Μάθημα 4

SPLINES

4.1 Συνάρτηση spline

4.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

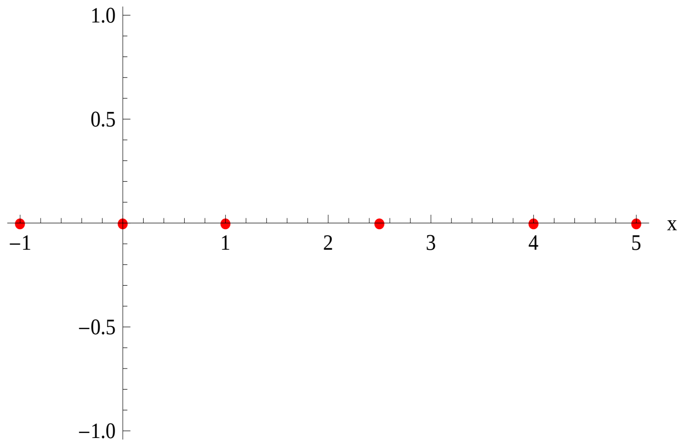
Στο Μάθημα *Πολυωνυμική παρεμβολή* εξετάστηκε το πρόβλημα της εύρεσης των πολυωνύμων παρεμβολής, δηλαδή πολυωνύμων που συνέπιπταν ή διαφορετικά διέρχονταν από ένα σύνολο σημείων της μορφής $(x_i, f\,(x_i))\,;\, i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, όπου $f(x)$ μια συνάρτηση με άγνωστο στις περισσότερες περιπτώσεις τύπο. Στο μάθημα αυτό θα δοθεί απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα με τμηματικά πολυώνυμα (piecewise polynomials ή splines), δηλαδή πολυώνυμα που είναι διαφορετικού γενικά βαθμού και ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $[x_i, x_{i+1}]$, όπου $x_i < x_{i+1}$ για κάθε $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$.

[1]Τα πολυώνυμα αυτά ορίζονται στη συνέχεια:

Ορισμός 4.1.1 - 1 (spline). *Έστω $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$ ένα σύνολο σημείων που είναι διατεταγμένα ως εξής (Σχ. 4.1.1 - 1):*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n. \tag{4.1.1 - 1}$$

[1]Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics)* Επίσης *mathworld.wolfram.com/Spline.html*



Σχήμα 4.1.1 - 1: Σημεία: $x_0 = -1.0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$

Τότε μια συνάρτηση spline ή απλά στο εξής spline, έστω s, βαθμού m με κόμβους (knots ή breakpoints) στα σημεία $(4.1.1 - 1)$, *είναι η συνάρτηση που πληροί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:*

i) σε καθένα από τα διαστήματα

$$(-\infty, x_0)\,, \quad [x_0, x_1)\,, \ldots, [x_{n-1}, x_n)\,, \quad [x_n, +\infty) \qquad (4.1.1 - 2)$$

η spline s είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του m,

ii) η spline s και οι παράγωγοί της τάξης $1, 2, \ldots, m-1$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι η spline είναι:

i) ένα **τμηματικό** πολυώνυμο (piecewise polynomial), δηλαδή ένα πολυώνυμο αποτελούμενο από ένα σύνολο επιμέρους πολυωνύμων, που πληρούν τις παραπάνω δύο ιδιότητες.

ii) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα (4.1.1−2) είναι γενικά ένα διαφορετικού βαθμού πολυώνυμο.

iii) Ο μέγιστος όλων των βαθμών των επιμέρους πολυωνύμων που ορίζουν μια spline, ορίζει και τον βαθμό της.

Ειδικά, όταν $m = 3$, η spline θα λέγεται **κυβική** (cubic spline).

iv) Η **καμπυλότητα** (curvature) μιας καμπύλης C με εξίσωση $y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^{\,2})^{3/2}} \,. \tag{4.1.1 - 3}$$

Επειδή οι καμπύλες των επιμέρους πολυωνύμων θα πρέπει να διέρχονται από τα σημεία $(x_i, s\,(x_i))$; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ κατά τρόπο τέτοιο που να ελαχιστοποιείται η κάμψη των, σύμφωνα και με την (4.1.1−3) θα πρέπει στους κόμβους x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$ η spline s να επαληθεύει, εκτός της συνθήκης

$$s\,(x_i - 0) = s\,(x_i + 0) \quad \text{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$$

που εξασφαλίζει τη διέλευση από το σημείο $(x_i, s\,(x_i))$, **τουλάχιστον** επίσης και τις παρακάτω δύο συνθήκες:[2]

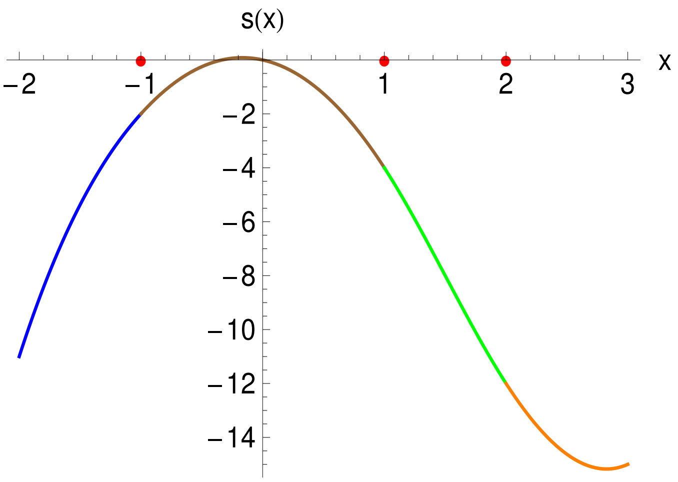
$$s^{(1)}\,(x_i - 0) = s^{(1)}\,(x_i + 0) \quad \text{και} \quad s^{(2)}\,(x_i - 0) = s^{(2)}\,(x_i + 0).$$

Αυτό όμως για να συμβαίνει θα πρέπει ο βαθμός της s να είναι τουλάχιστον 3, δηλαδή η s να είναι τουλάχιστον **κυβική**.

v) Λόγω της ιδιότητας (iv) χρησιμοποιείται σε πλείστες όσες εφαρμογές όπως ενδεικτικά στις δισδιάστατες εικόνες, τις γραμματοσειρές, την τρισδιάστατη μοντελοποίηση κ.λπ.

vi) Η συνέχεια στο $\Re$ προϋποθέτει και τη μέγιστη δυνατή συνέχεια στα επιμέρους πολυώνυμα.

[2] Υπενθυμίζεται ότι αν $s''(x) > 0$, τότε το διάγραμμα της $s(x)$ στρέφει τα **κοίλα άνω** ή είναι **κυρτό** και όταν $s''(x) < 0$ είναι **κοίλο**.



Σχήμα 4.1.1 - 2: Παράδειγμα 4.1.1 - 1 με κόμβους στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

vii) Αν όλα τα διαστήματα $(4.1.1 - 2)$ έχουν το ίδιο μήκος, τότε έχουμε μια **ομοιόμορφη** (uniform) spline, διαφορετικά μια μη ομοιόμορφη (non uniform) spline.

Παράδειγμα 4.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση (Σχ. 4.1.1 - 2):

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \quad \text{βαθμός} \quad 3 \\ -3x^2 - x & \quad\quad x \in [-1, 1) \quad\quad\quad\quad 2 \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \quad\quad x \in [1, 2) \quad\quad\quad\quad 3 \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & \quad\quad x \in [2, +\infty) \quad\quad\quad 3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ορίζει μια κυβική spline.
Λύση. Παρατηρούμε ότι:

i) Οι κόμβοι είναι στα σημεία: $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

ii) Σε καθένα από τα διαστήματα ορισμού της η $s(x)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ 3ου βαθμού. Άρα ο βαθμός της $s(x)$ είναι $m = 3$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 (ii) για να ορίζει η $s(x)$ μια spline πρέπει η $s(x)$ και οι παράγωγοι τάξης 1, $m-1=2$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Έχουμε ότι:

$$\begin{array}{lll} x \in (-\infty, -1) & s(x) = x^3 + 2x + 1, & s^{(1)}(x) = 3x^2 + 2, \\ & & s^{(2)}(x) = 6x. \\ x \in [-1, 1) & s(x) = -3x^2 - x, & s^{(1)}(x) = -6x - 1, \\ & & s^{(2)}(x) = -6. \end{array}$$

Άρα

$$\begin{aligned} & s(-1-0) = -2 = s(-1+0), \\ & s^{(1)}(-1-0) = 5 = s^{(1)}(-1+0), \quad \text{και} \\ & s^{(2)}(-1-0) = -6 = s^{(2)}(-1+0), \end{aligned}$$

οπότε ισχύει ο Ορισμός 4.1.1 - 1 (ii) για το σημείο $x_0 = -1$. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο Ορισμός 4.1.1 - 1 ισχύει και για τα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Επομένως η s είναι μια κυβική spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 iii).

ii) Η s είναι μια μη ομοιόμορφη spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 v).

■

Παρατήρηση 4.1.1 - 1

Σε πολλές εφαρμογές το πεδίο ορισμού μιας spline περιορίζεται στο διάστημα $[x_0, x_n]$. Στις περιπτώσεις αυτές ο Ορισμός 4.1.1 - 1 τροποποιείται κατάλληλα, έτσι ώστε να περιλαμβάνει τα άκρα σημεία x_0 και x_n. Συγκεκριμένα ο Ορισμός 4.1.1 - 1 στην περίπτωση αυτή γράφεται:

Ορισμός 4.1.1 - 2. *Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ένα σύνολο σημείων ενός διαστήματος $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, που είναι διατεταγμένα ως εξής:*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \qquad (4.1.1 - 4)$$

Τότε μια spline, έστω s, στο $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ βαθμού m με εξωτερικούς κόμβους στα σημεία $a = x_0$, $b = x_n$ και εσωτερικούς στα $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, είναι η συνάρτηση που πληροί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

i) *σε καθένα από τα διαστήματα*

$$[x_0, x_1), \quad [x_1, x_2), \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n] \qquad (4.1.1 - 5)$$

η συνάρτηση s είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του m,

ii) *η συνάρτηση s και οι παράγωγοι της τάξης $1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στους* **εσωτερικούς** *κόμβους.*

Εφόσον η $s(x)$ είναι μια spline, τότε λόγω και της ιδιότητας (*ii*) του Ορισμού 4.1.1 - 2, η $(4.1.1-5)$ πολλές φορές για ευκολία γράφεται και

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]. \qquad (4.1.1 - 6)$$

Μια εφαρμογή του Ορισμού 4.1.1 - 2 και της $(4.1.1-6)$ δίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Παράδειγμα 4.1.1 - 2

Έστω η συνάρτηση (Σχ. 4.1.1 - 3):

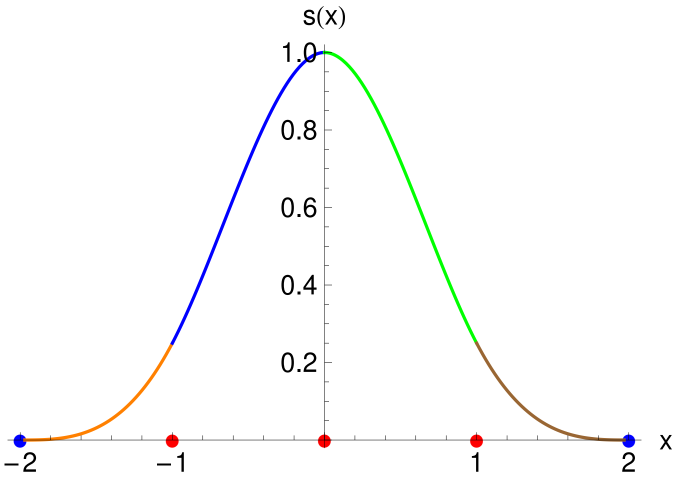
$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν} \quad x \in [-2,-1] \quad \text{βαθμός} \quad 3 \\ \frac{1}{4}\left(3|x|^3 - 6x^2 + 4\right) & \qquad x \in [-1,1] \qquad\qquad 3 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \qquad x \in [1,2] \qquad\qquad 3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η $s(x)$ ορίζει όμοια μια κυβική spline.[3]

Λύση. Η $s(x)$ λόγω του $|x|^3$ γράφεται ως εξής:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν} \quad x \in [-2,-1] \quad \text{βαθμός} \quad 3 \\ \frac{1}{4}\left(-3x^3 - 6x^2 + 4\right) & \qquad x \in [-1,0] \qquad\qquad 3 \\ \frac{1}{4}\left(3x^3 - 6x^2 + 4\right) & \qquad x \in [0,1] \qquad\qquad 3 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \qquad x \in [1,2] \qquad\qquad 3. \end{cases}$$

[3]Η καμπύλη της $s(x)$ περιγράφει στις Πιθανότητες και τη Στατιστική την κατανομή (distribution) Irwin-Hall.



Σχήμα 4.1.1 - 3: Παράδειγμα 4.1.1 - 3

i) Οι εξωτερικοί κόμβοι είναι στα σημεία: $x_0 = -2$ και $x_4 = 2$, ενώ οι εσωτερικοί στα $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$.

ii) Σε καθένα από τα διαστήματα ορισμού της η συνάρτηση $s(x)$ είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού. Άρα ο βαθμός της $s(x)$ είναι $m = 3$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 2 (ii) για να ορίζει η $s(x)$ μια spline, πρέπει η $s(x)$ και οι παράγωγοι τάξης 1, $m-1=2$ να είναι συνεχείς στους εσωτερικούς κόμβους. Έχουμε ότι:

$$x \in [-2,-1] \quad s(x) = \frac{1}{4}(x+2)^3,$$
$$s^{(1)}(x) = \frac{3}{4}(x+2)^2,$$
$$s^{(2)}(x) = \frac{6}{4}(x+2).$$

$$x \in [-1,0] \quad s(x) = \frac{1}{4}\left(-3x^3 - 6x^2 + 4\right),$$
$$s^{(1)}(x) = \frac{1}{4}\left(-9x^2 - 12x\right),$$
$$s^{(2)}(x) = \frac{1}{4}\left(-18x - 12\right).$$

Άρα

$$s(-1-0)=\frac{1}{4}=s(-1+0),$$

$$s^{(1)}(-1-0)=\frac{3}{4}=s^{(1)}(-1+0), \quad \text{και}$$

$$s^{(2)}(-1-0)=\frac{3}{2}=s^{(2)}(-1+0),$$

οπότε ισχύει ο Ορισμός 4.1.1 - 1 (ii) για το σημείο $x_1=-1$. Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύει και για τα σημεία $x_2=0$ και $x_3=1$, οπότε η s είναι μια κυβική spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 iii).

ii) Η s είναι μια ομοιόμορφη spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 v).

■

Συνάρτησης αποκομμένης δύναμης

Εισάγεται στη συνέχεια η έννοια της συνάρτησης αποκομμένης δύναμης (truncated power function) ως εξής:[4]

Ορισμός 4.1.1 - 3 *Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης της μορφής x^m συμβολίζεται με x_+^m και ορίζεται από τη σχέση (Σχ. 4.1.1 - 4a):*

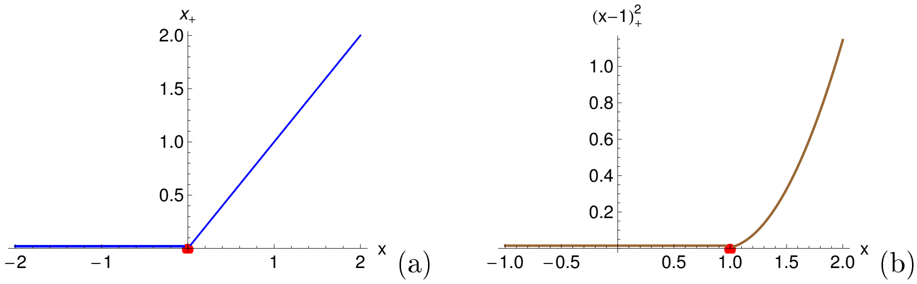
$$x_+^m=\begin{cases} x^m & \alpha\nu \quad x\geq 0\\ 0 & \alpha\nu \quad x<0.\end{cases} \tag{4.1.1 - 7}$$

Ορισμός 4.1.1 - 4 *Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης της μορφής $(x-x_i)^m$ συμβολίζεται με $(x-x_i)_+^m$ και ορίζεται ως εξής (Σχ. 4.1.1 - 4b):*

$$(x-x_i)_+^m=\begin{cases} (x-x_i)^m & \alpha\nu \quad x\geq x_i\\ 0 & \alpha\nu \quad x<x_i.\end{cases} \tag{4.1.1 - 8}$$

Η εντολή ορισμού της συνάρτησης $(4.1.1-7)$, αντίστοιχα της $(4.1.1-8)$ με το MATHEMATICA είναι:

[4]Βλέπε βιβλιογραφία και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_power_function



Σχήμα 4.1.1 - 4: (a) Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης της μορφής x_+ βαθμού $m = 1$ και (b) η $(x-1)_+^2$ βαθμού $m = 2$

```
f[x_]:=If[x<0,0,x^m]
g[x_]:=If[x<x_i,0,(x-x_i)^m]
```

Παρατήρηση 4.1.1 - 2

Η $s(x) = (x - x_i)_+^m$ είναι μια spline βαθμού m με κόμβο στο σημείο $x = x_i$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} s^{(m)}(x) &= \frac{d^m\,(x-x_i)_+^m}{d\,x^m} = m\,!\,(x-x_i)_+^0 \\ &= \begin{cases} m\,! & \text{αν} \quad x \geq x_i \\ 0 & \text{αν} \quad x < x_i. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.1 - 9}$$

Άρα η $s^{(m)}(x)$ είναι ασυνεχής στο x_i με πλάτος ασυνέχειας (jump discontinuity) $d = m\,!$

Η παραπάνω ορισθείσα συνάρτηση αποκομμένης δύναμης χρησιμοποιείται στην ευκολότερη παράσταση μιας spline. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.1 - 1 *Κάθε spline βαθμού m με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1\,x + \ldots + a_m\,x^m + c_0\,(x-x_0)_+^m \\ &\quad + c_1\,(x-x_1)_+^m + \ldots + c_n\,(x-x_n)_+^m \qquad (4.1.1 - 10) \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i\,x^i + \sum_{j=0}^{n} c_j\;(x-x_j)_+^m\,, \end{aligned}$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(m)}\,(x_j+0) - s^{(m)}\,(x_j-0)}{m\,!} \qquad (4.1.1 - 11)$$

για κάθε $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n$.

Ο αναγνώστης για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

Πόρισμα 4.1.1 - 1 *Όταν μια spline s βαθμού m με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

ορίζεται στο $[x_0, x_n]$, τότε γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} s(x) &= b_0 + b_1\,x + \ldots + b_m\,x^m \\ &\quad + c_1\,(x-x_1)_+^m + \ldots + c_{n-1}\,(x-x_{n-1})_+^m \qquad (4.1.1 - 12) \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i\,x^i + \sum_{j=1}^{n-1} c_j\;(x-x_j)_+^m \end{aligned}$$

όπου οι συντελεστές c_j; $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n$ δίνονται από την $(4.1.1-11)$.

Απόδειξη. Επειδή $x \in [x_0, x_n]$, από τον τύπο $(4.1.1-10)$ προκύπτει ότι:

- αν $x \geq x_0$, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 4 είναι $(x-x_0)_+^m = (x-x_0)^m$, και
- αν $x \leq x_n$, τότε $(x-x_n)_+^m = 0$.

Άρα ο τύπος $(4.1.1-10)$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\begin{aligned} s(x) &= \overbrace{a_0 + a_1\,x + \ldots + a_m\,x^m + c_0\,(x-x_0)_+^m}^{\text{τελικά μετά τις πράξεις: } b_0+b_1\,x+\ldots+b_m\,x^m} \\ &\quad + c_1\,(x-x_1)_+^m + \ldots + c_{n-1}\,(x-x_{n-1})_+^m\,, \end{aligned}$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Εφαρμογές του πορίσματος θα δοθούν στην Παράγραφο 4.1.3.

Παράδειγμα 4.1.1 - 3

Έστω η spline του Παραδείγματος 4.1.1 - 1:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \\ -3x^2 - x & \quad\;\; x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \quad\;\; x \in [1, 2) \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & \quad\;\; x \in [2, +\infty), \end{cases} \qquad (4.1.1 - 13)$$

όπου οι κόμβοι είναι στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, ενώ ο βαθμός της s είναι $m = 3$. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.1 - 10)$ είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 + c_0\,(x - x_0)_+^3 + c_1\,(x - x_1)_+^3 + c_2\,(x - x_2)_+^3 \\ &= x^3 + 2x + 1 + c_0\,(x + 1)_+^3 + c_1\,(x - 1)_+^3 + c_2\,(x - 2)_+^3 \end{aligned}$$

όπου από την $(4.1.1 - 11)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{s^{(3)}\,(x_0 + 0) - s^{(3)}\,(x_0 - 0)}{3\,!} = \frac{0 - 6}{6} = -1 \\ c_1 &= \frac{s^{(3)}\,(x_1 + 0) - s^{(3)}\,(x_1 - 0)}{3\,!} = \frac{12 - 0}{6} = 2 \\ c_2 &= \frac{s^{(3)}\,(x_2 + 0) - s^{(3)}\,(x_2 - 0)}{3\,!} = \frac{6 - 12}{6} = -1. \end{aligned}$$

Άρα

$$s(x) = x^3 + 2x + 1 - (x + 1)_+^3 + 2\,(x - 1)_+^3 - (x - 2)_+^3\,. \qquad (4.1.1 - 14)$$

Η επαλήθευση ότι η $(4.1.1 - 14)$ ισούται με την $(4.1.1 - 13)$ γίνεται σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 4 ως εξής:

$x \in (-\infty, -1)$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - \overbrace{(x + 1)_+^3 + 2\,(x - 1)_+^3 - (x - 2)_+^3}^{0} \\ &= x^3 + 2x + 1, \end{aligned}$$

$x \in [-1, 1)$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - (x+1)^3 + \overbrace{2\,(x-1)_+^3 - (x-2)_+^3}^{0} \\ &= x^3 + 2x + 1 - \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) = -3x^2 - x, \end{aligned}$$

$x \in [1, 2)$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - (x+1)^3 + 2\,(x-1)^3 - \overbrace{(x-2)_+^3}^{0} \\ &= x^3 + 2x + 1 - \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) \\ &\quad +2\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2, \end{aligned}$$

$x \in [2, +\infty)$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - (x+1)^3 + 2\,(x-1)^3 - (x-2)^3 \\ &= x^3 + 2x + 1 - \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) \\ &\quad +2\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) - \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) \\ &= x^3 - 3x^2 - 7x + 6. \end{aligned}$$

Η εντολή ορισμού της spline $s(x)$ του Παραδείγματος 4.1.1 - 3 με το MATHEMATICA είναι:

```
s[x_]:=x^3+2x+1-If[x<-1,0,(x+1)^3]
       +2 If[x<1,0,(x-1)^3]-If[x<2,0,(x-2)^3]
```

4.1.2 Φυσική spline

Ορισμός 4.1.2 - 1. *Μια spline βαθμού ν θα λέγεται* **φυσική** *(natural), όταν:*

i) είναι περιττού βαθμού, δηλαδή της μορφής $\nu = \mathbf{2m-1}$, όταν $m = 1, 2, \ldots,$

ii) στα άκρα διαστήματα

$$(-\infty, x_0) \quad \text{και} \quad [x_n, +\infty)$$

η s είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq \mathbf{m-1}$.

Παρατηρήσεις 4.1.2 - 1

i) Επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 (ii) η spline και οι παράγωγοί της τάξης

$$1,\, 2,\, \ldots,\, \overbrace{(2m-1)-1}^{2(m-1)}$$

πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις, προκύπτει τότε ότι στους ακραίους κόμβους x_0 και x_n, όπου λόγω του Ορισμού 4.1.2 - 1 (ii) η s είναι βαθμού $m-1$, θα πρέπει να ισχύει

$$s^{(j)}\left(x_0\right) = s^{(j)}\left(x_n\right) = 0 \qquad (4.1.2 - 1)$$

για κάθε $j = m,\, m+1,\, \ldots,\, 2(m-1)$.

ii) Στην ειδική περίπτωση που η spline είναι **κυβική**, δηλαδή βαθμού $\nu = 3 = 2 \cdot 2 - 1$, οπότε $m = 2$, τότε, αν είναι και φυσική, στα άκρα διαστήματα πρέπει να είναι βαθμού $m-1 = 2-1 = 1$. Άρα η συνθήκη $(4.1.2-1)$ στην περίπτωση αυτή, επειδή $2(m-1) = 2(2-1) = 2$, γράφεται

$$s^{(2)}\left(x_0\right) = s^{(2)}\left(x_n\right) = 0. \qquad (4.1.2 - 2)$$

Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση της φυσικής spline ισχύει θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 4.1.1 - 1. Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

Θεώρημα 4.1.2 - 1. *Κάθε φυσική spline βαθμού $2m-1$ με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1\, x + \ldots + a_{m-1}\, x^{m-1} + c_0\, (x - x_0)_+^{2m-1} \\ &\quad + c_1\, (x - x_1)_+^{2m-1} + \ldots + c_n\, (x - x_n)_+^{2m-1} \qquad (4.1.2 - 3) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i\, x^i + \sum_{j=0}^{n} c_j\, \left(x - x_j\right)_+^{2m-1}, \end{aligned}$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(2m-1)}\,(x_j + 0) - s^{(2m-1)}\,(x_j - 0)}{(2m-1)\,!} \tag{4.1.2 - 4}$$

για κάθε $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, *ενώ οι συντελεστές* c_j *επαληθεύουν τις σχέσεις*

$$c_0\, x_0^i + c_1\, x_1^i + \ldots + c_n\, x_n^i = 0 \tag{4.1.2 - 5}$$

για κάθε $\quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1.$

Οι σχέσεις $(4.1.2-5)$ αναλυτικά γράφονται ως εξής:

$$\begin{array}{lcccccccc} c_0 & + & c_1 & + & \ldots & + & c_n & = & 0 \\ c_0\, x_0 & + & c_1\, x_1 & + & \ldots & + & c_n\, x_n & = & 0 \\ c_0\, x_0^2 & + & c_1\, x_1^2 & + & \ldots & + & c_n\, x_n^2 & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ c_0\, x_0^{m-1} & + & c_1\, x_1^{m-1} & + & \ldots & + & c_n\, x_n^{m-1} & = & 0. \end{array} \tag{4.1.2 - 6}$$

Πόρισμα 4.1.2 - 1. *Κάθε κυβική φυσική spline με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1\, x + c_0\,(x - x_0)_+^3 + c_1\,(x - x_1)_+^3 \\ &\quad + \ldots + c_n\,(x - x_n)_+^3\,, \end{aligned} \tag{4.1.2 - 7}$$

όταν

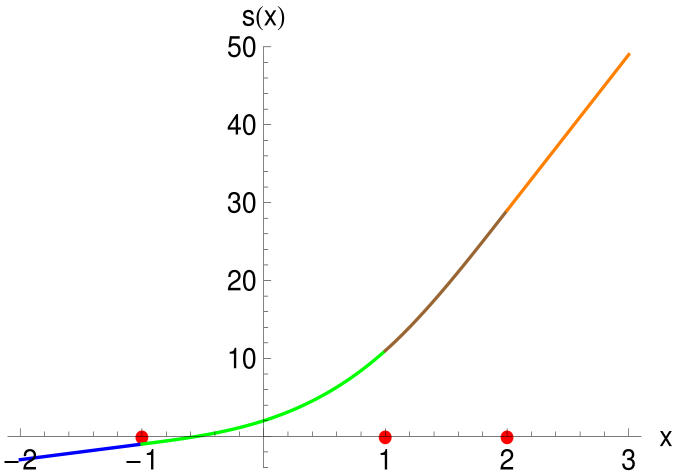
$$c_j = \frac{s^{(3)}\,(x_j + 0) - s^{(3)}\,(x_j - 0)}{3\,!} \tag{4.1.2 - 8}$$

για κάθε $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$, *ενώ οι συντελεστές* c_j *επαληθεύουν τις σχέσεις*

$$\begin{array}{lcccccccc} c_0 & + & c_1 & + & \ldots & + & c_n & = & 0, \\ c_0\, x_0 & + & c_1\, x_1 & + & \ldots & + & c_n\, x_n & = & 0. \end{array} \tag{4.1.2 - 9}$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.1.3 - 2.

Όμοια, όπως και στο Πόρισμα 4.1.1 - 1, εφαρμογές των παραπάνω θα δοθούν στην Παράγραφο 4.1.3.



Σχήμα 4.1.2 - 1: Παράδειγμα 4.1.2 - 1

Παράδειγμα 4.1.2 - 1

Έστω η spline (Σχ. 4.1.2 - 1)

$$s(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{αν} \quad x\in(\infty,-1) \quad \text{βαθμός} \quad 1 \\ x^3+3x^2+5x+2 & \quad x\in[-1,1) \quad\quad 3 \\ -2x^3+12x^2-4x+5 & \quad x\in[1,2) \quad\quad 3 \\ 20x-11 & \quad x\in[2,+\infty) \quad\quad 1. \end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται[5] ότι η s είναι μια κυβική spline με κόμβους στα σημεία $x_0=-1$, $x_1=1$ και $x_2=2$. Επειδή στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $[2,+\infty)$ η s είναι 1ου βαθμού, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.2 - 1 η s θα είναι μια **κυβική φυσική spline**.

Τότε από την $(4.1.2-7)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} s(x) &= 2x+1+c_0\,(x-x_0)_+^3+c_1\,(x-x_1)_+^3+c_2\,(x-x_2)_+^3 \\ &= 2x+1+c_0\,(x+1)_+^3+c_1\,(x-1)_+^3+c_2\,(x-2)_+^3\,, \end{aligned}$$

[5]Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση (βλέπε Παράδειγμα 4.1.1 - 1).

όπου από την $(4.1.2-8)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{s^{(3)}(x_0+0)-s^{(3)}(x_0-0)}{3\,!}=\frac{6-0}{6}=1,\\
c_1 &= \frac{s^{(3)}(x_1+0)-s^{(3)}(x_1-0)}{3\,!}=\frac{-12-6}{6}=-3,\\
c_2 &= \frac{s^{(3)}(x_2+0)-s^{(3)}(x_2-0)}{3\,!}=\frac{0+12}{6}=2.
\end{aligned}$$

Άρα

$$s(x)=2x+1+(x+1)_+^3-3\,(x-1)_+^3+2\,(x-2)_+^3\,.$$

Τότε προφανώς ισχύει η $(4.1.2-8)$, δηλαδή

$$s^{(2)}(-1)=s^{(2)}(2)=0,$$

ενώ σύμφωνα με την $(4.1.2-9)$ είναι

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_0 & + & c_1 & + & c_2 & = & 1-3+2 & = & 0,\\
c_0\cdot(-1) & + & c_1\cdot 1 & + & c_2\cdot 2 & = & -1-3+4 & = & 0.
\end{array}$$

Η εντολή ορισμού της spline $s(x)$ με το MATHEMATICA είναι:

```
s[x_]:=2x+1+If[x<-1,0,(x+1)^3]
       -3 If[x<1,0,(x-1)^3]+2 If[x<2,0,(x-2)^3]
```

4.1.3 Υπολογισμός spline

Αρχικά ορίζεται η έννοια της παρεμβολής μέσω της spline ως εξής:

Ορισμός 4.1.3 - 1 (spline παρεμβολής). *Η spline $s(x)$ θα λέγεται ότι παρεμβάλλεται ή ότι ορίζει μια παρεμβολή (spline interpolation) στα σημεία*

$$S=\{(x_i,y_i)\quad \mu\varepsilon\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,n\}\,,$$

όπου $x_0<x_1<\ldots<x_n$, όταν

$$s\,(x_i)=y_i\quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,n. \tag{4.1.3 - 1}$$

Ορισμός 4.1.3 - 2. *Η spline $s(x)$ θα λέγεται ότι παρεμβάλλεται ή ότι ορίζει μια παρεμβολή στη συνάρτηση $f(x)$ στους κόμβους $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, όταν*

$$s\left(x_i\right) = f\left(x_i\right) \quad \textit{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n. \tag{4.1.3 - 2}$$

Παρατήρηση 4.1.3 - 1

Οι $(4.1.3 - 1)$, αντίστοιχα οι $(4.1.3 - 2)$ θα λέγονται στο εξής και **συνθήκες παρεμβολής**.

Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Έστω η κυβική spline $s(x)$ του Παραδείγματος 4.1.1 - 1:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \\ -3x^2 - x & \phantom{\text{αν}} \quad x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \phantom{\text{αν}} \quad x \in [1, 2) \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & \phantom{\text{αν}} \quad x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

με κόμβους στα σημεία

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 2.$$

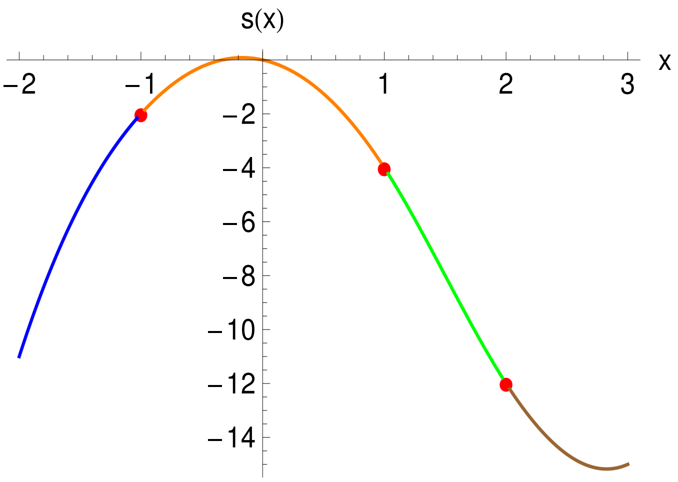
Τότε, επειδή[6]

$$\begin{aligned} s\left(x_0 - 0\right) &= s(-1-0) = -2 = y_0, \\ s\left(x_1 - 0\right) &= s(1-0) = -4 = y_1, \\ s\left(x_2 - 0\right) &= s(2-0) = -12 = y_2, \end{aligned}$$

η $s(x)$ ορίζει μια κυβική spline παρεμβολής, που διέρχεται από τα σημεία (Σχ. 4.1.3 - 1):

$$(x_0, y_0) = (-1, -2), \quad (x_1, y_1) = (1, -4) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = (2, -12).$$

[6] Επειδή λόγω του ορισμού της spline είναι $s\left(x_i - 0\right) = s\left(x_i + 0\right)$ για κάθε $i = 0,\, 1,\, 2$, αρκεί να υπολογιστούν μόνον οι τιμές $s\left(x_i - 0\right) = y_i$; $i = 0,\, 1,\, 2$.



Σχήμα 4.1.3 - 1: Παράδειγμα 4.1.3 - 1 με κόμβους στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Όμοια, έστω η κυβική spline $s(x)$ του Παραδείγματος 4.1.1 - 3:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν} \quad x \in [-2,-1] \\ \frac{1}{4}\left(3|x|^3 - 6x^2 + 4\right) & \quad\;\; x \in [-1,1] \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \quad\;\; x \in [1,2] \end{cases}$$

με εσωτερικούς κόμβους στα σημεία

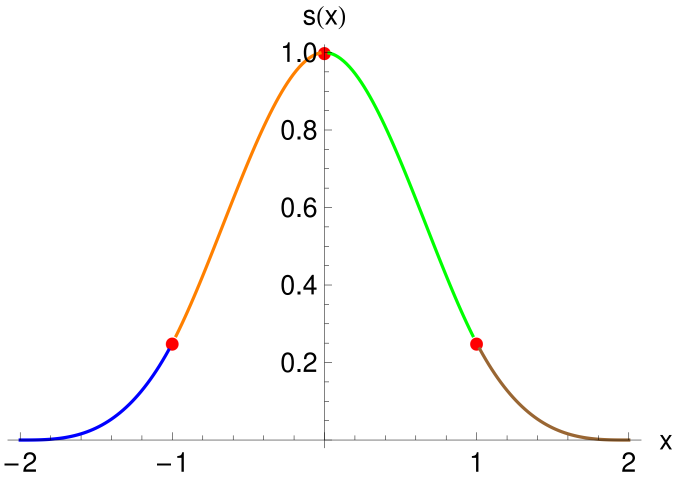
$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 2.$$

Τότε, επειδή

$$s(-1-0) = \frac{1}{4} = y_0, \quad s(0-) = 1 = y_1 \quad \text{και} \quad s(1-0) = \frac{1}{4} = y_2,$$

η $s(x)$ ορίζει επίσης μια κυβική spline παρεμβολής, που διέρχεται από τα σημεία (Σχ. 4.1.3 - 2):

$$(x_0, y_0) = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \quad (x_1, y_1) = (0, 1) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = \left(1, \frac{1}{4}\right).$$



Σχήμα 4.1.3 - 2: Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Σχετικά με την ύπαρξη των spline παρεμβολής αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.3 - 1 (ύπαρξης spline παρεμβολής). *Υπάρχει ακριβώς μια spline, έστω s, με πεδίο ορισμού το $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ βαθμού $2m-1$ και κόμβους στα σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

όπου

$$\mathbf{n+1 \geq m}, \tag{4.1.3 - 3}$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s\left(x_i\right) = y_i \quad \text{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n \tag{4.1.3 - 4}$$

και τις συνθήκες στα άκρα $a = x_0$ και $b = x_n$

$$s^{(j)}\left(x_0\right) = u_j \quad \text{και} \quad s^{(j)}\left(x_n\right) = w_j \tag{4.1.3 - 5}$$

για κάθε $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m-1$ ή $j = m,\, m+1,\, \ldots,\, 2(m-1)$.

Παρατηρήσεις 4.1.3 - 1

Οι συνθήκες $(4.1.3-5)$:

- θα λέγονται στο εξής επίσης και **συνοριακές συνθήκες παρεμβολής**,
- για την περίπτωση μιας **κυβικής spline**[7] γράφονται

$$\mathbf{s^{(1)}\left(x_0\right)=u_j} \quad \text{και} \quad \mathbf{s^{(1)}\left(x_n\right)=w_j}. \tag{4.1.3 - 6}$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 3

Να υπολογιστεί η κυβική spline s με κόμβους στα σημεία $x_0=-1$, $x_1=1$ και $x_2=2$, που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής $(4.1.3-4)$:

$$s(-1)=-2, \quad s(1)=-4, \quad s(2)=-12 \tag{4.1.3 - 7}$$

και τις συνοριακές $(4.1.3-5)$:

$$s^{(1)}(-1)=5, \qquad s^{(1)}(2)=-7. \tag{4.1.3 - 8}$$

Λύση. Σύμφωνα με τα δεδομένα οι κόμβοι είναι

$$x_0=-1, \quad x_1=1 \ (\text{εσωτερικός κόμβος}) \quad \text{και} \quad x_2=2.$$

Άρα ο αριθμός των κόμβων είναι $n=3$ και ο βαθμός της spline επίσης 3. Επειδή ο βαθμός 3 της spline γράφεται

$$3=2\cdot\overbrace{2}^{m}-1, \quad \text{οπότε} \quad m=2 \quad \text{και} \quad n+1=3+1=4\geq 2=m,$$

η συνθήκη $(4.1.3-3)$ επαληθεύεται και η spline υπάρχει.

[8]Από το Πόρισμα 4.1.1 - 1 προκύπτει ότι επειδή ο βαθμός της είναι 3 και ο εσωτερικός κόμβος το x_1, η $s(x)$ θα είναι της μορφής

$$s(x)=b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+b_3\,x^3+c\,(x-1)_+^3. \tag{4.1.3 - 9}$$

---

[7] Ο βαθμός 3 γράφεται $3=2\cdot 2-1$, οπότε $m=2$.

[8] Όταν $x\in[x_0,x_n]$ και η spline s είναι βαθμού m, θα έχει τη μορφή

$$s(x) \;=\; b_0+b_1\,x+\ldots+b_m\,x^m+c_1\,(x-x_1)_+^m+\ldots+c_{n-1}\,(x-x_{n-1})_+^m$$

όπου $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$ είναι οι **εσωτερικοί κόμβοι**.

Τότε από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής (4.1.3−8) στην (4.1.3−9), επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 4 είναι

$$(x-1)_+^3 = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x < 1 \\ (x-1)^3 & \text{αν} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s(-1) &= b_0 + b_1(-1) + b_2(-1)^2 + b_3(-1)^3 + c\,\overbrace{(x-1)_+^3}^{0} \\ &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = -2 \\ s(1) &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + c\,\overbrace{(x-1)_+^3}^{0} \\ &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = -4, \\ s(2) &= b_0 + b_1\,2 + b_2\,2^2 + b_3\,2^3 + c(2-1)^3 \\ &= b_0 + 2\,b_1 + 4\,b_2 + 8\,b_3 + c = -12, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{ccccccccccc} b_0 & - & b_1 & + & b_2 & - & b_3 & & = & -\,2 \\ b_0 & + & b_1 & + & b_2 & + & b_3 & & = & -\,4 \\ b_0 & + & 2\,b_1 & + & 4\,b_2 & + & 8\,b_3 & +c & = & -12. \end{array} \qquad (4.1.3 - 10)$$

Από την $(4.1.3-9)$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$s^{(1)}(x) = b_1 + 2\,b_2\,x + 3\,b_3\,x^2 + 3\,c\,(x-1)_+^2,$$

οπότε από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών παρεμβολής $(4.1.3-8)$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s^{(1)}(-1) &= b_1 + 2\,b_2(-1) + 3\,b_3(-1)^2 + 3c\,\overbrace{(x-1)_+^2}^{0} \\ &= b_1 - 2\,b_2 + 3\,b_3 = 5, \\ s^{(1)}(2) &= b_1 + 2\,b_2\,2 + 3\,b_3\,2^2 + 3\,c(2-1)^2 \\ &= b_1 + 4\,b_2 + 12\,b_3 + 3\,c = -7, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{ccccccccc} b_1 & - & 2\,b_2 & + & 3\,b_3 & & & = & 5 \\ b_1 & + & 4\,b_2 & + & 12\,b_3 & + & 3\,c & = & -7. \end{array} \tag{4.1.3 - 11}$$

Τότε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $(4.1.3-10)$ και $(4.1.3-11)$ τελικά έχουμε

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -3, \quad b_3 = 0 \quad \text{και} \quad c = 2.$$

Άρα η spline s είναι της μορφής

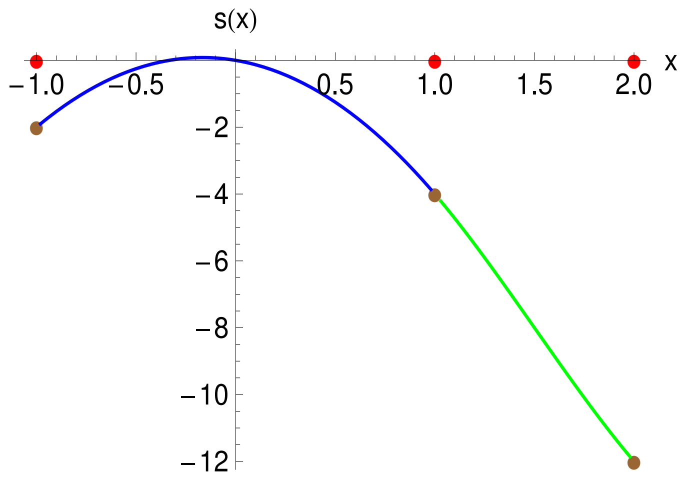
$$s(x) = -x - 3x^2 + 2(x-1)_+^3, \quad \text{όταν} \quad x \in [-1, 2]$$

που συμπίπτει στο διάστημα $[-1, 2]$ με την αντίστοιχη

$$s(x) = \begin{cases} -3x^2 - x & \text{αν} \quad x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \text{αν} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$

του Παραδείγματος 4.1.1 - 1.

Στο Πρόγραμμα 4.1.3 - 1 δίνεται ο υπολογισμός, η γραφική παράσταση της spline $s(x)$, όταν $x \in [-2, 3]$, των κόμβων της και των σημείων παρεμβολής με το MATHEMATICA.



Σχήμα 4.1.3 - 3: Παράδειγμα 4.1.3 - 3 με σημεία παρεμβολής $(-1,-2)$, $(1,-4)$ και $(2,-12)$ με συνοριακές συνθήκες $s^{(1)}(-1)=5$ και $s^{(1)}(2)=-7$

Πρόγραμμα 4.1.3 - 1 (κυβικής spline)

```
x0 = -1;x1 = 1;x2 = 2;
y0 = -2;y1 = -4;y2 = -12;
s[x_] := b0 + b1 x + b2 x^2 + b3 x^3
         + c If[x < x1, 0, (x - x1)^3]
y = D[s[x], x] /. x -> x0;
z = D[s[x], x] /. x -> x2;
sol = Solve[{s[x0] == y0, s[x1] == y1, s[x2] == y2,
      y == 5, z == -7}, {b0, b1, b2, b3, c}]
s1[x_] := s[x] /. sol
Print["Spline s(x)=", s1[x]]
data = {{x0, 0}, {x1, 0}, {x2, 0}};
fgr1 = ListPlot[data, PlotStyle -> Red, PlotMarkers -> "."];
data1 = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}};
fgr2 = ListPlot[data1, PlotStyle -> Brown,
       PlotMarkers -> "."];
fgr3 = Show[Plot[s1[x], {x, x0, x1}, PlotStyle -> Blue],
       Plot[s1[x], {x, x1, x2}, PlotStyle -> Green]];
fgr = Show[fgr1, fgr2, fgr3,AxesLabel -> {"x", "s(x)"}]
```

■

Υπολογισμός φυσικών spline

Σχετικά με τον υπολογισμό των φυσικών spline ισχύει το παρακάτω γενικό θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.3 - 2. *Υπάρχει ακριβώς μια φυσική spline, έστω s, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ βαθμού $2m-1$ και κόμβους στα σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

όταν

$$\mathbf{n+1 \geq m}, \tag{4.1.3 - 12}$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s\left(x_i\right) = y_i \quad \textit{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n, \tag{4.1.3 - 13}$$

όταν $y_i \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.1.3 - 4

Να υπολογιστεί η κυβική φυσική spline με κόμβους στα σημεία

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s(-1) = -1, \quad s(1) = 11, \quad \text{και} \quad s(2) = 29. \tag{4.1.3 - 14}$$

Λύση. Ο αριθμός των κόμβων είναι $n = 3$, ενώ ο βαθμός της spline 3, που γράφεται:

$$3 = 2 \cdot \overbrace{2}^{m} - 1, \quad \text{δηλαδή} \quad m = 2.$$

Άρα $n + 1 = 3 + 1 = 4 \geq 2 = m$, οπότε επαληθεύεται η συνθήκη $(4.1.3 - 12)$ και η spline υπάρχει.

Από το [9]Πόρισμα 4.1.2 - 1 προκύπτει ότι η spline θα έχει τη μορφή

$$s(x) = a_0 + a_1\, x + c_0\, (x+1)_+^3 + c_1\, (x-1)_+^3 + c_2\, (x-2)_+^3. \tag{4.1.3 - 15}$$

[9]Κάθε **κυβική φυσική** spline ($2m - 1 = \mathbf{3} = 2 \cdot 2 - 1$, οπότε $m = 2$) με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

Τότε από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής $(4.1.3-14)$ στην $(4.1.3-15)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
s(-1) &= a_0 + a_1(-1) + \overbrace{c_0\,(x+1)_+^3 + c_1\,(x-1)_+^3 + c_2\,(x-2)_+^3}^{0} \\
&= a_0 - a_1 = -1, \\
s(1) &= a_0 + a_1 + c_0\,(1+1)^3 + \overbrace{c_1\,(x-1)_+^3 + c_2\,(x-2)_+^3}^{0} \\
&= a_0 + a_1 + 8\,c_0 = 11, \\
s(2) &= a_0 + a_1\,2 + c_0\,(1+2)^3 + c_1\,(2-1)^3 + \overbrace{c_2\,(x-2)_+^3}^{0} \\
&= a_0 + 2\,a_1 + 27\,c_0 + c_1 = 29,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & - & 3a_1 & & & & & = & -1 \\
a_0 & + & a_1 & + & 8\,c_0 & & & = & 11 \\
a_0 & + & 2\,a_1 & + & 27\,c_0 & + & c_1 & = & 29.
\end{array} \qquad (4.1.3\text{ - }16)$$

Από την $(4.1.2-9)$ έχουμε

$$\begin{array}{ccccccc}
c_0 & + & c_1 & + & c_2 & = & 0 \\
c_0\,x_0 & + & c_1\,x_1 & + & c_2\,x_2 & = & 0,
\end{array}$$

οπότε

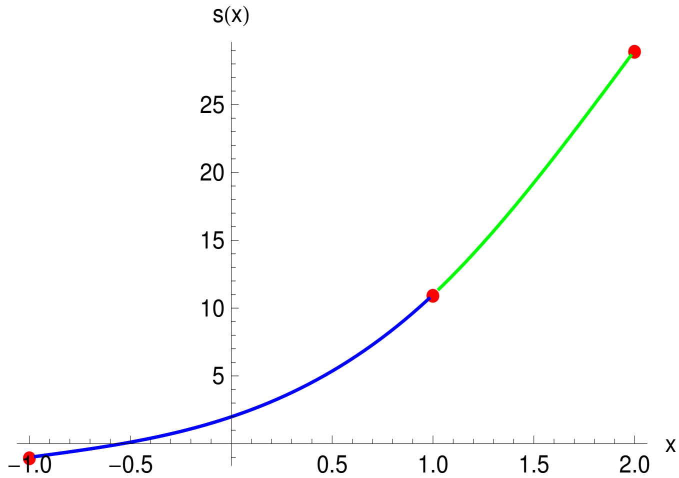
$$\begin{array}{ccccccc}
c_0 & + & c_1 & + & c_2 & = & 0 \\
-c_0 & + & c_1 & + & 2\,c_2 & = & 0.
\end{array} \qquad (4.1.3\text{ - }17)$$

γράφεται ως εξής:

$$s(x) \;=\; a_0 + a_1\,x + c_0\,(x-x_0)_+^3 + c_1\,(x-x_1)_+^3 + \ldots + c_n\,(x-x_n)_+^3\,,$$

όταν οι συντελεστές c_j επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_0 & + & c_1 & + & \ldots & + & c_n & = & 0, \\
c_0\,x_0 & + & c_1\,x_1 & + & \ldots & + & c_n\,x_n & = & 0.
\end{array}$$



Σχήμα 4.1.3 - 4: Παράδειγμα 4.1.3 - 4 με σημεία παρεμβολής $(-1,-1)$, $(1,11)$ και $(2,29)$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $(4.1.3-16)$ και $(4.1.3-17)$ τελικά προκύπτουν οι εξής συντελεστές:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -3 \quad \text{και} \quad c_2 = 2.$$

Άρα σύμφωνα με την $(4.1.3-15)$ η spline s, όταν $x \in \mathbb{R}$, θα είναι της μορφής (Σχ. 4.1.3 - 4)

$$s(x) = s(x) = 1 + 2\,x + (x+1)^3_+ - 3\,(x-1)^3_+ + 2\,(x-2)^3_+$$

που συμπίπτει με την αντίστοιχη μορφή του Παραδείγματος 4.1.2 - 1.

Στο Πρόγραμμα 4.1.3 - 2 δίνεται ο υπολογισμός, η γραφική παράσταση της $s(x)$ όταν $x \in [-2,3]$ και των σημείων παρεμβολής με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 4.1.3 - 2 (κυβικής φυσικής spline)

```
x0 = -1;x1 = 1;x2 = 2;y0 = -1;y1 =11;y2 =29;
s[x_] := a0 + a1 x + c0 If[x < x0, 0, (x - x0)^3]
         +c1 If[x < x1, 0, (x - x1)^3]
         + c2 If[x < x2, 0, (x - x2)^3]
y = c0 + c1 + c2;
z = c0 x0 + c1 x1 + c2 x2;
```

```
sol = Solve[{s[x0] == y0, s[x1] == y1, s[x2] == y2,
      y == 0,z == 0}, {a0, a1, c0, c1, c2}]
s1[x_] := s[x] /. sol
Print["Spline s(x)=", s1[x]]
Plot[s1[x], {x, -2, 3}]
data = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}};
fgr1 = ListPlot[data, PlotStyle -> Red,
       PlotMarkers -> "."];
fgr2 = Show[Plot[s1[x], {x, x0, x1}, PlotStyle -> Blue],
       Plot[s1[x], {x, x1, x2}, PlotStyle -> Green]];
fgr = Show[fgr1, fgr2, PlotRange -> All,
      AxesLabel -> {"x", "s(x)"}]
```

■

Ασκήσεις

1. Αν $x \in [-1, 2]$, να γραφεί η spline του Παραδείγματος 4.1.1 - 3 στη μορφή $(4.1.1 - 12)$.

2. Δείξτε ότι η $s(x) = (x - x_i)_+^m$ ορίζει μια spline βαθμού m με κόμβο το σημείο x_i.

3. Αιτιολογήστε τον ελάχιστο αριθμό κόμβων που απαιτούνται για μια κυβική, αντίστοιχα 5ου βαθμού (quintic) spline.

4. Να υπολογιστεί η κυβική φυσική spline, που διέρχεται από τα σημεία παρεμβολής

$$(0, 0), \quad (1, 2), \quad (2, 1) \quad \text{και} \quad (3, 0).$$

5. Να γραφεί το πρόγραμμα με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB, που υπολογίζει τη λύση της Άσκησης 4 και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της spline, των κόμβων και των σημείων παρεμβολής.

6. Να γραφούν τα αντίστοιχα Προγράμματα των 4.1.3 - 1 και 4.1.3 - 2 με το MATLAB. Ποια η μορφή των προγραμμάτων με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB για την περίπτωση μιας spline 5ου βαθμού;

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{με θεωρητική τιμή:} \quad \mathrm{I} \approx \mathit{0.746\,824}$$

χρησιμοποιώντας μια κυβική spline με 3, αντίστοιχα 4 ισαπέχοντες κόμβους, όταν

i) οι συνθήκες $(4.1.3-5)$ συμπίπτουν με τις τιμές της παραγώγου της ολοκληρωτέας συνάρτησης στα άκρα σημεία,

ii) η spline είναι φυσική.

Σε κάθε περίπτωση να γίνει σύγκριση με τη θεωρητική τιμή.

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978–960–387–856–8.

[3] Ahlberg, J.H. & Nilson, E.N. & Walsh, J.L. (1967). *The theory of splines and their applications*. New York: Academic Press. ISBN: 978–0–12–044750–3.

[4] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0–471–50023–2.

[5] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] de Boor, C. (2001). *A Practical guide to splines*. Springer–Verlang New York Inc. ISBN 978–0–387–95366–3.

[7] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–209–961–2.

[8] Greville, T. N. E. (1969). *Theory and applications of spline functions*. New York: Academic Press. ISBN 0–12–302950–3.

[9] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.

[10] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction.* Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.

[11] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis.* Springer (3rd ed.). ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/