 1η εξίσωση.

2ο βήμα

Απαλείφεται ο άγνωστος x_2 από την 3η εξίσωση ως εξής:

$$\text{Εξίσωση } 3: \;=\; \text{Εξίσωση } 3 \;-\; m_{32} * \text{Εξίσωση } 2\,; \quad m_{32} = 1/3.$$

Άρα στο τέλος του 2ου βήματος το σύστημα θα έχει τελικά τη μορφή

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 6 \\ & & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & & - & \dfrac{8}{3}\,x_3 & = & 0 \end{array} \qquad (2.2.2 - 7)$$

που είναι επίσης ισοδύναμο με το αρχικό λόγω της διατήρησης και της 2ης εξίσωσης.

Λύνοντας τώρα το σύστημα $(2.2.2-7)$ με την ανάδρομη αντικατάσταση, δηλαδή από την 3η προς την 1η εξίσωση, προκύπτει ότι η λύση του αρχικού συστήματος $(2.2.2-6)$ είναι:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= (6+x_3)/3 = (6+0)/3 = 2 \\ x_1 &= (6-2x_2-4x_3)/2 = (6-2\cdot 2-4\cdot 0)/2 = 1. \end{aligned}$$

Σημείωση 2.2.2 - 1

Οι πολλαπλασιαστές του Gauss σύμφωνα με τους δείκτες τους ορίζουν έναν κάτω τριγωνικό πίνακα τάξης $(3,3)$ με μονάδες στη διαγώνιο, τον

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

ενώ οι συντελεστές του τελικού συστήματος $(2.2.2-7)$ έναν άνω τριγωνικό πίνακα, τον

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα προκύπτει τότε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = LU,$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του αρχικού συστήματος $(2.2.2-6)$. Γενικότερα ισχύει:

Θεώρημα 2.2.2 - 1 (απαλοιφής του Gauss). *Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss ισοδυναμεί με μια διαμέριση του πίνακα A σε έναν κάτω τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο και σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα, δηλαδή*

$$A = LU. \tag{2.2.2 - 8}$$

2.2.3 Μέθοδος της LU διαμέρισης

Έστω ότι ο τετραγωνικός πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του γραμμικού συστήματος $(2.1.1-1)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array} \tag{2.2.3 - 1}$$

έχει διαμεριστεί σε γινόμενο δύο πινάκων ως $A = LU$ με L έναν κάτω τριγωνικό πίνακα με διαγώνια στοιχεία ίσα με τη μονάδα και U έναν άνω τριγωνικό πίνακα,[6] δηλαδή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.2.3 - 2}$$

Τότε προφανώς είναι $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου

$$\mathbf{x} = [x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n]^\top \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = [b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n]^\top .$$

[6] Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Γραμμική Άλγεβρα*.

Το σύστημα $(2.2.3-1)$: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ σύμφωνα και με τη διαμέριση $(2.2.3-14)$ του πίνακα A γράφεται

$$(LU)\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

ή σύμφωνα με την προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου πινάκων

$$L\,(U\mathbf{x})=\mathbf{b}. \tag{2.2.3 - 3}$$

Έστω $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$, όπου

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n, \end{bmatrix}$$

με $\mathbf{y}=[y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n]^\top$ **βοηθητικό διάνυσμα**, δηλαδή

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & u_{13}x_3 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & y_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & u_{23}x_3 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & y_2 \\ & & & & u_{33}x_3 & + & \cdots & + & u_{3n}x_n & = & y_3 \\ & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & u_{nn}x_n & = & y_n. \end{array} \tag{2.2.3 - 4}$$

Τότε το αρχικό σύστημα $(2.2.3-1)$: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ισοδυναμεί με τα συστήματα

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \text{και} \tag{2.2.3 - 5}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{2.2.3 - 6}$$

όπου το σύστημα $(2.2.3-5)$ έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n, \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος 2.2.3 - 1 (αντικατάστασης προς τα εμπρός)

$y_1 = b_1$
Για $i = 2,\, 3,\, \dots,\, n$
  $y_i = b_i$
  Για $j = 1,\, 2,\, \dots,\, i-1$
    $y_i = y_i - l_{ij}\, y_j$
  τέλος j
τέλος i

δηλαδή

$$\begin{array}{lllll} y_1 & & & & = b_1 \\ l_{21}y_1 + & y_2 & & & = b_2 \\ \quad\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}y_1 + & l_{n2}y_2 & + \; l_{n3}y_3 & + \cdots + l_{n,n-1}y_{n-1} + y_n & = b_n . \end{array} \qquad (2.2.3 - 7)$$

Το σύστημα (2.2.3−12) λύνεται με τη μέθοδο της προς τα **εμπρός αντικατάστασης** (forward substitution) ως εξής:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ y_2 &= b_2 - l_{21}y_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_n &= b_n - (l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + .. + l_{n,n-1}y_{n-1}) = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}\, y_j , \end{aligned}$$

που περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.2.3 - 1, ενώ η λύση του συστήματος $(2.2.3-6)$, δηλαδή του $(2.2.3-4)$ γίνεται με τη μέθοδο της ανάδρομης αντικατάστασης, που περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.2.2 - 1.

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν μέθοδος της **LU διαμέρισης** (LU decomposition ή LU factorization) ή **μέθοδος Doolittle**.[7]

[7]Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition*

Αλγόριθμος 2.2.3 - 2 (μέθοδος της LU διαμέρισης)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Για $i = 1, 2, \ldots, n$

Για $j = i, i+1, \ldots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{kj}$$

τέλος j

Για $j = i+1, i+2, \ldots, n$

$$l_{ij} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{ki}\right) / u_{ii}$$

τέλος j

τέλος i

Στην περίπτωση που κατά τη διαμέριση κάποιο από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα U μηδενίζεται, η μέθοδος δεν εφαρμόζεται. Αυτό είναι το αντίστοιχο της ύπαρξης μηδενικού οδηγού στοιχείου κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss και αντιμετωπίζεται με εναλλαγή των στηλών, όπως στη μέθοδο Gauss με διάταξη. Ο υπολογισμός των πινάκων L και U γίνεται με τον Αλγόριθμο 2.2.3 - 2, που είναι γνωστός και σαν **αλγόριθμος Doolittle** (Doolittle algorithm ή Doolittle reduction).

Παράδειγμα 2.2.3 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 5. \end{array} \qquad (2.2.3 - 8)$$

του Παραδείγματος 2.2.2 - 1, όπου ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων

Επίσης *mathworld.wolfram.com/LUDecomposition.html* σύμφωνα με τη διαμέριση $(2.2.3-14)$ γράφεται $A = LU$, όπου

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}}^{U}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}\,u_{11} & u_{22}+l_{21}\,u_{12} & u_{23}+l_{21}\,u_{13} \\ l_{31}\,u_{11} & l_{32}\,u_{22}+l_{31}\,u_{12} & u_{33}+l_{31}\,u_{13}+l_{32}\,u_{23} \end{bmatrix}. \qquad (2.2.3 - 9)$$

Στην παραπάνω σχέση εξισώνοντας τα στοιχεία του 1ου και του τελευταίου πίνακα προκύπτει ότι

$$\begin{array}{rcr|rcr|rcr}
u_{11} & = & 2 & u_{12} & = & 2 & u_{13} & = & 4 \\
l_{21} & = & -1/u_{11} & u_{22} & = & 2-l_{21}u_{12} & u_{23} & = & -3-l_{21}u_{13} \\
 & = & -\frac{1}{2} & & = & 2-\left(-\frac{1}{2}\right)=3 & & = & -3-\left(-\frac{1}{2}\right)4=-1 \\
l_{31} & = & 1/u_{11} & l_{32} & = & \left(2-l_{31}u_{12}\right)/u_{22} & u_{33} & = & -1-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23} \\
 & = & \frac{1}{2} & & = & \left(2-\frac{1}{2}\cdot 2\right)/3 & & = & -1-\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot(-1) \\
 & & & & = & \frac{1}{3} & & = & -\frac{8}{3}\,.
\end{array}$$

Τότε το αρχικό σύστημα $(2.2.3-8)$: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου

$$\mathbf{b} = [b_1,\, b_2,\, b_3]^\top = [6, 3, 5]^\top,$$

ισοδυναμεί με τα συστήματα

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \text{και} \qquad (2.2.3 - 10)$$
$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad (2.2.3 - 11)$$

όπου το σύστημα $(2.2.3-10)$ έχει στην περίπτωση αυτή τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3, \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{lllllll} y_1 & & & & & = b_1 \\ l_{21}\,y_1 & + & y_2 & & & = b_2 \\ l_{31}\,y_1 & + & l_{32}\,y_2 & + & y_3 & = b_3 \end{array}$$

ή αντικαθιστώντας τις τιμές l_{ij}; $i = 2,\,3$ και $j = 1,\,2$

$$\begin{array}{lllllll} y_1 & & & & & = 6 \\ -\frac{1}{2}\,y_1 & + & y_2 & & & = 3 \\ \frac{1}{2}\,y_1 & + & \frac{1}{3}\,y_2 & + & y_3 & = 5. \end{array} \qquad (2.2.3 - 12)$$

Λύνοντας το σύστημα (2.2.3−12) με τη μέθοδο της προς τα **εμπρός αντικατάστασης** (forward substitution) έχουμε ότι

$$\begin{array}{lllll} y_1 & = & b_1 & = & 6 \\ y_2 & = & b_2 - l_{21}y_1 & = & 3 + \frac{1}{2}\cdot 6 = 6 \\ y_3 & = & b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 & = & 5 - \frac{1}{2}\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 6 = 0. \end{array}$$

Τότε το σύστημα $(2.2.3 - 11)$: $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ προκύπτει η λύση του αρχικού συστήματος $(2.2.3 - 8)$ ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$\begin{array}{lllllll} u_{11}\,x_1 & + & u_{12}\,x_2 & + & u_{13}\,x_3 & = & y_1 \\ & & u_{22}\,x_2 & + & u_{23}\,x_3 & = & y_2 \\ & & & & u_{33}\,x_3 & = & y_3 \end{array}$$

ή αντικαθιστώντας τις τιμές u_{ij}; $i,\,j = 1,\,2,\,3$ και y_i; $i = 1,\,2,\,3$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 6 \\ & & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ & & & & -\frac{8}{3}\,x_3 & = & 0, \end{array} \qquad (2.2.3 - 13)$$

οπότε με τη μέθοδο της ανάδρομης αντικατάστασης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= (6 + x_3)/3 = (6+0)/3 = 2 \\ x_1 &= (6 - 2x_2 - 4x_3)/2 = (6 - 2\cdot 2 - 4\cdot 0)/2 = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή η λύση που είχε προκύψει και με τη μέθοδο του Gauss.

Σημείωση 2.2.3 - 1

Άμεσα προκύπτει από τη λύση του Παραδείγματος 2.2.3 - 1 ότι οι συντελεστές των πινάκων L και U επαληθεύουν τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 2.2.2 - 1.

Μέθοδος Crout

Η **μέθοδος Crout** (Crout's method ή Crout matrix decomposition), είναι μια παραλλαγή της LU διαμέρισης, όπου στη διαμέριση του πίνακα A στη μορφή LU ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός, ενώ ο U άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.2.3 - 14)$$

Η μέθοδος δίνει αποτελέσματα περίπου ίδιας ακρίβειας με την προηγούμενη.

2.2.4 Μέθοδος Cholesky

[8]Όταν ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του γραμμικού συστήματος

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

είναι **συμμετρικός**, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιείται η διαμέριση

$$A = LL^{\top}, \tag{2.2.4 - 1}$$

όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας της μορφής

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},$$

οπότε ο ανάστροφος πίνακας θα είναι:

$$L^{\top} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

---

[8]Υπενθυμίζεται - βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Γραμμική Άλγεβρα* - ότι:

Ορισμός **(συμμετρικός πίνακας)** *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός (symmetric), όταν $A = A^{\top}$.*

Άρα σύμφωνα με την $(2.2.4-1)$ στην περίπτωση αυτή θα ισχύει:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = LL^\top$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2.2.4 - 2)$$

[9]Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος Cholesky** (Cholesky decomposition ή Cholesky triangle) και ο υπολογισμός των l_{ij} με $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, i$ γίνεται όπως στην μέθοδο LU.

Για την ευκολότερη κατανόηση της μεθόδου δίνεται το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.2.4 - 1

Έστω ότι ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του γραμμικού συστήματος

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3, \end{array}$$

είναι συμμετρικός, δηλαδή της μορφής:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

[9]Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Cholesky_decomposition*
Επίσης *mathworld.wolfram.com/CholeskyDecomposition.html*

οπότε σύμφωνα με τη σχέση $(2.2.4-1)$ θα έχουμε στην περίπτωση αυτή τη διαμέριση

$$A = LL^\top, \tag{2.2.4 - 3}$$

όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας της μορφής

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

με ανάστροφο πίνακα τον:

$$L^\top = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}.$$

Άρα από τη σχέση $(2.2.4-2)$ προκύπτει τότε ότι

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = LL^\top$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}\,l_{11} & l_{31}\,l_{11} \\ l_{21}\,l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31}\,l_{21} + l_{32}\,l_{22} \\ l_{31}\,l_{11} & l_{31}\,l_{21} + l_{32}\,l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} = LL^\top. \tag{2.2.4 - 4}$$

Στην $(2.2.4-4)$ εξισώνοντας τα στοιχεία του πίνακα A και του $LL^\top$ προκύπτει ότι

Διαγώνια στοιχεία l_{kk} **όπου** $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$,
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$,
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(l_{31}^2 + l_{32}^2\right)}$, και γενικά
- $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}\,.$

Στοιχεία l_{ik} **όπου** $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ **και** $i = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n$

- $l_{21} = \dfrac{1}{l_{11}}\, a_{21}$,
- $l_{31} = \dfrac{1}{l_{11}}\, a_{31}$,
- $l_{32} = \dfrac{1}{l_{22}}\, (a_{32} - l_{31}\, l_{21})$, και γενικά
- $l_{ik} = \dfrac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, l_{kj} \right)\,.$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται επίσης και στον Αλγόριθμο 2.2.4 - 1.

Παράδειγμα 2.2.4 - 2

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία του Παραδείγματος 2.2.4 - 1 να υπολογιστεί ο πίνακας L, όταν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε:

- $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{25} = 5$,

Αλγόριθμος 2.2.4 - 1 (μέθοδος του Cholesky - διαμέριση κατά στήλη)

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός θετικά ορισμένος με $A = LL^T$
και το στοιχείο a_{ij} επαναγράφεται από το l_{ij}, όταν $i \geq j$.
Για $k = 1, 2, \ldots, n$

$$l_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \right)^{1/2}$$

Για $i = k+1, k+2, \ldots, n$

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} a_{kj} \right) / a_{kk}$$

τέλος i

τέλος k

- $l_{21} = \dfrac{1}{l_{11}}\, a_{21} = \dfrac{1}{5}\, 15 = 3,$
- $l_{31} = \dfrac{1}{l_{11}}\, a_{31} = \dfrac{1}{5}\, (-5) = -1,$
- $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{18 - 3^2} = 3,$
- $l_{32} = \dfrac{1}{l_{22}}\, (a_{32} - l_{31}\, l_{21}) = \dfrac{1}{3}\, [0 - (-1)3] = 1,$
- $l_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(l_{31}^2 + l_{32}^2\right)} = \sqrt{11 - [(-1)^2 + 1^2]} = 3.$

Άρα

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Παρατηρήσεις 2.2.4 - 1

- Σε σύγκριση με τη μέθοδο LU, στη μέθοδο Cholesky ο υπολογισμός του πίνακα U γίνεται άμεσα από τη σχέση $U = L^\top$. Επομένως έχουμε μείωση του αριθμού των πράξεων λύσης του γραμμικού συστήματος, με άμεση συνέπεια σε συστήματα με μεγάλο αριθμό εξισώσεων να έχουμε αύξηση της ακρίβειας λύσης των, εφόσον είναι ήδη γνωστό ότι η μείωση αυτή συνεπάγεται και την αντίστοιχη μείωση των λαθών στρογγυλοποίησης.[10]

- Σε περίπτωση που κάποιο από τα διαγώνια στοιχεία μηδενίζεται, τότε η μέθοδος δεν εφαρμόζεται. Στην περίπτωση αυτή η όποια εναλλαγή των στηλών αφαιρεί από τον A τη συμμετρική ιδιότητα.

- Η μέθοδος εφαρμόζεται πάντοτε, όταν ο A είναι συμμετρικός και **θετικά ορισμένος**,[11] οπότε τα διαγώνια στοιχεία είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

- Όταν οι υπόρριζες ποσότητες είναι αρνητικές, τα διαγώνια στοιχεία θα είναι φανταστικοί αριθμοί.

Άσκηση

1. Δείξτε ότι, αν

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 14 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

[10] Βλέπε Μάθημα *Αριθμητική Λύση Εξισώσεων - Σφάλματα υπολογισμών.*

[11]

Ορισμός. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, αντίστοιχα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε ο A λέγεται θετικά ορισμένος (positive definite), όταν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ με $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, αντίστοιχα $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0, \quad \textit{αντίστοιχα} \quad \mathrm{Re}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{H}} A\mathbf{x}\right) > 0.$$

2. Όμοια ότι, αν

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την αντίστοιχη διαδικασία λύσης γραμμικών συστημάτων με την LU διαμέριση (Παράδειγμα 2.2.3 - 1, όπου $L\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και $L^\top \mathbf{y} = \mathbf{b}$), δείξτε ότι η λύση του συστήματος

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{όταν} \quad \mathbf{b} = [32,\, 26,\, 20,\, -6]^\top$$

είναι

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad \text{και} \quad x_4 = -1.$$

2.2.5 Λύση συστημάτων ειδικής μορφής

Δίνονται στη συνέχεια οι μέθοδοι λύσης μιας ειδικής κατηγορίας γραμμικών συστημάτων που παρουσιάζονται κυρίως στην αριθμητική λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές,[12] κ.λπ., όπου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, έστω A, παρουσιάζει μια ειδική συμμετρία.

Ειδικότερα θα εξεταστούν οι περιπτώσεις, όπου ο πίνακας A είναι:

Τριδιαγώνιος

[13]Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 2.2.5 - 1 (τριδιαγώνιος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n, όπου $a_{ij} = 0$ για κάθε $|i - j| > 1$. Τότε ο A λέγεται τριδιαγώνιος (tridiagonal) και ένας συνήθης συμβολισμός του στην περίπτωση*

[12]Βλέπε Μάθημα *Αριθμητική Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων - Παραβολικές Εξισώσεις*.

[13]Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Γραμμική Άλγεβρα*.

αυτή είναι ο εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}. \tag{2.2.5 - 1}$$

Έστω τώρα το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array} \tag{2.2.5 - 2}$$

όπου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων A είναι **τριδιαγώνιος**, δηλαδή έχει τη μορφή $(2.2.5-1)$. Τότε το σύστημα $(2.2.5-2)$ σύμφωνα με την $(2.2.5-1)$ γράφεται:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1\,x_1 & + & c_1\,x_2 & & & = & b_1 \\ b_2\,x_1 & + & a_2\,x_2 & + & c_2\,x_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1}\,x_{n-2} & + & a_{n-1}\,x_{n-1} & + & c_{n-1}\,x_n & = & b_{n-1} \\ b_n\,x_{n-1} & + & a_n\,x_n & & & = & b_n. \end{array} \tag{2.2.5 - 3}$$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A σύμφωνα με τη μέθοδο LU θα έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{n-1} & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}}^{U} \tag{2.2.5 - 4}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ u_1\, l_2 & u_2 + l_2\, d_1 & d_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-2}\, l_{n-1} & u_{n-1} + l_{n-1}\, d_{n-2} & d_{n-1} \\ & & & u_{n-1}\, l_n & u_n + l_n\, d_{n-1} \end{bmatrix}}^{LU}.$$

Στην $(2.2.5 - 4)$ εξισώνοντας τα στοιχεία του A και του τελικού πίνακα LU προκύπτει ότι

Αλγόριθμος 2.2.5 - 1 (διαμέρισης τριδιαγώνιου πίνακα)

- $u_1 = a_1$ και $d_1 = c_1$.
- Για $i = 2, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} u_{i-1}\, l_i &= b_i &\Rightarrow\quad & l_i = \frac{b_i}{u_{i-1}}, \\ u_i + l_i\, d_{i-1} &= a_i &\Rightarrow\quad & u_i = a_i - l_i\, d_{i-1}, \\ d_i &= c_i &\Rightarrow\quad & d_i = c_i. \end{aligned}$$

- Για $i = n$

$$\begin{aligned} l_n\, u_{n-1} &= b_n &\Rightarrow\quad & l_n = \frac{b_n}{u_{n-1}}, \\ u_n + l_n\, d_{n-1} &= a_n &\Rightarrow\quad & u_n = a_n - l_n\, d_{n-1}. \end{aligned}$$

Τότε η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, που ισοδυναμεί σύμφωνα με την Παράγραφο 2.2.3 με τη λύση των συστημάτων $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ και $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, περιγράφεται αναλυτικά στον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος 2.2.5 - 2 (τριδιαγώνιου συστήματος)

Σύστημα:

- $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{n-1} & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix},$$

ή

$$\begin{aligned} y_1 \quad &= b_1 \\ l_2\, y_1 + y_2 &= b_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ l_n\, y_{n-1} + y_n &= b_n, \end{aligned} \qquad \text{οπότε} \qquad \left\| \begin{array}{l} y_1 = b_1, \\ \text{για} \quad i = 2, \ldots, n \\ y_i = b_i - l_i\, y_{i-1}, \end{array} \right.$$

και

- $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix},$$

ή

$$
\begin{aligned}
u_1\, x_1 + d_1\, x_2 &= y_1 \\
u_2\, x_2 + d_2\, x_3 &= y_2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
u_{n-1}\, x_{n-1} + d_{n-1}\, x_n &= y_{n-1} \\
u_n\, x_n &= y_n,
\end{aligned}
$$

οπότε η λύση του συστήματος $(2.2.5-2)$ είναι:

$$
\left\| \begin{array}{l}
x_n = \dfrac{y_n}{u_n}, \\
\text{για} \quad i = n-1, \ldots, 2, 1 \\
x_i = \dfrac{y_i - d_i\, x_{i+1}}{u_i}\,.
\end{array} \right.
$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι γνωστός και σαν **αλγόριθμος του Thomas**.

Πενταδιαγώνιος

[14]Όμοια υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 2.2.5 - 2 (τριδιαγώνιος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n, όπου $a_{ij} = 0$ για κάθε $|i-j| > 2$. Τότε ο A λέγεται πενταδιαγώνιος (quindiagonal ή pentadiagonal) και συνήθως συμβολίζεται ως*

$$
A = \begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & e_1 & & & & \\
b_2 & a_2 & c_2 & e_2 & & & \\
f_3 & b_3 & a_3 & c_3 & e_3 & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & f_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} & c_{n-2} & e_{n-2} \\
 & & & f_{n-1} & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\
 & & & & f_n & b_n & a_n
\end{bmatrix} \qquad (2.2.5 - 5)
$$

[14]Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Γραμμική Άλγεβρα*.

Ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, η διαμέριση του πίνακα A θα είναι όμοια της μορφής $A = LU$, όπου:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ l_2 & 1 & & & & & & \\ \tilde{f}_3 & l_3 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \tilde{f}_{n-2} & l_{n-2} & 1 & & & \\ & & & \tilde{f}_{n-1} & l_{n-1} & 1 & & \\ & & & & \tilde{f}_n & l_n & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{e}_1 & & & & \\ & u_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{e}_2 & & & \\ & & u_3 & \tilde{c}_3 & \tilde{e}_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & u_{n-2} & \tilde{c}_{n-2} & \tilde{e}_{n-2} \\ & & & & & u_{n-1} & \tilde{c}_{n-1} \\ & & & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Τότε ο πίνακας LU, που για ευκολία δίνεται για κάθε γραμμή χωριστά (πίνακας τάξης 7), θα είναι της μορφής:

- 1-γραμμή στοιχεία:

$$u_1, \quad \tilde{c}_1, \quad \tilde{e}_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

- 2-γραμμή:

$$l_2\, u_1, \quad \tilde{c}_1\, l_2 + u_2, \quad \tilde{c}_2 + \tilde{e}_1\, l_2, \quad \tilde{e}_2, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

- i-γραμμή, όπου $i = 3, \ldots, n-2$:

$$0, \quad \tilde{f}_i\, u_{i-2}, \qquad \tilde{c}_{i-2}\, \tilde{f}_i + l_i\, u_{i-1}, \quad \tilde{e}_{i-2}\, \tilde{f}_i + \tilde{c}_{i-1}\, l_i + u_i,$$
$$\tilde{c}_i + \tilde{e}_{i-1}\, l_i, \qquad \tilde{e}_i, \quad 0$$

Αλγόριθμος 2.2.5 - 3 (διαμέρισης πενταδιαγώνιου πίνακα)

Δεδομένα: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, αντίστοιχα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

όπου $a_{ij} = 0$ για κάθε $|i-j| > 2$

$u_1 = a_1, \quad \tilde{c}_1 = c_1, \quad \tilde{e}_1 = e_1,$

$l_2 = \dfrac{b_2}{u_1}, \quad u_2 = a_2 - \tilde{c}_1\, l_2, \quad \tilde{c}_2 = c_2 - \tilde{e}_1\, l_2, \quad \tilde{e}_2 = e_2,$

Για $i = 3, 4, \ldots, n-2$

$\tilde{f}_i = \dfrac{f_i}{u_{i-2}}, \quad l_i = \dfrac{b_i - \tilde{c}_{i-2}\, \tilde{f}_i}{u_{i-1}}, \quad u_i = a_i - \tilde{c}_{i-1}\, l_i - \tilde{e}_{i-2}\, \tilde{f}_i,$

$\tilde{c}_i = c_i - \tilde{e}_{i-1}\, l_i, \quad \tilde{e}_i = e_i,$

τέλος i

$\tilde{f}_{n-1} = \dfrac{f_{n-1}}{u_{n-3}}, \quad l_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - \tilde{c}_{n-3}\, \tilde{f}_{n-1}}{u_{n-2}}, \quad u_{n-1} = a_{n-1} - \tilde{c}_{n-2}\, l_{n-1} - \tilde{e}_{n-3}\, \tilde{f}_{n-1},$

$\tilde{c}_{n-1} = c_{n-1} - \tilde{e}_{n-2}\, l_{n-1},$

$\tilde{f}_n = \dfrac{f_n}{u_{n-2}}, \quad l_n = \dfrac{b_n - \tilde{c}_{n-2}\, \tilde{f}_n}{u_{n-1}}, \quad u_n = a_n - \tilde{c}_{n-1}\, l_n - \tilde{e}_{n-2}\, \tilde{f}_n.$

- $(n-1)$-γραμμή:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad \tilde{f}_{n-1}\, u_{n-3}, \quad \tilde{c}_{n-3}\, \tilde{f}_{n-1} + l_{n-1}\, u_{n-2},$$
$$\tilde{e}_{n-3}\, \tilde{f}_{n-1} + \tilde{c}_{n-2}\, l_{n-1} + u_{n-1}, \quad \tilde{c}_{n-1} + \tilde{e}_{n-2}\, l_{n-1}$$

- n-γραμμή:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \tilde{f}_n\, u_{n-2}, \quad \tilde{c}_{n-2}\, \tilde{f}_n + l_n\, u_{n-1},$$
$$\tilde{e}_{n-2}\, \tilde{f}_n + \tilde{c}_{n-1}\, l_n + u_n.$$

Τα στοιχεία των πινάκων L και U προκύπτουν εξισώνοντας τα στοιχεία του πίνακα LU με τα αντίστοιχα του πίνακα A. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.2.5 - 3.

Τότε όμοια, όπως και στην περίπτωση του τριδιαγώνιου συστήματος, η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, που ισοδυναμεί σύμφωνα με την Παράγραφο

2.2.3 επίσης με τη λύση των συστημάτων $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ και $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, περιγράφεται αναλυτικά στον παρακάτω αλγόριθμο:

Αλγόριθμος 2.2.5 - 4 (πενταδιαγώνιου συστήματος)

Σύστημα:

- $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ l_2 & 1 & & & & & \\ \tilde{f}_3 & l_3 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \tilde{f}_{n-2} & l_{n-2} & 1 & & \\ & & & \tilde{f}_{n-1} & l_{n-1} & 1 & \\ & & & & \tilde{f}_n & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix},$$

ή

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ l_2\, y_1 + y_2 &= b_2 \\ \tilde{f}_3\, y_1 + l_3\, y_2 + y_3 &= b_3 \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ \tilde{f}_n\, y_{n-2} + l_n\, y_{n-1} + y_n &= b_n, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{array}{||l} y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2 - l_2\, y_1 \\ \text{για} \quad i = 3, \ldots, n \\ y_i = b_i - \tilde{f}_i\, y_{i-2} - l_i\, y_{i-1}, \end{array}$$

και

- $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} u_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{e}_1 & & & & \\ & u_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{e}_2 & & & \\ & & u_3 & \tilde{c}_3 & \tilde{e}_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & u_{n-2} & \tilde{c}_{n-2} & \tilde{e}_{n-2} \\ & & & & & u_{n-1} & \tilde{c}_{n-1} \\ & & & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-2} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix},$$

ή

$$\begin{aligned} u_1\, x_1 + \tilde{c}_1\, x_2 + \tilde{e}_1\, x_3 &= y_1 \\ u_2\, x_2 + \tilde{c}_2\, x_3 + \tilde{e}_2\, x_4 &= y_2 \\ u_3\, x_3 + \tilde{c}_3\, x_4 + \tilde{e}_3\, x_5 &= y_3 \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ u_{n-2}\, x_{n-2} + \tilde{c}_{n-2}\, x_{n-1} + \tilde{e}_{n-2}\, x_n &= y_{n-2} \\ u_{n-1}\, x_{n-1} + \tilde{c}_{n-1}\, x_n &= y_{n-1} \\ u_n\, x_n &= y_n, \end{aligned}$$

οπότε η λύση του συστήματος $(2.2.5-2)$ είναι:

$$\left\| \begin{array}{l} x_n = \dfrac{y_n}{u_n}, \\ x_{n-1} = \dfrac{y_{n-1} - \tilde{c}_{n-1}\, x_n}{u_{n-1}}, \\ \text{για} \quad i = n-2,\, \ldots,\, 2,\, 1 \\ x_i = \dfrac{y_i - \tilde{c}_i\, x_{i+1} - \tilde{e}_i\, x_{i+2}}{u_i}\,. \end{array} \right.$$

Άσκηση

1. Εφαρμόζοντας τους Αλγόριθμους 2.2.5 - 1 και 2.2.5 - 2 δείξτε ότι η λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & -4 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \end{array}$$

είναι

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1 \quad \text{και} \quad x_4 = 0.$$

2. Όμοια με τους Αλγόριθμους 2.2.5 - 3 και 2.2.5 - 4 δείξτε ότι η λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & & & = & 9 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & & & = & -8 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & - & 4x_5 & = & -1 \\ & & & & x_3 & - & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 7 \end{array}$$

είναι

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2 \quad \text{και} \quad x_5 = 3.$$

2.3 Αριθμητικές μέθοδοι λύσης γραμμικών συστημάτων

2.3.1 Ορισμοί

Όταν το πλήθος των εξισώσεων είναι σχετικά μικρό, τότε είναι προτιμότερο για τη λύση του συστήματος $(2.1.1-1)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \tag{2.3.1 - 1}$$

να χρησιμοποιηθούν οι άμεσοι μέθοδοι της προηγούμενης παραγράφου. Σε μεγάλο όμως αριθμό εξισώσεων για περισσότερη ακρίβεια των λύσεων συνήθως προτιμούνται οι **επαναληπτικές μέθοδοι** (iterative methods), οι σημαντικότερες των οποίων δίνονται στη συνέχεια.

Είναι ήδη γνωστό ότι το σύστημα $(2.3.1-1)$ γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.3.1 - 2}$$

όπου ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τάξης n με $|A| \neq 0$. Τότε έχοντας υπόψη το ανάλογο πρόβλημα της εύρεσης των ριζών της Εξίσωσης $(1.1.1-2)$:

$$f(x) = 0,$$

του Μαθήματος *Αριθμητική λύση εξισώσεων*, θα πρέπει και για την περίπτωση του συστήματος $(2.3.1-2)$ να δημιουργηθεί για κάθε άγνωστο $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ χωριστά μια επαναληπτική σχέση ανάλογη της $(1.1.1-3)$, δηλαδή μια σχέση της μορφής

$$x_{i+1} = g\left(x_i\right); \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\, .$$

Αν για ευκολία η επαναληπτική σχέση για τον άγνωστο, έστω x_1, γραφεί σύμφωνα με τα παραπάνω στη μορφή

$$x_1^{i+1} = g_1\left(x_1^i\right); \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\, ,$$

τότε για τον x_k άγνωστο η σχέση αυτή θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$x_k^{i+1} = g_k\left(x_k^i\right); \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \text{ και } i = 0,\, 1,\, \ldots .$$

ή όπως συνήθως γράφεται[15]

$$x_k^{(i+1)} = g_k\left(x_k^{(i)}\right); \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \text{ και } i = 0,\, 1,\, \ldots . \qquad (2.3.1 - 3)$$

Οι τιμές των αγνώστων για κάθε τιμή του δείκτη i ή διαφορετικά για κάθε επανάληψη, ορίζουν τότε ένα **διάνυσμα** με συντεταγμένες τις αντίστοιχες τιμές των αγνώστων $x_1^{(i)},\, x_2^{(i)},\, \ldots,\, x_n^{(i)}$ του συστήματος.

Έστω

$$\mathbf{x}_k^{(i+1)} = \left[x_1^{(i)},\, x_2^{(i)},\, \ldots,\, x_n^{(i)}\right]^\top$$

το διάνυσμα αυτό. Τότε τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_k^{(i+1)}; \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \text{ και } i = 0,\, 1,\, \ldots$$

δημιουργούν μια αντίστοιχη ακολουθία διανυσμάτων, που θεωρητικά θα πρέπει να συγκλίνει στη λύση του συστήματος $(2.3.1 - 2)$.

Επομένως το πρόβλημα της εύρεσης της λύσης του συστήματος $(2.3.1 - 2)$ ανάγεται στον προσδιορισμό της επαναληπτικής συνάρτησης g_k στην $(2.3.1 - 3)$. Τότε, όπως και στο Μάθημα *Αριθμητική λύση εξισώσεων*, ο τρόπος προσδιορισμού της g_k καθορίζει και την αντίστοιχη μέθοδο λύσης του συστήματος. Τα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων του παραπάνω μαθήματος ισχύουν και στην περίπτωση των επαναληπτικών μεθόδων για συστήματα.

Στη συνέχεια εξετάζονται μόνον οι αρχικές κλασικές μέθοδοι που προκύπτουν από τη μορφή $(2.3.1 - 3)$.[16]

[15] Στα συστήματα χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $(i + 1)$, δηλαδή το $i + 1$ σε παρένθεση για να διαφέρει από τον δείκτη k, που χρησιμοποιείται για τους αγνώστους. Στις εξισώσεις, που δεν απαιτείται ανάλογη διάκριση, χρησιμοποιείται το $i + 1$ χωρίς παρένθεση.

[16] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη του προβλήματος, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

2.3.2 Μέθοδος του Jacobi

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Jacobi η επαναληπτική σχέση (2.3.1−3) δημιουργείται, όταν το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_n, \end{array} \qquad (2.3.2 - 1)$$

λυθεί διαγώνια για κάθε έναν άγνωστο χωριστά, δηλαδή η 1η εξίσωση για τον άγνωστο x_1, η 2η για τον x_2 και τελικά η n-οστή για τον x_n θεωρώντας τους άλλους αγνώστους σε κάθε περίπτωση σαν γνωστούς.

Άρα, όταν $a_{11}\cdots a_{nn} \neq 0$, σύμφωνα με τη διαδικασία της μεθόδου του Jacobi από το σύστημα (2.3.2 − 1) προκύπτει ότι:

$$\begin{array}{lcll} x_1 & = & -\dfrac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n\right] & + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 & = & -\dfrac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2n}\,x_n\right] & + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots & = & \vdots & \quad\vdots \\ x_n & = & -\dfrac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}\right] & + \dfrac{b_n}{a_{nn}}\,. \end{array}$$

Η επαναληπτική σχέση

$$x_k^{(i+1)} = g_k\left(x_k^{(i)}\right); \quad i = 0,\,1,\,\ldots; \quad k = 1,\,2,\,\ldots,\,n$$

προκύπτει τότε ως εξής:

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(i+1)} & = & -\dfrac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(i+1)} & = & -\dfrac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ & & \vdots \\ x_n^{(i+1)} & = & -\dfrac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1^{(i)} + a_{n2}\,x_2^{(i)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(i)}\right] + \dfrac{b_n}{a_{nn}}. \end{array} \qquad (2.3.2 - 2)$$

Αλγόριθμος 2.3.2 - 1 (μεθόδου του Jacobi)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right]^\top$,
ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Για $k = 1,\, 2,\, \dots,\, N$
  Για $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$

  τέλος i
  αν $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)} \right\| < \varepsilon$,
  τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ STOP
  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$
τέλος k
Τύπωσε “ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ”

Η μέθοδος που περιγράφεται στην επαναληπτική σχέση (2.3.2−2) είναι γνωστή σαν η **μέθοδος του Jacobi**[17] και η διαδικασία της περιγράφεται στον Αλγόριθμο 2.3.2 - 1.

Σημείωση 2.3.2 - 1

Στα συστήματα, σε αντίθεση με τις εξισώσεις όπου η αρχική τιμή x_0 των επαναλήψεων είναι δυνατόν να προσδιοριστεί γραφικά ή με τη μέθοδο του μέσου σημείου κ.λπ., δεν είναι εύκολος πάντοτε ο προσδιορισμός των αρχικών τιμών $x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, \dots,\, x_n^{(0)}$. Για τον λόγο αυτό συνήθως θέτουμε

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad \dots, \quad x_n^{(0)} = 0,$$

εκτός αν διαφορετικά δίνεται.

[17]Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_method*

Παράδειγμα 2.3.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & -1 \\ -3\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 7\,x_3 & = & 15 \end{array} \qquad (2.3.2 \text{ - } 3)$$

με ρίζες

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad \text{και} \quad x_3^* = -2.$$

Σύμφωνα με την $(2.3.2-1)$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{5}\,[2\,x_2 - 3\,x_3] \quad - \quad \frac{1}{5} \\ x_2 & = & \frac{1}{9}\,[3\,x_1 - x_3] \quad - \quad \frac{5}{9} \\ x_3 & = & -\frac{1}{7}\,[-\,x_1 + x_2] \quad - \quad \frac{15}{7}\,, \end{array}$$

οπότε από την $(2.3.2-2)$ προκύπτει η παρακάτω επαναληπτική σχέση:

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(i+1)} & = & \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] \quad - \quad \frac{1}{5} \\ x_2^{(i+1)} & = & \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(i)} - x_3^{(i)}\right] \quad - \quad \frac{5}{9} \\ x_3^{(i+1)} & = & -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(i)} + x_2^{(i)}\right] \quad - \quad \frac{15}{7}\,, \end{array}$$

όταν $i = 0,\, 1,\, \ldots$.

Θέτοντας στην $(2.3.2-4)$ σύμφωνα με τη Σημείωση 2.3.2 - 1 σαν αρχικές τιμές

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

διαδοχικά έχουμε:

για $\quad i=0$

$$\begin{aligned}
x_1^{(0+1)}=x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(0)}-3\,x_3^{(0)}\right]-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}=0.2,\\
x_2^{(0+1)}=x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(0)}-x_3^{(0)}\right]-\frac{5}{9}=-\frac{5}{9}=-0.555\,556,\\
x_3^{(0+1)}=x_3^{(1)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(0)}+x_2^{(0)}\right]-\frac{15}{7}=-\frac{15}{7}=-2.142\,857\,.
\end{aligned}$$

για $\quad i=1$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1+1)}=x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(1)}-3\,x_3^{(1)}\right]-\frac{1}{5}\\
&= \frac{1}{5}\left[2\cdot(-0.555)-3\cdot(-2.142)\right]-0.2=0.863\,492,\\
x_2^{(1+1)}=x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left[3\,x_1^{(1)}-x_3^{(1)}\right]-\frac{5}{9}\\
&= \frac{1}{9}\left[3\cdot 0.2-(-2.142)\right]-0.555=-0.384\,127,\\
x_3^{(1+1)}=x_3^{(2)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,x_1^{(1)}+x_2^{(1)}\right]-\frac{15}{7}\\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.2+(-0.555)\right]-2.142\,857=-2.034\,921
\end{aligned}$$

και ανάλογα για $i=2,\,3,\,\ldots$. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας μέχρι και τη 12η επανάληψη δίνονται στον Πίνακα 2.3.2 - 1. Συγκρίνοντας με τις ρίζες προκύπτει τότε ότι στη 12η επανάληψη υπάρχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για την 1η και τη 2η ρίζα και 6 δεκαδικών ψηφίων για την 3η.

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.2 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.2 - 1 (μεθόδου του Jacobi)

```
n = 12; x = 0; y = 0; z = 0;
f1[y_, z_] := (2 y - 3 z)/5 - 1/5;
f2[x_, z_] := (3 x - z)/9 - 5/9;
```

Πίνακας 2.3.2 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου του Jacobi

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
0	-0.200 000	-0.555 556	-2.142 857
1	0.863 492	-0.384 127	-2.092 063
2	0.901 587	-0.035 273	-1.964 626
⋮	⋮	⋮	⋮
9	0.999 939	-0.000 061	-2.000 003
10	0.999 977	-0.000 020	-2.000 000
11	*0.999 992*	*-7.536 012*$\times 10^{-6}$	*-2.000 000*

```
f3[x_, y_] := -(-x + y)/7 - 15/7;
Do[x1 = f1[y, z]; y1 = f2[x, z]; z1 = f3[x, y];
 Print[i, "   ,   ", N[x1, 7], "   ,   ", N[y1, 7], " , ",
 N[z1, 7]]; x = x1; y = y1; z = z1, {i, 1, n}]
```

2.3.3 Μέθοδος των Gauss-Seidel

Η **μέθοδος των Gauss-Seidel**[18] χρησιμοποιεί την ίδια διαδικασία για τη δημιουργία της επαναληπτικής σχέσης $(2.3.2-2)$, δηλαδή της σχέσης

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1^{(i)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\;\;\vdots \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1^{(i)} + a_{n2}\,x_2^{(i)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(i)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}},
\end{aligned}$$

με τη διαφορά ότι η όποια τιμή υπολογίζεται κατά τη διάρκεια εφαρμογής της επαναληπτικής διαδικασίας χρησιμοποιείται σαν **γνωστή** για τον υπολογισμό των υπόλοιπων τιμών.

[18] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss-Seidel_method*

Επομένως η επαναληπτική σχέση της μεθόδου έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x_1{}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}\,x_2^{(i)} + a_{13}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{1n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2{}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\left[a_{21}\,x_1{}^{(i+1)} + a_{23}\,x_3^{(i)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{33}}\left[a_{21}\,x_1{}^{(i+1)} + a_{22}\,x_2{}^{(i+1)} + \ldots + a_{2n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_2}{a_{22}} \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3.3 - 1) \\
x_{n-1}{}^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{n-1,\,n-1}}\left[a_{n-1,1}\,x_1{}^{(i+1)} + a_{n-1,2}\,x_2{}^{(i+1)} + \ldots\right. \\
&\quad \left. + a_{n\,n-2}\,x_{n-2}{}^{(i+1)} + a_{n\,n}\,x_n^{(i)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}} \\
x_n^{(i+1)} &= -\frac{1}{a_{nn}}\left[a_{n1}\,x_1{}^{(i+1)} + a_{n2}\,x_2{}^{(i+1)} + \ldots + a_{n\,n-1}\,x_{n-1}{}^{(i+1)}\right] + \frac{b_n}{a_{nn}}.
\end{aligned}
$$

Η μέθοδος περιγράφεται από τον Αλγόριθμο 2.3.3 - 1.

Παράδειγμα 2.3.3 - 1

Έστω το σύστημα $(2.3.2-3)$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
5\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & -1 \\
-3\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & x_3 & = & -5 \\
x_1 & - & x_2 & - & 7\,x_3 & = & 15
\end{array}
\qquad (2.3.3 - 2)
$$

του Παραδείγματος 2.3.2 - 1 με ρίζες

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad \text{και} \quad x_3^* = -2.$$

Σύμφωνα με την $(2.3.2-4)$ και την $(2.3.3-1)$ έχουμε την παρακάτω

Αλγόριθμος 2.3.3 - 1 (μεθόδου των Gauss-Seidel)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^\top$,
ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Για $k = 1, 2, \ldots, N$
  Για $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} + b_i\right)/a_{ii}$$

  τέλος i
  αν $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| < \varepsilon$,   τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$ STOP
  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$
τέλος k
Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

επαναληπτική μέθοδο των Gauss-Seidel για το σύστημα $(2.3.3-2)$:

$$\begin{aligned}
{x_1}^{(i+1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] - \frac{1}{5} \\
{x_2}^{(i+1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,{x_1}^{(i+1)} - x_3^{(i)}\right] - \frac{5}{9} \qquad (2.3.3\text{ - }3) \\
x_3^{(i+1)} &= -\frac{1}{7}\left[-\,{x_1}^{(i+1)} + {x_2}^{(i+1)}\right] - \frac{15}{7}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,.
\end{aligned}$$

Έχοντας υπόψη τη Σημείωση 2.3.2 - 1 και θέτοντας στην $(2.3.3-3)$ σαν αρχικές τιμές

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

διαδοχικά έχουμε:

για $\quad i=0$

$$\begin{aligned}
{x_1}^{(0+1)} = x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(0)} - 3\,x_3^{(0)}\right] - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} = 0.2 \\
{x_2}^{(0+1)} = x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left[3\,{x_1}^{(1)} - x_3^{(0)}\right] - \frac{5}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[3\cdot 0.2 - 0\right] - \frac{5}{9} = -0.622\,222 \\
x_3^{(0+1)} = x_3^{(1)} &= -\frac{1}{7}\left[-{x_1}^{(1)} + {x_2}^{(1)}\right] - \frac{15}{7} \\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.2 + (-0.622)\right] - \frac{15}{7} = -2.082\,540\,.
\end{aligned}$$

για $\quad i=1$

$$\begin{aligned}
{x_1}^{(1+1)} = x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[2\,x_2^{(1)} - 3\,x_3^{(1)}\right] - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5}\left[2\cdot(-0.622) - 3\cdot(-2.082)\right] - 0.2 = 0.800\,635 \\
{x_2}^{(1+1)} = x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left[3\,{x_1}^{(2)} - x_3^{(1)}\right] - \frac{5}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left[3\cdot 0.800 - (-2.082)\right] - 0.555 = -0.057\,284 \\
x_3^{(1+1)} = x_3^{(2)} &= -\frac{1}{7}\left[-{x_1}^{(2)} + {x_2}^{(2)}\right] - \frac{15}{7} \\
&= -\frac{1}{7}\left[-0.800 + (-0.557)\right] - 2.142\,857 = -2.020\,297\,.
\end{aligned}$$

Όμοια για $i = 2,\,3,\,\ldots$. Τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας μέχρι και την 7η επανάληψη δίνονται στον Πίνακα 2.3.3 - 1. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τις ρίζες $\quad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad$ και $\quad x_3^* = -2$ προκύπτει ότι στην 7η επανάληψη έχουμε ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων, ενώ με τη μέθοδο του Jacobi, όπως έχει προκύψει από τον Πίνακα 2.3.2 - 1, στη 12η επανάληψη υπήρχε ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων για την 1η και τη 2η ρίζα και 6 δεκαδικών για την 3η.

Πίνακας 2.3.3 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου των Gauss-Seidel

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
0	-0.200 000	-0.622 222	-2.082 540
1	0.800 635	-0.057 384	-2.020 297
2	0.989 265	-0.001 323	-2.001 345
3	1.000 277	0.000 242	-1.999 995
4	1.000 094	0.000 031	-1.999 991
5	1.000 007	$1.287\,801\times10^{-6}$	-1.999 999
6	*1.000 000*	$-7.717\,425\times10^{-8}$	*-2.000 000*

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.3 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.3 - 1 (μεθόδου των Gauss-Seidel)

```
n = 7; x = 0; y = 0; z = 0;
f1[y_, z_] := (2 y - 3 z)/5 - 1/5;
f2[x_, z_] := (3 x - z)/9 - 5/9;
f3[x_, y_] := -(-x + y)/7 - 15/7;
Do[x1 = f1[y, z]; y1 = f2[x1, z]; z1 = f3[x1, y1];
 Print[i, "    ,    ", N[x1, 7], "    ,    ", N[y1, 7],
 "    ,    ",N[z1, 7]]; x = x1; y = y1; z = z1,
 {i, 1, n}]
```

2.3.4 Σύγκλιση των μεθόδων

Οι επαναληπτικές σχέσεις $(2.3.2-2)$ και $(2.3.3-1)$ των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel αντίστοιχα δεν συγκλίνουν πάντοτε στις ρίζες του συστήματος $(2.3.2-1)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν περιπτώσεις που η εφαρμογή τους σε ορισμένα συστήματα δίνει επαναληπτικές σχέσεις που αποκλίνουν.

Πίνακας 2.3.4 - 1: Παράδειγμα 2.3.4 - 1 επαναληπτική σχέση $(2.3.4-2)$: αποτελέσματα μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel

	Jacobi		Gauss-Seidel	
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	-4.000	-6.000	-4.000	-34.000
1	-34.000	-34.000	-174.000	-1224.000
2	-174.000	-244.000	-6124.000	-42.874
3	-1244.000	-1244.000	-214.374	-1500.624
4	-6124.000	-8574.000	-7503.124	-52521.874
5	-42.874	-42.874		
6	-214.374	-300.124		

Παράδειγμα 2.3.4 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 &- 5\,x_2 &= -4 \\ 7\,x_1 &- x_2 &= 6 \end{aligned} \quad \text{με ρίζες} \quad x_1^* = x_2^* = 1. \tag{2.3.4 - 1}$$

Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτουν οι παρακάτω μέθοδοι των Jacobi και των Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= 5\,x_2^{(i)} - 4 \\ x_2^{(i+1)} &= 7\,x_1^{(i)} - 6 \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= 5\,x_2^{(i)} - 4 \\ x_2^{(i+1)} &= 7\,x_1^{(i+1)} - 6, \end{aligned} \tag{2.3.4 - 2}$$

όταν $i = 0,\, 1,\, \ldots$.

Θέτοντας στην $(2.3.4-2)$ σαν αρχικές τιμές

$$x_1^{(0)} = 0 \quad \text{και} \quad x_2^{(0)} = 0$$

έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.3.4 - 1. Άμεσα προκύπτει τότε ότι και οι δύο μέθοδοι αποκλίνουν με ταχύτερα αποκλίνουσα τη μέθοδο των Gauss-Seidel. Ανάλογο αποκλίνον αποτέλεσμα θα προκύψει και με οποιαδήποτε άλλη αρχική τιμή.

Οι συνθήκες που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση των παραπάνω μεθόδων είναι αντικείμενο μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας.[19] Στη συνέχεια του μαθήματος δίνεται μια από αυτές τις συνθήκες με τη μορφή του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 2.3.4 - 1. *Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος, τότε το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει ακριβώς μια λύση στην οποία συγκλίνουν οι μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel για κάθε αρχική τιμή.*

Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 2.3.4 - 1. *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται* **αυστηρά διαγώνια ορισμένος** *(strictly diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \ \text{για κάθε} \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.4 - 1 στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \ \text{ισχύει}$$

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= |-4| > |a_{12}| + |a_{13}| = 2 + 1 = 3 \\ |a_{22}| &= 6 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 2 = 3 \\ |a_{33}| &= 5 > |a_{31}| + |a_{32}| = 1 + |-2| = 3, \end{aligned}$$

δηλαδή ο A είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Στο σύστημα $(2.3.4 - 1)$ ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

προφανώς δεν είναι αυστηρά διαγώνιος. Όταν όμως το σύστημα γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} 7\,x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1 - 5\,x_2 &= -4, \end{aligned} \qquad (2.3.4 - 3)$$

[19] Βλέπε βιβλιογραφία.

Πίνακας 2.3.4 - 2: Παράδειγμα 2.3.4 - 1 επαναληπτική σχέση (2.3.4 − 4): αποτελέσματα μεθόδων των Jacobi και Gauss-Seidel

	Jacobi		Gauss-Seidel	
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	0.857	0.800	0.857	0.971
1	0.971	0.971	0.996	0.999
2	0.996	0.994	1.000	1.000
3	0.999	0.999	1.000	1.000
4	1.000	1.000		
5	1.000	1.000		

τότε οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \frac{1}{7}x_2^{(i)} + \frac{6}{7} \\ x_2^{(i+1)} &= \frac{1}{5}x_1^{(i)} + \frac{4}{5} \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \frac{1}{7}x_2^{(i)} + \frac{6}{7} \\ x_2^{(i+1)} &= \frac{1}{5}x_1^{(i+1)} + \frac{4}{5}, \end{aligned} \qquad (2.3.4 - 4)$$

όταν $i = 0, 1, \ldots,$ συγκλίνουν θέτοντας όμοια σαν αρχικές τιμές

$$x_1^{(0)} = 0 \quad \text{και} \quad x_2^{(0)} = 0.$$

Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 2.3.4 - 2.

Σημείωση 2.3.4 - 1

Η συνθήκη ο πίνακας A στο Θεώρημα 2.3.4 - 1 να είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος είναι μόνον αναγκαία. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} -4x_1 &+ 5x_2 &= 1 \\ x_1 &+ 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

όπου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος. Όμως και οι δύο μέθοδοι με αρχική τιμή, έστω $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$, συγκλίνουν στη λύση $x_1^* = x_2^* = 1$ του συστήματος.

Σύγκριση των μεθόδων

Γενικότερα από την πειραματική εφαρμογή των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel έχουν προκύψει τα παρακάτω αποτελέσματα:

i) η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει, όταν και η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει,

ii) η μέθοδος των Gauss-Seidel είναι δυνατόν να συγκλίνει, όταν η μέθοδος του Jacobi αποκλίνει, και

iii) όταν οι μέθοδοι συγκλίνουν, τότε η μέθοδος των Gauss-Seidel συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο του Jacobi.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν με τη μέθοδο του Jacobi και των Gauss-Seidel τα παρακάτω συστήματα:

$$i)\quad \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 5, \end{array}$$

$$ii)\quad \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & 11, \end{array}$$

$$iii)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -6, \end{array}$$

$$iv)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & 11. \end{array}$$

Η διαδικασία να σταματήσει, όταν για το σφάλμα ισχύει

$$\left|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\right| < 10^{-3}. \qquad (2.3.4 - 5)$$

2. Όμοια τα παρακάτω συστήματα εφαρμόζοντας κατάλληλη εναλλαγή των εξισώσεων, έτσι ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.3.4 - 1:

$$i) \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 3, \end{array}$$

$$ii) \quad \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & = & 2, \end{array}$$

$$iii) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -7 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 10x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 13, \end{array}$$

$$iv) \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

3. Δείξτε ότι στα παρακάτω συστήματα

$$i) \quad \begin{array}{rcrcr} -4x_1 & + & 5x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3, \end{array}$$

$$ii) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 5, \end{array}$$

αν και δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.3.4 - 1, υπάρχει λύση με τις μεθόδους των Jacobi και Gauss-Seidel, την οποία και προσδιορίστε με την ακρίβεια που ορίζεται στη σχέση $(2.3.4 - 5)$.

4. Να γραφεί πρόγραμμα με το MATLAB αντίστοιχο των Προγραμμάτων 2.3.2 - 1 και 2.3.3 - 1.

Πίνακας 1: Άσκηση **1.** (i)

	Jacobi		Gauss-Seidel		
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	0.666 667	1.250 000	1	0.666 667	1.083 333
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
6	1.000 193	0.999 855	5	0.999 984	1.000 004

Πίνακας 2: Άσκηση **1.** (ii)

	Jacobi		Gauss-Seidel		
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	2.500 000	−2.200 000	1	2.500 000	−0.700 000
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
13	1.999 563	−0.999 781	7	2.000 365	−0.999 781

Απαντήσεις

1. (i) Θεωρητική λύση $x_1^* = x_2^* = 1$. Αποτελέσματα στον Πίνακα 1.

(ii) Θεωρητική λύση $x_1^* = 2, \quad x_2^* = -1$. Αποτελέσματα στον Πίνακα 2.

(iii) Θεωρητική λύση $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 2$. Αποτελέσματα στον Πίνακα 3.

Παρατήρηση 2.3.4 - 1

Στα αποτελέσματα της μεθόδου των Gauss-Seidel για την Άσκηση 1 (iii) η σχέση (2.3.4−5) επαληθεύτηκε για τους αγνώστους x_2 και x_3 στην 7η επανάληψη, ενώ για τον άγνωστο x_1 στην 8η.

(iv) Θεωρητική λύση $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = -1$. Αποτελέσματα στον Πίνακα 4.

2. (i) Εναλλαγή 1ης με 2η. (ii) Όμοια. (iii) Η 3η να γίνει 1η. (iv) Εναλλαγή 1ης με 2η.

3. (i) Θεωρητική λύση $x_1^* = x_2^* = 1$. Αποτελέσματα στον Πίνακα 5.

(ii) Θεωρητική λύση $x_1^* = 1$, $x_2^* = -2$, $x_3^* = 0$. Αποτελέσματα στον Πίνακα 6.

Πίνακας 3: *Άσκηση* **1.** (iii)

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
	Jacobi		
0	1.000 000	0.666 667	2.000 000
	⋮	⋮	⋮
13	1.999 725	2.000 330	1.999 669
	Gauss-Seidel		
0	1.000 000	1.000 000	2.000 000
	⋮	⋮	⋮
6	2.000 056	*1.999 877*	*1.999 940*
7	*1.999 939*		

Πίνακας 4: *Άσκηση* **1.** (iv)

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
	Jacobi		
0	0	1.285 714	−1.000 000
	⋮	⋮	⋮
7	−0.000 455	1.000 187	−0.999 129
	Gauss-Seidel		
0	0	1.285 714	−1.000 000
	⋮	⋮	⋮
5	−0.000 507	1.000 230	−0.999 619

Πίνακας 5: Άσκηση **3.** (i)

Jacobi			Gauss-Seidel		
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	−0.250 000	1.500 000	0	−0.250 000	1.625 000
	⋮	⋮		⋮	⋮
29	1.000 867	1.000 867	18	0.999 735	1.000 132

Πίνακας 6: Άσκηση **3.** (ii)

i	Jacobi $x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
0	0	−2.333 333	1.250 000
	⋮	⋮	⋮
34	0.999 744	−2.000 297	0.000 807
	Gauss-Seidel		
0	0	−2.333 333	0.666 667
	⋮	⋮	⋮
9	0.999 986	−1.999 931	0.000 028

2.3.5 Μέθοδος SOR

Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{όταν} \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \tag{2.3.5 - 1}$$

με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3.5 - 2}$$

και

$$\mathbf{x} = [x_1,\, x_2, \cdots, x_n]^\top, \quad \mathbf{b} = [b_1,\, b_2, \cdots, b_n]^\top .$$

Τότε ο πίνακας A είναι δυνατόν να γραφεί σαν άθροισμα ενός διαγώνιου, έστω D, ενός αυστηρά κάτω τριγωνικού L και ενός αυστηρά άνω τριγωνικού U πίνακα ως εξής:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$A = D + L + U. \tag{2.3.5 - 3}$$

Από την $(2.3.5 - 1)$ προκύπτει ότι

$$(D + L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Αν ω σταθερά με $\omega > 0$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$(\omega D + \omega L + \omega U)\, \mathbf{x} = \omega\, \mathbf{b},$$

οπότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον όρο $D\mathbf{x}$

$$D\mathbf{x} + \omega D\, \mathbf{x} + \omega\, L\, \mathbf{x} + \omega\, U\, \mathbf{x} = D\mathbf{x} + \omega\, \mathbf{b}$$

τελικά

$$(D + \omega L)\, \mathbf{x} = \omega\, \mathbf{b} - [\omega\, U + (\omega - 1)\, D\,]\, \mathbf{x}. \qquad (2.3.5 - 4)$$

Έστω ότι ο πίνακας $D + \omega L$ αντιστρέφεται. Τότε από την $(2.3.5 - 4)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (D + \omega L)^{-1}\, \{\omega\, \mathbf{b} - [\omega\, U + (\omega - 1)\, D\,]\, \mathbf{x}\} \\
&= \omega\, (D + \omega L)^{-1}\, \mathbf{b} - (D + \omega L)^{-1} [\omega\, U + (\omega - 1)\, D\,]\, \mathbf{x} \\
&\qquad \text{(μετά τις πράξεις)} \\
&= L_\omega\, \mathbf{x} + \mathbf{c} = g(\mathbf{x}), \qquad (2.3.5 - 5)
\end{aligned}$$

όταν g η επαναληπτική συνάρτηση.

Άρα

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = g(\mathbf{x}^{(i)}),$$

οπότε κατά τα γνωστά για την k-συντεταγμένη του $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$ έχουμε την επαναληπτική σχέση:

$$x_k^{(i+1)} = g_k\left(x_k^{(i)}\right)\,; \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \quad \text{και} \quad i = 0,\, 1, \ldots,$$

δηλαδή

$$x_k^{(i+1)} = L_\omega\, x_k^{(i)} + c_k\,; \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \quad \text{και} \quad i = 0,\, 1, \ldots\,. \qquad (2.3.5 - 6)$$

Η διαδικασία υπολογισμού στην $(2.3.5 - 6)$ επιταχύνεται, όταν στο 2ο μέλος οι όροι $x_k^{(i)}$ αντικατασταθούν, όπως αυτό ανάλογα έχει ήδη γίνει στην Παράγραφο 2.3.3 με τη μέθοδο των Gauss-Seidel, με τους ήδη υπολογισμένους όρους $x_1^{(i)}, \ldots, x_{k-1}^{(i)}$. Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή, η $(2.3.5-6)$ μετά τις πράξεις το 2ο μέλος τελικά γράφεται:

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= (1-\omega)\, x_1^{(i)} \\
&\quad + \frac{\omega}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}\, x_2^{(i)} - a_{13}\, x_3^{(i)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(i)} \right), \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_k^{(i+1)} &= (1-\omega)\, x_k^{(i)} + \frac{\omega}{a_{kk}} \left(b_k - a_{k1}\, x_1^{(i+1)} - \ldots - a_{k,k-1}\, x_{k-1}^{(i+1)} \right. \\
&\quad \left. - a_{k,k+1}\, x_{k+1}^{(i)} - \ldots - a_{kn}\, x_n^{(i)} \right) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_n^{(i+1)} &= (1-\omega)\, x_n^{(i)} \qquad\qquad (2.3.5 - 7) \\
&\quad + \frac{\omega}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}\, x_1^{(i+1)} - a_{n2}\, x_2^{(i+1)} - \ldots - a_{n,n-1}\, x_{n-1}^{(i+1)} \right).
\end{aligned}$$

Η επαναληπτική μέθοδος που περιγράφεται από την (2.3.5–7) είναι γνωστή σαν **μέθοδος χαλάρωσης** [20] (relaxation method), ενώ η σταθερά ω ως παράμετρος επιτάχυνσης ή **συντελεστής χαλάρωσης** (relaxation factor).

Τότε, αν

- $0 < \omega < 1$, λέγεται **μέθοδος υποχαλάρωσης** (under-relaxation method) και χρησιμοποιείται κυρίως σε περιπτώσεις όπου η μέθοδος δεν συγκλίνει,
- $\omega > 1$, υπερχαλάρωσης (over-relaxation method) ή **μέθοδος SOR** (Successive Over-Relaxation) και χρησιμοποιείται για να επιταχύνει τη σύγκλιση της μεθόδου, και
- $\omega = 1$, η μέθοδος, που όπως έχει ήδη γραφεί είναι μια γενίκευση της μεθόδου Gauss-Seidel, συμπίπτει με αυτή.

Η μέθοδος περιγράφεται από τον Αλγόριθμο 2.3.5 - 1.

[20] Βλέπε βιβλιογραφία και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Successive_over-relaxation

Αλγόριθμος 2.3.5 - 1 (μεθόδου SOR)

Δεδομένα: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right]^\top$,
ακρίβεια ε, παράμετρος ω και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Για $k = 1, 2, \ldots, N$
  Για $i = 1, 2, \ldots, n$
$$x_i = (1-\omega)\, x_i^0 + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^0 \right)$$
  τέλος i
  αν $\left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)} \right\| < \varepsilon$, τύπωσε $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$ STOP
  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$
τέλος k
Τύπωσε “ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ”

Σύγκλιση της μεθόδου

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη, με μορφή θεωρημάτων, οι κυριότερες συνθήκες που αφορούν τη σύγκλιση της μεθόδου SOR.

Θεώρημα 2.3.5 - 1 (Kahan). *Αν $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε*

$$\rho\left(B_\omega\right) \geq |\omega - 1|, \tag{2.3.5 - 8}$$

όπου $\rho\left(B_\omega\right)$ η φασματική ακτίνα του πίνακα B_ω.

Πόρισμα 2.3.5 - 1. *Η μέθοδος SOR συγκλίνει μόνον, όταν $0 < \omega < 2$.*

Θεώρημα 2.3.5 - 2 (Ostrowski-Reich). *Αν A είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας και $0 < \omega < 2$, τότε η μέθοδος SOR συγκλίνει στη λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ για κάθε αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)}$.*

Θεώρημα 2.3.5 - 3 (μεθόδου SOR). *Αν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος και τριδιαγώνιος, τότε $\rho\left(B_G\right) = \left[\rho\left(B_J\right)\right]^2 < 1$ και η καλύτερη επιλογή της παραμέτρου ω για τη σύγκλιση της μεθόδου SOR είναι η*

$$\omega = 2\left\{1 + \left[1 - \rho\left(B_J\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{-1} \quad \text{με} \quad \rho\left(B_\omega\right) = \omega - 1. \tag{2.3.5 - 9}$$

Παράδειγμα 2.3.5 - 1

Έστω το σύστημα $(2.3.2-3)$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & -1 \\ -3\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & x_3 & = & -5 \\ x_1 & - & x_2 & - & 7\,x_3 & = & 15 \end{array} \tag{2.3.5 - 10}$$

των Παραδειγμάτων 2.3.2 - 1 και 2.3.3 - 1 με ρίζες

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 0 \quad \text{και} \quad x_3^* = -2.$$

Σύμφωνα με την $(2.3.5-7)$ έχουμε την παρακάτω επαναληπτική μέθοδο SOR για το σύστημα $(2.3.5-10)$:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= (1-\omega)\,x_1^{(i)} + \frac{\omega}{5}\left[-1-(-2)\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] \\ x_2^{(i+1)} &= (1-\omega)\,x_2^{(i)} + \frac{\omega}{9}\left[-5-(-3)\,x_1^{(i+1)} - x_3^{(i)}\right] \\ x_3^{(i+1)} &= (1-\omega)\,x_3^{(i)} + \frac{\omega}{-7}\left[15 - x_1^{(i+1)} - (-1)\,x_2^{(i+1)}\right], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= (1-\omega)\,x_1^{(i)} + \frac{\omega}{5}\left[-1+2\,x_2^{(i)} - 3\,x_3^{(i)}\right] \\ x_2^{(i+1)} &= (1-\omega)\,x_2^{(i)} + \frac{\omega}{9}\left[-5+3\,x_1^{(i+1)} - x_3^{(i)}\right] \\ x_3^{(i+1)} &= (1-\omega)\,x_3^{(i)} - \frac{\omega}{7}\left[15 - x_1^{(i+1)} + x_2^{(i+1)}\right]. \end{aligned} \tag{2.3.5 - 11}$$

Θέτοντας στην $(2.3.5-11)$ σύμφωνα με

- τη Σημείωση 2.3.2 - 1 σαν αρχικές τιμές

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0,$$

- το Θεώρημα 2.3.5 - 2 (επειδή ο πίνακας A των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος $(2.3.5-10)$ είναι θετικά ορισμένος),

Πίνακας 2.3.5 - 1: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου SOR, όταν $\omega = 1.02$

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
0	-0.204 000	-0.636 027	-2.122 762
1	0.839 711	-0.027 865	-2.016 841
2	1.002 144	0.003 195	-1.999 816
3	1.001 148	0.000 306	-1.999 881
4	1.000 029	-9.796 035×10^{-6}	-1.999 997
5	0.999 993	-2.404 474×10^{-6}	-2.000 001
6	*1.000 000*	*-2.509 657*×10^{-8}	*-2.000 000*

διαδοχικά έχουμε τα αποτελέσματα του

- Πίνακα 2.3.5 - 1, όταν $\omega = 1.02$,
- Πίνακα 2.3.5 - 2, όταν $\omega = 0.9$, αντίστοιχα $\omega = 1.2$.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τις ρίζες $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = -2$ και τα αντίστοιχα της μεθόδου των Gauss-Seidel ($\omega = 1$), που δίνονται στον Πίνακα 2.3.3 - 1, προκύπτει ότι υπάρχει μια αύξηση της ακρίβειας στον υπολογισμό της ρίζας x_2, όταν $\omega = 1.02$, ενώ αυτό δεν συμβαίνει για τις άλλες δύο τιμές $\omega = 0.9$, αντίστοιχα $\omega = 1.2$. Σε κάθε περίπτωση όμως υπάρχει σύγκλιση των δημιουργουμένων επαναληπτικών ακολουθιών σύμφωνα και με το Θεώρημα 2.3.5 - 2.

Η λύση με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 2.3.3 - 1.

Πρόγραμμα 2.3.5 - 1 (μεθόδου SOR)

```
n = 7; x = 0; y = 0; z = 0; ω = 1.02;
f1[x_, y_, z_] := (1 - \[Omega]) x + \[Omega] (-1 + 2 y - 3 z)/5;
f2[x_, y_, z_] := (1 - \[Omega]) y + \[Omega] (-5 + 3 x - z)/9;
f3[x_, y_, z_] := (1 - \[Omega]) z - \[Omega] (15 - x + y)/7;
Do[x1 = f1[x, y, z]; y1 = f2[x1, y, z]; z1 = f3[x1, y1, z];
 Print[i, " , ", N[x1, 7], " , ", N[y1, 7], " , ", N[z1, 7]];
 x = x1; y = y1; z = z1;, {i, 1, n}]
```

Πίνακας 2.3.5 - 2: Παράδειγμα 2.3.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου SOR, όταν $\omega = 0.9$, αντίστοιχα $\omega = 1.2$

i	ω	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$
6	0.9	*0.999 803*	*-0.000 093*	*-2.000 025*
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11		*1.000 000*	*-2.753 479*$\times 10^{-8}$	*-2.000 000*
6	1.2	*0.999 553*	*0.000 173*	*-2.000 060*
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13		*1.000 000*	*-2.875 747*$\times 10^{-8}$	*-2.000 000*

Άσκηση

Να λυθεί η Άσκηση 1 της Παραγράφου 2.3.3 με τη μέθοδο SOR, όταν $\omega = 0.9,\ 1.05,\ 1.2$ και στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της μεθόδου των Gauss-Seidel.

2.4 Αριθμητική λύση μη γραμμικών συστημάτων

2.4.1 Ορισμοί

Ένα **μη γραμμικό σύστημα** (nonlinear system) n εξισώσεων με n αγνώστους

$$\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]^\top$$

έχει γενικά τη μορφή[21]

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,
\end{aligned}$$

[21] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 8.

όταν για κάθε συνάρτηση f_i είναι

$$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{για κάθε} \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Τότε το σύστημα $(2.4.1 - 1)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}, \tag{2.4.1 - 1}$$

όπου

$$\mathbf{F} = \left[f_1, f_2, \ldots, f_n\right]^{\top} \quad \text{και} \quad \mathbf{0}$$

διανύσματα τάξης n. Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις f_i; $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ λέγονται και **συνιστώσες** της $\mathbf{F}$.

Ανάλογα με τη μεθοδολογία του Μαθήματος *Αριθμητική λύση εξισώσεων*, αν $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}$ είναι ένα μη γραμμικό σύστημα της μορφής $(2.4.1 - 1)$, ζητείται να προσδιοριστεί μία τιμή του $\mathbf{x}$, έστω η $\mathbf{x}^*$, με

$$\mathbf{x}^* = \left[x_1^*,\, x_2^*,\, \ldots,\, x_n^*\right]^{\top}$$

που λέγεται και **ρίζα** του συστήματος, έτσι ώστε

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*\right) = \mathbf{0},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} f_1\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) &= 0 \\ f_2\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ f_n\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) &= 0. \end{aligned}$$

Όμοια, όπως και στην αριθμητική λύση των εξισώσεων και στην περίπτωση αυτή, οι μέθοδοι προσδιορισμού της ρίζας $\mathbf{x}^*$ είναι **επαναληπτικές**, δηλαδή δημιουργείται μια κατάλληλη για κάθε άγνωστο

$$x_k\,;\ k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \quad \textbf{επαναληπτική ακολουθία}$$

της μορφής:[22]

$$x_k^{(i+1)} = g_k\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,$$

[22]Βλέπε επεξήγηση συμβολισμού στην Υποσημείωση 15 της Παραγράφου 2.3.

όπου η κάθε μια ακολουθία πρέπει να συγκλίνει στην αντίστοιχη ρίζα x_k^*; $k = 1, 2, \ldots, n$ του συστήματος $(2.4.1 - 1)$.

Παρατηρήσεις 2.4.1 - 1

Γενικά, για τη λύση των συστημάτων της μορφής $(2.4.1 - 1)$ ισχύουν τα εξής:

- Η λύση των μη γραμμικών συστημάτων είναι πολυπλοκότερη και κατά συνέπεια δυσκολότερη εκείνης των εξισώσεων.
- Ο προσδιορισμός της κατάλληλης αρχικής τιμής είναι δυσχερέστερος και τις περισσότερες φορές σε μεγάλα σύνθετα προβλήματα και *αυθαίρετος*.
- Δεν υπάρχει πάντοτε απλός τρόπος που να εξασφαλίζει τη σύγκλιση των εκάστοτε εφαρμοζόμενων μεθόδων, και
- υπάρχει μεγάλη αύξηση των απαιτούμενων υπολογισμών, όταν ο αριθμός των εξισώσεων αυξάνεται.

Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες μέθοδοι στις εφαρμογές δίνονται στη συνέχεια.

2.4.2 Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων

Έστω ότι το σύστημα $(2.4.1 - 1)$: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, δηλαδή το:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \qquad &\quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \qquad (2.4.2 - 1)$$

γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ x_n &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \qquad (2.4.2 - 2)$$

δηλαδή

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\left(\mathbf{x}\right), \tag{2.4.2 - 3}$$

όπου $\mathbf{G}\left(\mathbf{x}\right)$ συνεχής συνάρτηση, που ορίζει και την **επαναληπτική συνάρτηση** στην περίπτωση αυτή.

Αν

$$\mathbf{x}^{*} = \left[x_1^{*},\, x_2^{*},\, \ldots,\, x_n^{*}\right]^{\top}$$

είναι μία ρίζα του συστήματος $(2.4.2-1)$, τότε η $\mathbf{x}^{*}$ θα είναι ένα **σταθερό σημείο** της $(2.4.2-2)$, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} x_1^{*} &= g_1\left(x_1^{*}, x_2^{*}, \ldots, x_n^{*}\right) \\ x_2 &= g_2\left(x_1^{*}, x_2^{*}, \ldots, x_n^{*}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n\left(x_1^{*}, x_2^{*}, \ldots, x_n^{*}\right), \end{aligned}$$

Από την $(2.4.2-2)$ προκύπτει τότε η επαναληπτική σχέση

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= g_1\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right) \\ x_2^{(i+1)} &= g_2\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right) \\ &\vdots \\ x_n^{(i+1)} &= g_n\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right), \end{aligned} \tag{2.4.2 - 4}$$

όταν $i = 0,\, 1,\, \ldots$. με **αρχική τιμή**

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\, \ldots,\, x_n^{(0)}\right]^{\top}.$$

Η μέθοδος αυτή προσδιορισμού της ρίζας ενός συστήματος είναι γνωστή ως η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων** για μη γραμμικά συστήματα.

Παράδειγμα 2.4.2 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} f_1\left(x_1, x_2\right) &= e^{x_1} + x_2 - 1 &= 0 \\ f_2\left(x_1, x_2\right) &= x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.2 - 5}$$

που είναι της μορφής $(2.4.2-1)$. Αν στην $(2.4.2-5)$ η 1 εξίσωση λυθεί ως προς τον άγνωστο x_1 και η 2η ως προς τον x_2, τότε

$$\begin{aligned} x_1 &= \ln(1-x_2) &= g_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= -\sqrt{4-x_1^2} &= g_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.4.2 - 6}$$

δηλαδή έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής $(2.4.2-2)$. Τότε από την $(2.4.2-3)$ σύμφωνα και με την $(2.4.2-4)$ προκύπτει η επαναληπτική σχέση:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \ln\left(1-x_2^{(i)}\right) \\ x_2^{(i+1)} &= -\sqrt{4-x_1^{(i)}}, \end{aligned} \tag{2.4.2 - 7}$$

όπου $i = 0,\ 1,\ \ldots$.

Αν η αρχική τιμή είναι:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)},\, x_2^{(0)}\right]^\top = [1,\ -1.7]^\top,$$

τότε από την $(2.4.2-7)$, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.4.2 - 1.

2.4.3 Μέθοδος των Gauss-Seidel

Όμοια, όπως και στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων της Παραγράφου 2.3.3, μια αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης της $(2.4.2-4)$ γίνεται, όταν στον υπολογισμό του όρου $x_j^{(i+1)}$ χρησιμοποιηθούν οι όροι

$$x_1^{(i+1)}, \quad x_2^{(i+1)}, \ldots\ldots, \quad x_{j-1}^{(i+1)}$$

αντί των

$$x_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad x_{j-1}^{(i)}.$$

Η μέθοδος αυτή είναι ήδη γνωστή ως η **μέθοδος των Gauss-Seidel**.

Στην περίπτωση της επαναληπτικής σχέσης $(2.4.2-7)$ του Παραδείγματος 2.4.2 - 1 γράφεται:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= \ln\left(1-x_2^{(i)}\right) \\ x_2^{(i+1)} &= -\sqrt{4-x_1^{(i+1)}}, \end{aligned} \tag{2.4.3 - 1}$$

Πίνακας 2.4.2 - 1: Παράδειγμα 2.4.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	0.993 252	-1.732 051
1	1.005 053	-1.735 929
2	1.006 471	-1.729 124
3	1.003 981	-1.728 299
4	1.003 678	-1.729 746
5	1.004 209	-1.729 922
6	1.004 273	-1.729 614
7	1.004 160	-1.729 577
8	1.004 147	-1.729 642
9	*1.004 171*	*-1.729 650*

Πίνακας 2.4.3 - 1: Παράδειγμα 2.4.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου των Gauss-Seidel

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$
0	0.993 252	-1.735 929
1	1.006 471	-1.728 299
2	1.003 678	-1.729 922
3	1.004 273	-1.729 577
4	1.004 147	-1.72 965
5	*1.004 173*	*-1.729 635*

όπου $i = 0, 1, \ldots$.

Θεωρώντας όμοια σαν αρχική τιμή την

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)},\, x_2^{(0)}\right]^\top = [1,\, -1.7]^\top ,$$

από την (2.4.3 − 1), προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.4.3 - 1, σύμφωνα με τον οποίο η υπολογιζόμενες ρίζες παρουσιάζουν ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων στην 6η επανάληψη αντί της αντίστοιχης ακρίβειας στην 10η επανάληψη της προηγούμενης μεθόδου.

2.4.4 Μέθοδος του Newton

[23]Είναι ήδη γνωστό ότι με τη μέθοδο του Newton, η ρίζα, έστω x^*, της εξίσωσης $f(x) = 0$ υπολογίζεται από την επαναληπτική σχέση:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \quad i = 0, 1, \ldots . \qquad (2.4.4 - 1)$$

[23]Βλέπε Μάθημα *Αριθμητική Λύση Εξισώσεων - Μέθοδος του Newton*.

Στην περίπτωση του μη γραμμικού συστήματος $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, δηλαδή του:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2.4.4 - 2}$$

όπου

$$\mathbf{x} = [x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n]^\top,$$

αποδεικνύεται[24] ότι η αντίστοιχή της $(2.4.4-1)$ επαναληπτική σχέση της **μεθόδου του Newton** είναι:

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - J^{-1}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\ \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right);\quad i = 0,\, 1,\, \ldots, \tag{2.4.4 - 3}$$

όταν με J^{-1} συμβολίζεται ο αντίστροφος πίνακας του:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2.4.4 - 4}$$

Ο $(2.4.4-4)$ λέγεται και **πίνακας Jacobi** του συστήματος $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Επειδή ο κλασικός υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα J^{-1}, κυρίως όταν η τάξη του είναι μεγάλη, απαιτεί πολλούς υπολογισμούς που δημιουργούν πολλά λάθη στρογγυλοποίησης και κατά συνέπεια μη ακριβές αποτέλεσμα, ο υπολογισμός γίνεται θέτοντας στην $(2.4.4-3)$

$$-J^{-1}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\ \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right) = \mathbf{s}^{(i)}, \tag{2.4.4 - 5}$$

όπου το διάνυσμα

$$\mathbf{s}^{(i)} = \left[s_1^{(i)},\, s_2^{(i)},\, \ldots,\, s_n^{(i)}\right]^\top$$

[24] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 8.

Αλγόριθμος 2.4.4 - 1 (Newton για μη γραμμικά συστήματα)

Δεδομένα: σύστημα $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, αρχική τιμή $\mathbf{x}^{(0)}$,
ακρίβεια ε και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Για $k = 1, 2, \ldots, N$

υπολόγισε $J(\mathbf{x})$ με $J(\mathbf{x})_{i,j} = \partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$

λύσε σύστημα $J(\mathbf{x})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$

$\mathbf{x} := \mathbf{x} + \mathbf{y}$

αν $\|\mathbf{y}\| < \varepsilon$, τύπωσε $\mathbf{x}$ STOP

τέλος k

Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

προσδιορίζεται από την (2.4.4−5) πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της από αριστερά με το J, όπου τότε ως γνωστόν ισχύει $JJ^{-1} = \mathrm{I}$ με I τον μοναδιαίο πίνακα, δηλαδή τελικά από το **γραμμικό σύστημα**:

$$J\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\mathbf{s}^{(i)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right). \tag{2.4.4 - 6}$$

Επομένως σύμφωνα με τις (2.4.4−3) και (2.4.4−6) η επαναληπτική σχέση της μεθόδου του Newton για συστήματα γράφεται:

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\mathbf{s}^{(i)} &= -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right), \\ \mathbf{x}^{(i+1)} &= \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{s}^{(i)}; \quad i = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{2.4.4 - 7}$$

Η μέθοδος περιγράφεται από τον Αλγόριθμο 2.4.4 - 1.

Σημείωση 2.4.4 - 1

Επειδή για τη σύγκλιση της μεθόδου η αρχική τιμή να είναι πλησίον της ρίζας $\mathbf{x}^*$, για τον λόγο αυτό πολλές φορές η μέθοδος του Newton χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τις μεθόδους των διαδοχικών προσεγγίσεων ή των Gauss-Seidel για να προκύψει από αυτές μία ακριβής αρχική τιμή.

Παράδειγμα 2.4.4 - 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= e^{x_1} + x_2 - 1 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.4.4 - 8)$$

του Παραδείγματος 2.4.2 - 1.

Τότε σύμφωνα με την $(2.4.4 - 4)$ ο πίνακας Jacobi του συστήματος είναι:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad (2.4.4 - 9)$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_1(e^{x_1} + x_2 - 1)}{\partial x_1} = e^{x_1} \\ \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_1(e^{x_1} + x_2 - 1)}{\partial x_2} = 1 \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right)}{\partial x_1} = 2\,x_1 \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right)}{\partial x_2} = 2\,x_2. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την $(2.4.4 - 9)$ ο πίνακας Jacobi του συστήματος είναι:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 1 \\ 2\,x_1 & 2\,x_2 \end{bmatrix}. \qquad (2.4.4 - 10)$$

Αν η αρχική τιμή είναι ίδια με εκείνη των του Παραδείγματος 2.4.2 - 1, δηλαδή

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)},\, x_2^{(0)}\right]^{\top} = [1,\, -1.7]^{\top}, \qquad (2.4.4 - 11)$$

τότε από τη διαδοχική εφαρμογή της επαναληπτικής σχέσης $(2.4.4-7)$:

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\mathbf{s}^{(i)} &= -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(i)}\right), \\ \mathbf{x}^{(i+1)} &= \mathbf{x}^{(i)}+\mathbf{s}^{(i)}\,; \quad i=0,\,1,\,\ldots \end{aligned}$$

με $\mathbf{s}^{(i)}=\left[s_1^{(i)},\,s_2^{(i)}\right]^\top$ προκύπτει ότι:

Για $\mathbf{i=0}$

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\mathbf{s}^{(0)} &= -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right), \\ \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{s}^{(0)}, \end{aligned} \tag{2.4.4 - 12}$$

όπου σύμφωνα με την $(2.4.4-10)$ και την αρχική τιμή $(2.4.4-11)$ είναι

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) &= J\left(x_1^{(0)},\,x_2^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} e^{x_1} & 1 \\ 2\,x_1 & 2\,x_2 \end{bmatrix}_{x_1^{(0)}=1,\,x_2^{(0)}=-1.7} \\ &= \begin{bmatrix} 2.7183 & 1 \\ 2 & -3.4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) &= \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(0)},\,x_2^{(0)}\right) \\ f_2\left(x_1^{(0)},\,x_2^{(0)}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{x_1}+x_2-1 \\ x_1^2+x_2^2-4 \end{bmatrix}_{x_1^{(0)}=1,\,x_2^{(0)}=-1.7} = \begin{bmatrix} 0.0183 \\ -0.1100 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τότε το σύστημα $J\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\mathbf{s}^{(0)}=-\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2.7183 & 1 \\ 2 & -3.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1^{(0)} \\ s_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.0183 \\ -0.1100 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} 2.7183\, s_1^{(0)} &+ \quad s_2^{(0)} &= -0.0183 \\ 2\, s_1^{(0)} &- 3.4\, s_2^{(0)} &= 0.1100, \end{aligned}$$

οπότε

$$s_1^{(0)} = 0.0043, \quad \text{και} \quad s_2^{(0)} = -0.0298.$$

Επομένως, σύμφωνα με την $(2.4.4-12)$, αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)}$ έχουμε ότι οι προσεγγίσεις των ριζών του συστήματος $(2.4.4-8)$ στο τέλος της 1ης επανάληψης είναι:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} + s_1^{(0)} = 1 + 0.0043 = 1.0043, \quad \text{και} \\ x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} + s_2^{(0)} = -1.7 - 0.0298 = -1.7298. \end{aligned}$$

Για $\mathbf{i = 1}$

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) \mathbf{s}^{(1)} &= -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right), \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)}, \end{aligned} \tag{2.4.4 - 13}$$

όπου όμοια σύμφωνα με την $(2.4.4-10)$ και την αρχική τιμή $(2.4.4-11)$ είναι

$$\begin{aligned} J\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) &= J\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 1 \\ 2\,x_1 & 2\,x_2 \end{bmatrix}_{x_1^{(1)}=1.0043,\, x_2^{(0)}=-1.7298} \\ &= \begin{bmatrix} 2.7300 & 1 \\ 2.0086 & -3.4596 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ενώ

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) \\ f_2\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{x_1} + x_2 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{bmatrix}_{x_1^{(1)}=1.0043,\, x_2^{(0)}=-1.7298} = \begin{bmatrix} --0.000\,196 \\ 0.000\,827 \end{bmatrix}.$$

Τότε το σύστημα $J\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)\mathbf{s}^{(1)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$ γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2.7300 & 1 \\ 2.0086 & -3.4596 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000\,196 \\ -0.000\,827 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} 2.7300\, s_1^{(1)} &+ \quad s_2^{(1)} &= -0.000\,196 \\ 2.0086\, s_1^{(1)} &- 3.4596\, s_2^{(1)} &= -0.000\,827, \end{aligned}$$

οπότε

$$s_1^{(1)} = -0.000\,131, \quad \text{και} \quad s_1^{(1)} = 0.000\,163.$$

Επομένως, όμοια σύμφωνα με την (2.4.4−12), αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)}$ έχουμε ότι οι προσεγγίσεις των ριζών του συστήματος (2.4.4 − 8) στο τέλος της 1ης επανάληψης είναι:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} + s_1^{(1)} = 1.0043 - 0.000\,131 = \mathit{1.004\,169}, \quad \text{και} \\ x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} + s_2^{(1)} = -1.7298 + 0.000\,163 = \mathit{-1.729\,637}. \end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές παρουσιάζουν ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων στη 2η επανάληψη και συγκρινόμενες με τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.4.3 - 1 της μεθόδου των Gauss-Seidel, σύμφωνα με τον οποίο οι υπολογιζόμενες ρίζες παρουσίαζαν ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων στην 6η επανάληψη και τα αποτελέσματα του Πίνακα 2.4.2 - 1 των διαδοχικών προσεγγίσεων με αντίστοιχη ακρίβεια στην 10η επανάληψη, αποδεικνύουν ότι η μέθοδος του Newton συγκλίνει ταχύτερα στις ρίζες του συστήματος.

Ασκήσεις

1. Το σύστημα

$$\begin{aligned} 5x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ x_2 - 0.25\,(\sin x_1 + \cos x_2) &= 0 \end{aligned}$$

έχει μία προσεγγιστική λύση την $[0.25, 0.25]^\top$. Να υπολογιστεί με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και τη μέθοδο των Gauss-Seidel η λύση του με ακρίβεια 10^{-5}.

2. Να υπολογιστεί με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και τη μέθοδο των Gauss-Seidel και ακρίβεια τάξης 10^{-5} η λύση των παρακάτω συστημάτων:

$$i)\quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 &= 0, \end{aligned} \qquad iv)\quad \begin{aligned} 3x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 &= 1, \end{aligned}$$

$$ii)\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1x_2x_3 &= 1, \end{aligned} \qquad v)\quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2 &= 37 \\ x_1 - x_2^2 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

$$iii)\quad \begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2x_3) &= 0.5 \\ x_1^2 - 625x_2^2 &= 0 \\ 3e^{-x_1x_2} + 60x_3 &= 3 - 10\pi, \end{aligned} \qquad vi)\quad \begin{aligned} x_1^2 + 2x_2 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 &= 0 \\ x_1^2 - 7x_2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

3. Να λυθούν με τη μέθοδο του Newton τα συστήματα των ασκήσεων 1 και 2 και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Acton, F. S. (1990). *Numerical Methods That Work*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer. (2nd printing).

[5] Bronshtein, I. N. & Semendyayev, K. A. (1997). *Handbook of Mathematics*. New York: Springer-Verlag (3rd ed.).

[6] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1996). Matrix Computations. Baltimore: Johns Hopkins (3rd ed.). ISBN 978–0–8018–5414–9.

[8] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.

[9] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*. Clarendon Press. Oxford. ISBN 978–0–19–850279–1.

[10] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

[11] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis.* Springer (3rd ed.). ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Varga, R. (1962). *Matrix Iterative Analysis.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[13] Young, D. (1971). *Iterative Solutions of Large Linear Systems.* New York: Academic Press.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/