Μάθημα 5

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

5.1 Διακριτή προσέγγιση

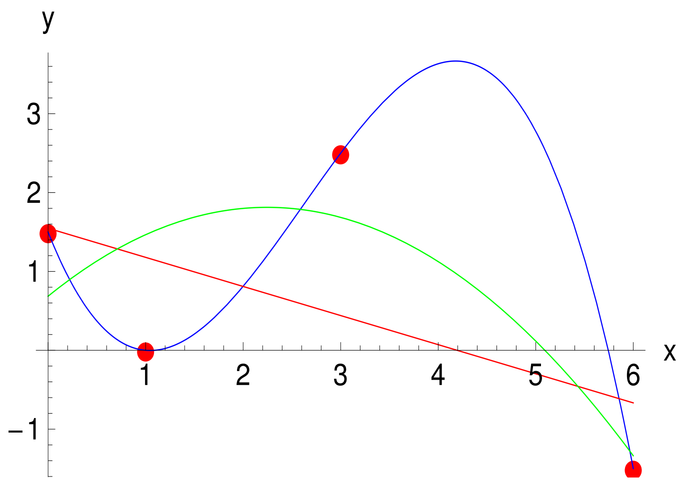
5.1.1 Εισαγωγή

Στο Μάθημα *Πολυωνυμική παρεμβολή* εξετάστηκε το πρόβλημα της εύρεσης του πολυωνύμου παρεμβολής, δηλαδή του πολυωνύμου που συνέπιπτε ή διαφορετικά διερχόταν από ορισμένα σημεία μιας συνάρτησης. Το πρόβλημα που θα εξεταστεί στο μάθημα αυτό είναι ο προσδιορισμός ενός πολυωνύμου που προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό ή διαφορετικά **άριστο τρόπο** (best approximation ή **curve fitting**) ένα σύνολο τιμών (data) της μορφής (Σχ. 5.1.1 - 1):[1]

$$S=\{(x_i,y_i)\quad \text{με}\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,n\}\,. \tag{5.1.1 - 1}$$

Έστω ότι $y_i=f\left(x_i\right)$; $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$ όπου f μια άγνωστη γενικά συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση, που ενώ είναι γνωστό ότι υπάρχει, είναι άγνωστος ο τύπος της. Η έννοια της άριστης προσέγγισης σημαίνει τότε ότι το σφάλμα

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Curve_fitting*



Σχήμα 5.1.1 - 1: Δεδομένα: $S = \{(0, 1.5), (1, 0), (3, 2.5), (6, -1.5)\}$. Προσέγγιση με: παρεμβολή (μπλε καμπύλη) και με διακριτή προσέγγιση: 1ου βαθμού - ευθεία (κόκκινη) και 2ου βαθμού - παραβολή (πράσινη) καμπύλη

της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή είναι το μικρότερο δυνατό.

5.1.2 Πολυώνυμο 1ου βαθμού

Έστω ότι το σύνολο των σημείων S στην $(5.1.1-1)$ προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της μορφής

$$P_1(x) = P(x) = ax + b, \tag{5.1.2 - 1}$$

δηλαδή η προσέγγιση των δεδομένων γίνεται με μια ευθεία. Αν θεωρηθεί το τυχόν σημείο $(x_i, y_i) \in S$, τότε η τιμή y_i προσεγγίζεται από την

$$\tilde{y}_i = P\left(x_i\right) = ax_i + b,$$

οπότε το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα της προσέγγισης στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$e_i = \left|y_i - \tilde{y}_i\right| = \left|y_i - (ax_i + b)\right|.$$

Επομένως για το ολικό σφάλμα, έστω $\tilde{E}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_n \\ &= |y_1 - (ax_1 + b)| + \ldots + |y_n - (ax_n + b)|. \qquad (5.1.2 - 2)\end{aligned}$$

Προφανώς $\tilde{E} = \tilde{E}(a, b)$, δηλαδή το ολικό σφάλμα είναι μια συνάρτηση των σταθερών a, b. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των a και b, έτσι ώστε το σφάλμα $\tilde{E}$ στην $(5.1.2-2)$ να είναι ελάχιστο. Τότε όμως, όπως είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη από τη μελέτη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, οι **αναγκαίες** συνθήκες για να συμβαίνει αυτό είναι:[2]

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = 0. \qquad (5.1.2 - 3)$$

Εύκολα όμως διαπιστώνεται ότι η $(5.1.2-3)$ λόγω και του απολύτου δεν παραγωγίζεται, οπότε το πρόβλημα στη μορφή αυτή δεν λύνεται.[3]

Στη **διακριτή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων** (discrete least squares method), σε αντίθεση με την $(5.1.2-2)$, προσδιορίζονται οι σταθερές a και b, έτσι ώστε το *ολικό τετραγωνικό σφάλμα*

$$\begin{aligned}E &= e_1^2 + \ldots + e_n^2 \\ &= [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \qquad (5.1.2 - 4)\end{aligned}$$

να είναι **ελάχιστο**.

Τότε από την $(5.1.2-4)$, αν εφαρμοστούν οι συνθήκες $(5.1.2-3)$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)\,x_i = 0, \quad \text{και} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0\end{aligned}$$

[2] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 7.

[3] Έστω για ευκολία ότι απαλείφονται τα απόλυτα. Τότε

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial a} = -x_1 - \ldots - x_n = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial b} = -1 - \ldots - 1 = -n = 0$$

άτοπο.

που τελικά μετά τις πράξεις γράφεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\
a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^0}^{n} &= \sum_{i=1}^{n} y_i .
\end{aligned} \qquad (5.1.2 - 5)
$$

Το σύστημα (5.1.2−5), που λέγεται και **σύστημα κανονικών εξισώσεων** (normal equations), είναι γραμμικό ως προς τους αγνώστους a και b. Από τη λύση του προκύπτει τότε ότι οι ζητούμενοι συντελεστές του πολυωνύμου $P_1(x)$ στην περίπτωση αυτή είναι:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \\
b &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.
\end{aligned} \qquad (5.1.2 - 6)
$$

Παράδειγμα 5.1.2 - 1

Να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα:

x_i	-0.5	0.3	0.7	1.5
y_i	1.2	2.0	1.0	-1.0

Λύση. Για την εφαρμογή των τύπων $(5.1.2-6)$ απαιτείται η δημιουργία του Πίνακα 5.1.2 - 1.

Πίνακας 5.1.2 - 1: Παράδειγμα 5.1.2 - 1

i	x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2
1	-0.5	1.2	-0.6	0.25
2	0.3	2.0	0.6	0.09
3	0.7	1.0	0.7	0.49
4	1.5	-1.0	-1.5	2.25
	2.0	3.2	-0.8	3.08

Τότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.1.2 - 1 έχουμε

$$a = \frac{4\cdot(-0.8) - 2\cdot(3.2)}{4\cdot(3.08) - 2^2} \approx -1.1539, \quad \text{και}$$

$$b = \frac{(3.08)\cdot(3.2) - (-0.8)\cdot 2}{4\cdot(3.08) - 2^2} \approx 1.3769,$$

δηλαδή το ζητούμενο πολυώνυμο του 1ου βαθμού - ευθεία γραμμή - (Σχ. 5.1.2 - 1) είναι

$$P(x) = -1.1539\, x + 1.3769.$$

■

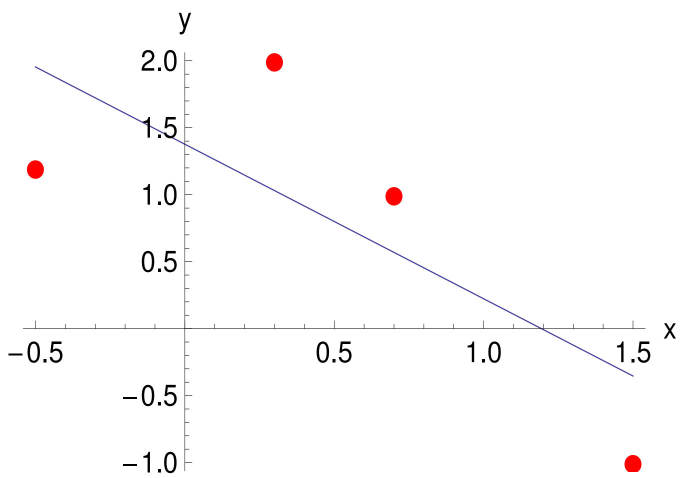
Παράδειγμα 5.1.2 - 2

Όμοια το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (x_i, y_i) του Πίνακα 5.1.3 - 1.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους (5.1.2−6) και τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.1.3 - 1 προκύπτει ότι

$$a = \frac{10\cdot 485.9487 - 56.2933\cdot 73.8373}{10\cdot 380.5423 - 56.2933^2} \approx 1.1044 \quad \text{και}$$

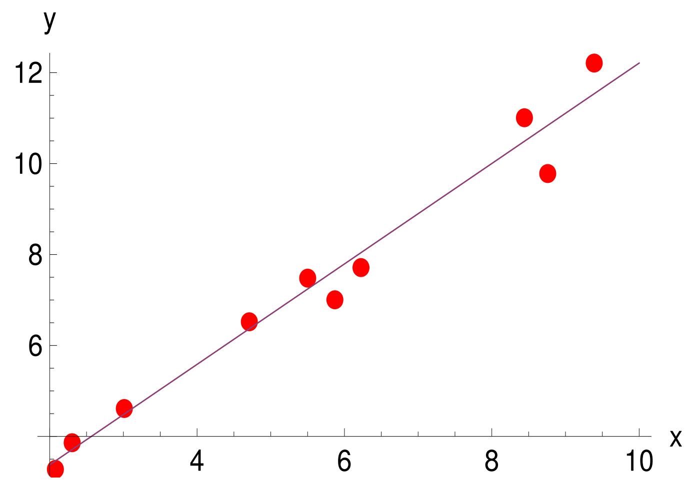
$$b = \frac{380.5423\cdot 73.8373 - 56.2933\cdot 485.9487}{10\cdot 380.5423 - 56.2933^2} \approx 1.1667.$$



Σχήμα 5.1.2 - 1: Παράδειγμα 5.1.2 - 1. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -1.1539\,x + 1.3769$

Πίνακας 5.1.2 - 2: Παράδειγμα 5.1.2 - 2

i	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
1	2.0774	3.3123	6.8810	4.3156
2	2.3049	3.8982	8.9850	5.3126
3	3.0125	4.6500	14.0081	9.0752
4	4.7092	6.5576	30.8810	22.1766
5	5.5016	7.5173	41.3572	30.2676
6	5.8704	7.0415	41.3364	34.4616
7	6.2248	7.7497	48.2403	38.7481
8	8.4431	11.0451	93.2549	71.2859
9	8.7594	9.8179	85.9989	76.7271
10	9.3900	12.2477	115.0059	88.1721
	56.2933	73.8373	485.9487	380.5423



Σχήμα 5.1.2 - 2: Παράδειγμα 5.1.2 - 2. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 1.1044\,x + 1.1667$

Άρα όμοια το ζητούμενο πολυώνυμο του 1ου βαθμού - ευθεία γραμμή - (Σχ. 5.1.2 - 2) είναι

$$P(x) = 1.1044\,x + 1.1667.$$

■

5.1.3 Πολυώνυμο m-βαθμού

Στην περίπτωση αυτή ζητείται η προσέγγιση του συνόλου S στην $(5.1.1 - 1)$, όπου

$$S = \{(x_i, y_i) \quad \text{με} \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\},$$

με ένα πολυώνυμο m-βαθμού της μορφής

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m.$$

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι στην περίπτωση αυτή για τον βαθμό m του πολυωνύμου πρέπει να ισχύει ότι

$$\mathbf{m} < \mathbf{n\text{ - }1}. \qquad (5.1.3\text{ - }1)$$

Ανάλογα με την περίπτωση του πολυωνύμου 1ου βαθμού της Παραγράφου 5.1.2 και στην περίπτωση αυτή οι $m+1$ σταθερές a_0, a_1, …, a_m εκλέγονται, έτσι ώστε το ολικό τετραγωνικό σφάλμα

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + \ldots + e_n^2 \\ &= \left[y_1 - P_m\left(x_1\right)\right]^2 + \ldots + \left[y_n - P_m\left(x_n\right)\right]^2 \end{aligned}$$

να είναι **ελάχιστο**.

Το παραπάνω σφάλμα E, όταν οι όροι του δεύτερου μέλους υψωθούν στο τετράγωνο, γράφεται

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} P_m\left(x_i\right) y_i + \sum_{i=1}^{n}\left[P_m\left(x_i\right)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j a_k\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k}\right), \end{aligned}$$

οπότε οι $m+1$ για την περίπτωση αυτή αναγκαίες συνθήκες $(5.1.2-3)$ γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m. \qquad (5.1.3 \text{ - } 2)$$

Από τις συνθήκες $(5.1.3-2)$ προκύπτει τότε ότι

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = 0,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{για κάθε} \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n,$$

από την οποία τελικά μετά τις πράξεις προκύπτει στην περίπτωση αυτή το παρακάτω γραμμικό σύστημα **κανονικών εξισώσεων**:

$$\begin{aligned}
a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^0+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^1+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^m &= \sum_{i=1}^{n}y_i\,x_i^0\\
a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^1+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n}y_i\,x_i^1\\
&\ \vdots \qquad\qquad (5.1.3 - 3)\\
a_0\sum_{i=1}^{n}x_i^m+a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^{n}y_i\,x_i^m.
\end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει $m+1$ εξισώσεις και $m+1$ αγνώστους τους συντελεστές $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ του πολυωνύμου $P_m(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$.

Παρατηρήσεις 5.1.3 - 1

i) Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων

$$\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n}x_i^0 & \sum_{i=1}^{n}x_i^1 & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^m\\
\sum_{i=1}^{n}x_i^1 & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\sum_{i=1}^{n}x_i^m & \sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1} & \ldots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{2m}
\end{bmatrix} \qquad (5.1.3 - 4)$$

είναι **συμμετρικός**. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική και περιορίζει τον αριθμό των πράξεων[4] που απαιτούνται για τη λύση του συστήματος $(5.1.3-3)$.

ii) Αποδεικνύεται ότι το σύστημα $(5.1.3-3)$ έχει ακριβώς μία λύση, όταν τα σημεία $x_i;\ i=1,2,\ldots,n$ είναι **διαφορετικά** μεταξύ τους.

[4] Βλέπε Μάθημα *Γραμμική Άλγεβρα - Μέθοδος Cholesky* και Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 8.

iii) Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να διευκρινιστεί ότι μια γενίκευση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή η προσέγγιση των σημείων S με ένα πολυώνυμο $P_m(x)$ με την απαίτηση το άθροισμα των σφαλμάτων $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^k$ με $k \geq 3$, να είναι ελάχιστο, καταλήγει μετά και την εφαρμογή της συνθήκης (5.1.3−2) σε μη γραμμικό σύστημα. Επομένως, η μέθοδος με την απαίτηση αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη.

Παράδειγμα 5.1.3 - 1

Να προσδιοριστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το πολυώνυμο 2ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του Παραδείγματος 5.1.2 - 1.
Λύση. Επειδή ο αριθμός των σημείων είναι $n = 4$, σύμφωνα με τη συνθήκη $(5.1.3-1)$ ο μεγαλύτερος δυνατός βαθμός m του πολυωνύμου θα είναι

$$m < 4 - 1, \quad \text{δηλαδή} \quad m = 2.$$

Έστω

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε το σύστημα $(5.1.3-3)$ γράφεται

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^0 & + & a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 & + & a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & = & \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^1 & + & a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & + & a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 & = & \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^1 \\
a_0 \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & + & a_1 \sum_{i=1}^{4} x_i^3 & + & a_2 \sum_{i=1}^{4} x_i^4 & = & \sum_{i=1}^{4} y_i\, x_i^2,
\end{array}$$

οπότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.1.3 - 1 έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr}
4a_0 & + & 2.0a_1 & + & 3.08a_2 & = & 3.2 \\
2.0a_0 & + & 3.08a_1 & + & 3.62a_2 & = & -0.8 \\
3.08a_0 & + & 3.62a_1 & + & 5.3732a_2 & = & -1.28.
\end{array}$$

Πίνακας 5.1.3 - 1: Παράδειγμα 5.1.2 - 2

x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2\,y_i$
-0.5	1.2	-0.6	0.25	-0.125	0.0625	0.30
0.3	2.0	0.6	0.09	0.027	0.0081	0.18
0.7	1.0	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.49
1.5	-1.0	-1.5	2.25	3.375	5.0625	-2.25
2.0	3.2	-0.8	3.08	3.62	5.3732	-1.28

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι το ζητούμενο πολυώνυμο είναι (Σχ. 5.1.3 - 1)

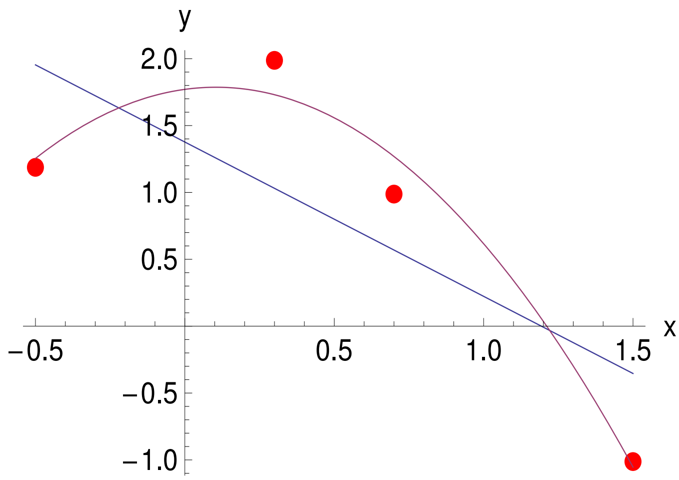
$$P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707.$$

Τότε το σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$E = \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - P_2\left(x_i\right)\right]^2 \approx 2.76E - 04,$$

που είναι και το ελάχιστο που προκύπτει από προσέγγιση με πολυώνυμο 2ου βαθμού για τα παραπάνω δεδομένα.

■



Σχήμα 5.1.3 - 1: Παράδειγμα 5.1.2 - 2. Η καμπύλη ορίζεται από το πολυώνυμο $P_2(x) = -1.4583\,x^2 + 0.3045\,x + 1.7707$, ενώ η ευθεία (Παράδειγμα 5.1.2 - 1) έχει εξίσωση $y = -1.1539\,x + 1.3769$

Ασκήσεις

1. Έστω τα δεδομένα:

x_i	0.500	0.150	0.250	0.400	0.550	0.700
y_i	1.235	1.750	2.020	-1.550	-2.345	0.435

Με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να υπολογιστούν:

i) το πολυώνυμο 1ου, αντίστοιχα 2ου βαθμού που τα προσεγγίζει και να γίνει η γραφική τους παράσταση,

ii) το αντίστοιχο σε κάθε περίπτωση σφάλμα της προσέγγισης.

2. Όμοια τα δεδομένα

x_i	0.3	0.5	0.7	1.4	1.8	2.2	3.5
y_i	0.0647	0.0985	0.2490	1.0395	1.5393	3.5941	4.0549

Απαντήσεις

1. (i) $P_1(x) = 2.086\,564 - 4.303\,681x$, (ii) $P_2(x) = 5.321\,234 - 23.546\,340x + 23.037\,480x^2$.

2. (i) $P_1(x) = -0.564\,6827 + 1.403\,152x$, (ii) $P_2(x) = -0.712\,560 + 1.654\,234x - 0.068\,171x^2$.

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0–471–50023–2.

[6] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Conte, S. D. & de Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill Inc (3rd ed.). ISBN 978–0–07–012447–9.

[8] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–209–961–2.

[9] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.

[10] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*. Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.

[11] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer (3rd ed.). ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/