Μάθημα 9

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

9.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στην παράγραφο αυτή θα ταξινομηθούν οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους 2ης τάξης και θα γίνει μια υπενθύμιση των τύπων προσέγγισης των παραγώγων.

9.1.1 Ταξινόμηση εξισώσεων 2ης τάξης

Ορισμός 9.1.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης (ΜΔΕ) 2ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, έστω x και t, είναι*

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+c\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e, \tag{9.1.1 - 1}$$

όπου $u=u(x,t)$ μια επαρκώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και a, b, c, e είναι συναρτήσεις των x, t, u, $\partial u/\partial x$ και $\partial u/\partial t$, αλλά όχι των 2ης τάξης παραγώγων τους.

Αν

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}\,,\quad q=\frac{\partial u}{\partial t}\,,\quad r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\quad s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\quad \text{και}\quad w=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,$$

τότε η $(9.1.1-1)$ γράφεται

$$ar+bs+cw=e. \tag{9.1.1 - 2}$$

Υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις u, p και q είναι γνωστές σε κάθε σημείο (x,t) μίας λείας καμπύλης του επιπέδου, οι τιμές των θα πρέπει να επαληθεύουν τη σχέση που εκφράζει το ολικό διαφορικό της u, δηλαδή την

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial t}\,dt=p\,dx+q\,d\,t. \tag{9.1.1 - 3}$$

΄Ομοια οι p και q τις σχέσεις

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}\,dx+\frac{\partial p}{\partial t}\,dt=r\,dx+s\,d\,t,\quad \text{και} \tag{9.1.1 - 4}$$

$$dq=\frac{\partial q}{\partial x}\,dx+\frac{\partial q}{\partial t}\,dt=s\,dx+w\,d\,t. \tag{9.1.1 - 5}$$

Οι εξισώσεις $(9.1.1-3)$ - $(9.1.1-5)$ ορίζουν ένα σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους r, s και w. Το σύστημα αυτό δεν θα έχει μία ακριβώς λύση σε κάθε σημείο (x,t), όταν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν, δηλαδή όταν

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ dx & d\,t & 0\\ 0 & dx & d\,t \end{vmatrix}=0. \tag{9.1.1 - 6}$$

Από την (9.1.1 − 6) προκύπτει η εξίσωση

$$a\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{dt}{dx}\right) + c = 0. \qquad (9.1.1 - 7)$$

Έστω $D = b^2 - 4ac$ η διακρίνουσα της (9.1.1 − 7). Τότε η (9.1.1 − 7), αν

- $D > 0$, λέγεται ότι ορίζει μια **υπερβολική**,
- $D = 0$, μια **παραβολική**, και
- $D < 0$, μια **ελλειπτική** εξίσωση.

Στη συνέχεια του μαθήματος θα εξεταστούν μόνον ορισμένες χαρακτηριστικές μορφές μονοδιάστατων παραβολικών εξισώσεων.[1]

9.1.2 Τύποι πεπερασμένων διαφορών

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα *Προσέγγιση Παραγώγων* τύπος (6.1.2 − 2) ότι ο τύπος του Taylor για συνάρτηση μιας μεταβλητής, έστω $f(x)$, γράφεται

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{1!}\,f'(x) + \frac{h^2}{2!}\,f'(x) + \ldots + \frac{h^\nu}{\nu!}\,f^{(\nu)}(x),$$

όταν $h > 0$ η αύξηση της μεταβλητής x.

Επομένως για τη συνάρτηση $u = u(x,t)$ με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου D είναι ένα κλειστό διάστημα στο οποίο η u είναι συνεχής και έχει παραγώγους μέχρι και ν-τάξη συνεχείς συναρτήσεις, ανάλογα θα ισχύουν

$$\begin{aligned} u(x+h,t) &\approx u(x,t) + \frac{h}{1!}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \end{aligned} \qquad (9.1.2 - 1)$$

όταν $h > 0$ η αύξηση της μεταβλητής x του διαστήματος, ενώ, όταν η μεταβλητή συμβολίζει τον χρόνο t και $\ell > 0$ η αύξησή της

$$\begin{aligned} u(x,t+\ell) &= u(x,t) + \frac{\ell}{1!}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\ell^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\quad + \ldots + \frac{\ell^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial t^n}. \end{aligned} \qquad (9.1.2 - 2)$$

[1] Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [5, 6, 7].

Με συλλογισμούς ανάλογους του Μαθήματος *Προσέγγιση Παραγώγων* προκύπτουν τότε οι παρακάτω προσεγγίσεις της μερικής παραγώγου $u_x = \partial u/\partial x$:

- $$u_x \approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \qquad (9.1.2 - 3)$$

  που ορίζει την προς τα **εμπρός προσέγγιση** (forward-difference formula),

- $$u_x \approx \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} \qquad (9.1.2 - 4)$$

  την **ανάδρομη προσέγγιση** (backward-difference formula), και

- $$u_x \approx \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} \qquad (9.1.2 - 5)$$

  την **κεντρική προσέγγιση** (central-difference formula).

Επίσης αποδεικνύεται ότι

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \qquad (9.1.2 - 6)$$

που ορίζει την **κεντρική προσέγγιση** της u_{xx}.

9.2 Εξίσωση διάδοσης θερμότητας

9.2.1 Ορισμός και μορφή συστήματος λύσης

Ορισμός 9.2.1 - 1. *Η εξίσωση διάδοσης θερμότητας σε μία διάσταση ορίζεται ως εξής:*[2]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \textit{όπου} \quad a < x < b \quad \textit{και} \quad t > 0, \qquad (9.2.1 - 1)$$

όταν α θετική σταθερά και $u(x,t)$ μια επαρκώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

[2]Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation*

Παρατηρήσεις 9.2.1 - 1

- Η μεταβλητή t συμβολίζει τον χρόνο και η x το διάστημα.
- Στη Φυσική η συνάρτηση u περιγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασίας.
- Ο α είναι ο συντελεστής **θερμικής διάχυσης** (thermal diffusivity) και στο εξής θα θεωρείται ότι είναι $\alpha = 1$.

Η εξίσωση θερμότητας είναι θεμελιώδους σημασίας σε διάφορους τομείς των θετικών επιστημών όπως στα Μαθηματικά ως το πρότυπο της λύσης παραβολικών ΜΔΕ, στη Θεωρία Πιθανοτήτων, στα Οικονομικά Μαθηματικά κ.λπ.

Για την προσεγγιστική λύση της $(9.2.1-1)$ θεωρούνται οι παρακάτω **συνοριακές συνθήκες** (boundary conditions)[3]

$$u\,(a,t) = u\,(b,t) = 0, \quad \text{όπου} \quad t > 0, \tag{9.2.1 - 2}$$

ενώ ως **αρχική συνθήκη** (initial condition) η

$$u(x,0) = u_0(x) = g(x) \quad \text{όπου} \quad a \le x \le b, \tag{9.2.1 - 3}$$

όταν $g(x)$ είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση του x, που συνήθως συμπίπτει με τη θεωρητική λύση, όταν $t = 0$.

Παρατήρηση 9.2.1 - 1

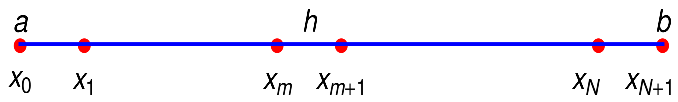
Δεν είναι πάντοτε γνωστό αν $u_0\,(a) = 0$ ή $u_0\,(b) = 0$, που σημαίνει ότι είναι δυνατό να υπάρχουν ασυνέχειες μεταξύ αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Διαμέριση

Η λύση της $(9.2.1-1)$ προσεγγίζεται, όταν το διάστημα

- $[a,b]$ της μεταβλητής x υποδιαιρείται σε $N{+}1$ ίσα υποδιαστήματα πλάτους h (Σχ. 9.2.1 - 1), ενώ το

[3] Για συνοριακές συνθήκες βλέπε Μάθημα *Προσέγγιση Παραγώγων - Συνοριακές συνθήκες*.



Σχήμα 9.2.1 - 1: Η διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$: τα **συνοριακά** σημεία $x_0 = a$, $x_{N+1} = b$ και τα **εσωτερικά** σημεία $x_1, \ldots, x_N$ όπου υπολογίζεται η λύση της $(9.2.1 - 1)$

- $[0, T]$ της t, όταν $t = T$ συμβολίζει[4] την τελική χρονική στιγμή λύσης της $(9.2.1 - 1)$, σε υποδιαστήματα πλάτους ℓ.

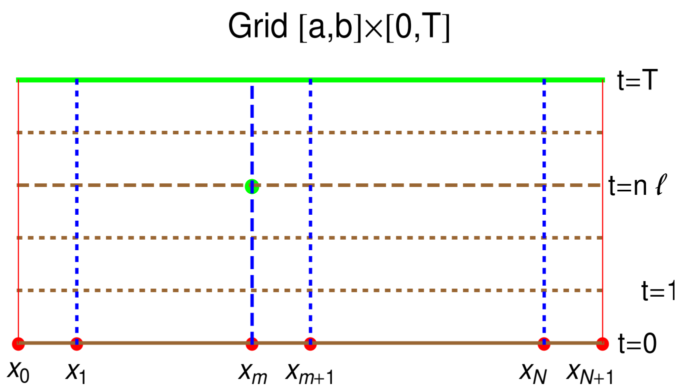
Τότε η ανοικτή περιοχή $\Omega = (a, b) \times (0, T]$ με το σύνορό της $\partial\Omega$, που αποτελείται από τον άξονα $t = 0$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$, καλύπτεται από ένα ορθογώνιο σύστημα σημείων (grid), έστω G (Σχ. 9.2.1 - 2), τα οποία έχουν συντεταγμένες $x_m = a + mh$, όταν $m = 0, 1, \ldots, N + 1$ και $t_n = n\ell$ όταν $n = 0, 1, \ldots$.

Συμβολισμός λύσεων

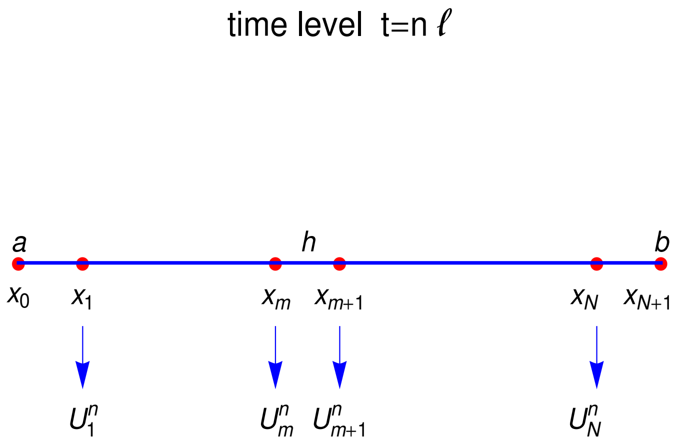
Στα επόμενα

- η θεωρητική λύση $u(x_m, t_n)$ στο σημείο (x_m, t_n) θα συμβολίζεται με u_m^n, και
- η αριθμητική λύση με U_m^n (Σχ. 9.2.1 - 3).

[4] Βλέπε αντίστοιχη χρονική στιγμή $t_N = b$ στο Μάθημα *Αριθμητική λύση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων - Διαδικασία υπολογισμού αριθμητικής λύσης*.



Σχήμα 9.2.1 - 2: Τα σημεία (mesh) της διαμέρισης (grid) G του διαστήματος $[a,b]$ και του χρόνου $[0,T]$. Το σύνορο $\partial\Omega$ ορίζεται από την ευθεία $t=0$ (καφέ) και τις $x=a,\, b$ (κόκκινες) ευθείες. Το (x_m,t_n) απεικονίζεται στο πράσινο σημείο, ενώ η τελική χρονική στιγμή λύσης της $(9.2.1-1)$ από την πράσινη ευθεία $t=T$



Σχήμα 9.2.1 - 3: Συμβολισμός των λύσεων: στα **συνοριακά** σημεία $x_0=a$ και $x_{N+1}=b$ λόγω της $(9.2.1-2)$ είναι $U_0^n=U_{N+1}^n=0$. Η προσεγγιστική λύση $U_1^n,\, U_2^n\, \ldots, U_N^n$ της $(9.2.1-1)$ υπολογίζεται στα **εσωτερικά** σημεία $x_1,\, \ldots,\, x_N$

Σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό, σε δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_n = n\ell$, η θεωρητική λύση $u\left(x, t_n\right)$ της $(9.2.1-1)$ στα σημεία $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_N$ θα είναι

$$u\left(x_1, t_n\right), \quad u\left(x_2, t_n\right), \ldots, \quad u\left(x_N, t_n\right)$$

που θα συμβολίζεται με

$$u_1^n, \quad u_2^n, \ldots, \quad u_N^n$$

και θα προσεγγίζεται από τις τιμές

$$U_1^n, \quad U_2^n, \ldots, \quad U_N^n.$$

Τότε οι προσεγγίσεις αυτές είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος, έστω $\mathbf{U}^n$, όπου

$$\mathbf{U}^n = \left[U_1^n, U_2^n \ \ldots, U_N^n\right]^\top . \qquad (9.2.1 - 4)$$

Το διάνυσμα αυτό θα λέγεται στο εξής και **διάνυσμα λύσεων** της $(9.2.1-1)$.

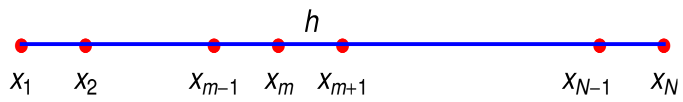
9.2.2 Προσεγγιστικές λύσεις

Μέθοδος του Taylor

Για την προσεγγιστική λύση της εξίσωσης $(9.2.1-1)$ πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή $t = \ell,\, 2\ell,\, \ldots$ η μερική παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x να αντικατασταθεί σε καθένα από τα N εσωτερικά σημεία (Σχ. 9.2.2 - 1) της διαμέρισης G.[5] Η προσέγγιση αυτή θα προκύψει από τον γνωστό τύπο $(9.1.2-6)$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

[5] Σύμφωνα με την Παράγραφο 9.2.1 και τις συνοριακές συνθήκες $(9.2.1-2)$ - συνθήκες Dirichlet - η αντικατάσταση της μερικής παραγώγου ως προς x στα συνοριακά σημεία $x_0 = a$, αντίστοιχα $x_{N+1} = b$ απαιτεί να είναι γνωστές οι τιμές της λύσης στα σημεία $x_{-1} = a - h$, αντίστοιχα $x_{N+2} = b + h$. Οι τιμές όμως αυτές δεν είναι γνωστές στο συγκεκριμένο πρόβλημα.



Σχήμα 9.2.2 - 1: Εξίσωση θερμότητας: υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης στα **εσωτερικά** σημεία $x_1, \ldots, x_N$ σε επίπεδο χρόνου $t = n\ell$

θεωρώντας ότι για τη χρονική στιγμή t είναι $t = t_n = n\ell$ και εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο σε καθένα εσωτερικό σημείο, δηλαδή

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,\, x=x_m} &\approx \frac{u\left(x_m + h, t_n\right) - 2u\left(x_m, t_n\right) + u\left(x_m - h, t_n\right)}{h^2} \\ &= \frac{u\left(x_{m+1}, t_n\right) - 2u\left(x_m, t_n\right) + u\left(x_{m-1}, t_n\right)}{h^2},\end{aligned}$$

όταν $m = 1, 2, \ldots, N$. Επομένως έχοντας υπόψη και με τους συμβολισμούς της Παραγράφου 9.2.1 προκύπτει ότι

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,\, x=x_m} \approx \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2}\,. \tag{9.2.2 - 1}$$

Άρα η $(9.2.1-1)$ σύμφωνα με την $(9.2.2-1)$, όταν εφαρμοστεί σε καθένα εσωτερικό σημείο $x_1, \ldots, x_N$ (Σχ. 9.2.1 - 3), ορίζει το παρακάτω σύστημα

N διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

$$\begin{aligned}
\frac{dU_1^n}{dt} &= \frac{U_0^n - 2U_1^n + U_2^n}{h^2}, \\
\frac{dU_m^n}{dt} &= \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad \text{για } m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\
\frac{dU_N^n}{dt} &= \frac{U_{N-1}^n - 2U_N^n + U_{N+1}^n}{h^2}
\end{aligned}$$

το οποίο, επειδή σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες $(9.2.1-2)$ είναι $U_0^n = 0$ και $U_{N+1}^n = 0$, τελικά γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{dU_1^n}{dt} &= \frac{-2U_1^n + U_2^n}{h^2}, \\
\frac{dU_m^n}{dt} &= \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad \text{για } m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\
\frac{dU_N^n}{dt} &= \frac{U_{N-1}^n - 2U_N^n}{h^2}.
\end{aligned} \tag{9.2.2 - 2}$$

Το σύστημα $(9.2.2-2)$, όταν χρησιμοποιηθεί το διάνυσμα των λύσεων $(9.2.1-4)$, γράφεται με χρήση πινάκων σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\mathbf{U}(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{g}, \tag{9.2.2 - 3}$$

όπου ο A είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A = h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{9.2.2 - 4}$$

και

$$\mathbf{g} = \mathbf{U}^0 = \left[U_1^0, U_2^0, \ldots, U_N^0\right]^\top$$

το διάνυσμα των **αρχικών τιμών** της προσεγγιστικής λύσης, που προκύπτει από την αρχική συνθήκη $(9.2.1-3)$.[6]

[6]Βλέπε αντίστοιχη αρχική $y_0 = y(a) = y(t_0)$ στο Μάθημα *Αριθμητική λύση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων*, αλλά και ανάλογες αρχικές τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στα Μαθήματα *Αριθμητική λύση εξισώσεων* και *Αριθμητική λύση συστημάτων*.

Έστω

$$D = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \qquad (9.2.2 - 5)$$

ένας διαγώνιος πίνακας τάξης N που συμβολίζει τον διαφορικό τελεστή 1ης τάξης για το σύστημα (9.2.2−3). Τότε το σύστημα (9.2.2−3) τελικά γράφεται

$$D\,\mathbf{U}(t) = A\mathbf{U}(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{g}. \qquad (9.2.2 - 6)$$

Παρατηρήσεις 9.2.2 - 1

i) Το σύστημα $(9.2.2 - 6)$ έχει ανάλογη μορφή με το πρόβλημα αρχικής τιμής $(9.1.1 - 3)$ του Μαθήματος 9.

ii) Η παραπάνω μέθοδος προσδιορισμού της λύσης είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των ευθειών** (method of lines ή MOL ή NMOL).[7] Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η λύση του προβλήματος προσεγγίζεται σε κάθε χρονική στιγμή t - ευθείες $t = \ell,\ 2\ell,\ \ldots$ (Σχ. 9.2.1 - 2) και τελικά η προσεγγιστική λύση δίνεται με τη μορφή ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων ανάλογου της μορφής $(9.2.2 - 6)$, όπου η τάξη του συστήματος εξαρτάται από την τάξη των μερικών παραγώγων ως προς t.

iii) Διευκρινίζεται ότι στην (9.2.2−2), εφόσον η μεταβλητή x αντικαθίσταται από τις τιμές x_m; $m = 1, \ldots, N$, η U είναι συνάρτηση του t, οπότε η παραγώγιση θα συμβολίζεται με $\frac{dU}{dt}$ αντί της $\frac{\partial U}{\partial t}$.

Από το σύστημα $(9.2.2 - 6)$ προκύπτει τότε ότι

$$D = A \qquad (9.2.2 - 7)$$

που ορίζει και την προσέγγιση του τελεστή D για το πρόβλημα $(9.2.1 - 1)$ - $(9.2.1 - 3)$. Η έκφραση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια του μαθήματος.

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_lines.

Από το ανάπτυγμα της $\mathbf{U}(t+\ell)$ κατά Taylor

$$U(t+\ell) \approx U(t) + \frac{\ell}{1\,!}\,DU(t) + \frac{\ell^2}{2\,!}\,D^2U(t) + \ldots + \frac{\ell^\nu}{\nu\,!}\,D^\nu U(t), \qquad (9.2.2\text{ - }8)$$

αν παραλειφθούν οι όροι $\mathcal{O}\left(\ell^2\right)$, έχουμε

$$\mathbf{U}(t+\ell) = \mathbf{U}(t) + \ell\, D\,\mathbf{U}(t)$$

που σύμφωνα με την $(9.2.2-7)$ γράφεται

$$\mathbf{U}(t+\ell) = \mathbf{U}(t) + \ell\, A\,\mathbf{U}(t),$$

δηλαδή

$$\mathbf{U}(t+\ell) = (\mathrm{I} + \ell A)\mathbf{U}(t), \qquad (9.2.2\text{ - }9)$$

όταν I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης N.

Έστω

$$p = \frac{\ell}{h^2}\,.$$

Τότε για τη λύση του προβλήματος $(9.2.1-1)$ - $(9.2.1-3)$ από την $(9.2.2-9)$ προκύπτει η παρακάτω **αναλυτική** (explicit) μέθοδος των 4 σημείων:

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & & & \\ p & 1-2p & p & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p & 1-2p & p \\ & & & p & 1-2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ U_N^{n} \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$\left\|\begin{array}{lcl} U_1^{n+1} & = & (1-2p)U_1^n + p\,U_2^n, \\ & & \\ U_m^{n+1} & = & (1-2p)U_m^n + p\left(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n\right) \\ & & \text{για} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\ & & \\ U_N^{n+1} & = & p\,U_{N-1}^n + (1-2p)U_N^n. \end{array}\right. \qquad (9.2.2\text{ - }10)$$

Παρατήρηση 9.2.2 - 1

[8]Αποδεικνύεται ότι για τη λύση του προβλήματος $(9.2.1-1)$ - $(9.2.1-3)$ με τη μέθοδο αυτή απαιτείται να ισχύει η συνθήκη

$$\ell \leq \frac{1}{2}\,h^2. \tag{9.2.2 - 11}$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι το βήμα του χρόνου ℓ που χρησιμοποιείται πρέπει να είναι πολύ μικρό. Επομένως η μέθοδος αυτή, αν και απλή σαν αναλυτική, απαιτεί έναν μεγάλο αριθμό πράξεων για τον υπολογισμό της λύσης τη χρονική στιγμή $t = T$.

Μέθοδος των Crank - Nicolson

Οι [9,10]Crack-Nicolson (1947) πρότειναν μια μέθοδο, που περιορίζει τον αριθμό των υπολογισμών και είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος τιμών των h και ℓ, ακριβέστερα όπως αποδεικνύεται του λόγου

$$r = \frac{\ell}{h}\,.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των Crank-Nicolson η εξίσωση $(9.2.1-1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

προσεγγίζεται στην

ενδιάμεση των $\quad t = n\ell \quad$ και $\quad t = (n+1)\ell \quad$ χρονική στιγμή,

δηλαδή την

$$t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ell,$$

ενώ η

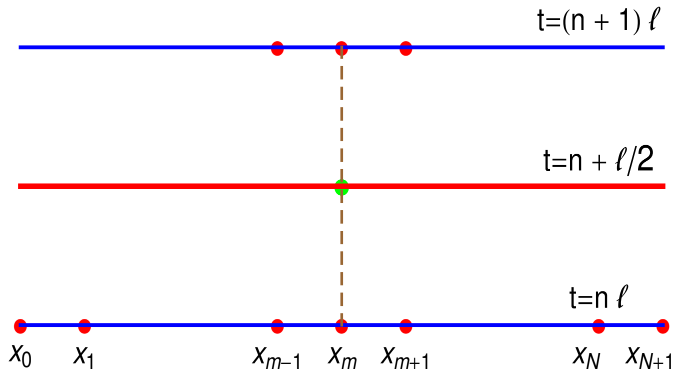
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

---

[8]Βλέπε Twizell [6, 7].

[9]John Crank (1916-2006): Άγγλος μαθηματικός, γνωστός κυρίως για την ομώνυμη μέθοδο.

[10]Phyllis Nicolson (1917-1968): Αγγλίδα μαθηματικός, γνωστή για την ομώνυμη μέθοδο με τον Crank.



Σχήμα 9.2.2 - 2: Μέθοδος των Crank-Nicolson

προσεγγίζεται από τον **μέσο όρο** των τιμών της στις χρονικές στιγμές

$$t=(n+1)\ell \quad \text{και} \quad t=n\ell \quad (\Sigma\chi.\ 9.2.2-2).$$

Άρα

$$\frac{\partial U_m^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U_m^{n+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_m^{n}}{\partial x^2}\right). \tag{9.2.2 - 12}$$

Επειδή σύμφωνα με την $(9.1.2-5)$ είναι

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\approx\frac{u(x,t+\ell)-u(x,t-\ell)}{2\ell},$$

η εφαρμογή της στην $(9.2.2-12)$ για $t+\ell/2$ δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\partial u\left(x,t+\frac{\ell}{2}\right)}{\partial t} &\approx \frac{u\left[x,\left(t+\frac{\ell}{2}\right)+\frac{\ell}{2}\right]-u\left[x,\left(t+\frac{\ell}{2}\right)-\frac{\ell}{2}\right]}{2\,\frac{\ell}{2}}\\ &= \frac{u(x,t+\ell)-u(x,t)}{\ell}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial U_m^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t}=\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n}}{\ell}. \tag{9.2.2 - 13}$$

Είναι ήδη γνωστό από την $(9.2.2-1)$ ότι

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,\, x=x_m} \approx \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2}\,. \qquad (9.2.2 - 14)$$

Η $(9.2.2-14)$, όταν εφαρμοστεί για τη χρονική στιγμή $t=(n+1)\ell$, δίνει την προσέγγιση

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_{n+1},\, x=x_m} \approx \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2}\,. \qquad (9.2.2 - 15)$$

Άρα τελικά η $(9.2.2-12)$ σύμφωνα με τις $(9.2.2-14)$, $(9.2.2-15)$ και $(9.2.2-13)$ γράφεται

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right),$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} \quad &- \quad \frac{1}{2}p\left(U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right) = U_m^n \\ &+ \quad \frac{1}{2}p\left(U_{m+1}^{n} - 2U_m^{n} + U_{m-1}^{n}\right), \qquad (9.2.2 - 16) \end{aligned}$$

όπου επίσης είναι $p=\ell/h^2$.

Η $(9.2.2-15)$, όταν εφαρμοστεί σε καθένα εσωτερικό σημείο $x_1, \ldots, x_N$ (Σχ. 9.2.1 - 3) της διαμέρισης G, έχοντας υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες $(9.2.1-2)$, ορίζει την παρακάτω **πεπλεγμένη** μέθοδο των 6 σημείων:

$$\left\|\begin{array}{l} (1+p)U_1^{n+1} - \frac{1}{2}p\,U_2^{n+1} = (1-p)U_1^n + \frac{1}{2}p\,U_2^n, \\[2mm] (1+p)U_m^{n+1} - \frac{1}{2}p\left(U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}\right) \\[2mm] = (1-p)U_m^n + \frac{1}{2}p\left(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n\right) \\[2mm] \text{για} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\[2mm] -\frac{1}{2}p\,U_{N-1}^{n+1} + (1+p)U_N^{n+1} = \frac{1}{2}p\,U_{N-1}^n + (1-p)U_N^n. \end{array}\right. \qquad (9.2.2 - 17)$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος των Crank-Nicolson**,[11] και λόγω της ακρίβειας (accuracy) των αποτελεσμάτων της είναι μια από τις περισσότερο χρησιμοποιούμενες μεθόδους στη λύση πολλών άλλων μορφών των ΜΔΕ.

Η μέθοδος γράφεται επίσης με χρήση πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1+p & -\frac{p}{2} & & & \\ -\frac{p}{2} & 1+p & -\frac{p}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{p}{2} & 1+p & -\frac{p}{2} \\ & & & -\frac{p}{2} & 1+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & & & \\ \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} \\ & & & \frac{p}{2} & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ U_N^{n} \end{bmatrix},$$

ή τελικά ως

$$\left(I - \frac{1}{2}\ell A\right) \mathbf{U}(t+\ell) = \left(I + \frac{1}{2}\ell A\right) \mathbf{U}(t), \qquad (9.2.2 - 18)$$

όταν ο πίνακας A δίνεται από την $(9.2.2 - 4)$.

Παρατηρήσεις 9.2.2 - 2

- Ο προσδιορισμός του $\mathbf{U}(t+\ell)$ στην $(9.2.2 - 18)$ απαιτεί τη λύση ενός συστήματος, όπου ο πίνακας των αγνώστων $\left(I - \frac{1}{2}\ell A\right)$ είναι τριδιαγώνιος.

- Πολλές φορές για τον περιορισμό των πράξεων χρησιμοποιείται ο παρακάτω τρόπος υπολογισμού της λύσης $\mathbf{U}(t+\ell)$:

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}\ell A\right) \mathbf{U}^* &= 2\,\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{U}(t+\ell) &= \mathbf{U}^* - \mathbf{U}(t). \end{aligned}$$

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-nicholson_method*

Ο υπολογισμός αυτός απαιτεί τη χρήση ενός βοηθητικού διανύσματος $\mathbf{U}^*$, αλλά έχει $3N-2$ λιγότερες πράξεις από την απευθείας λύση του συστήματος $(9.2.2-18)$.

- Σύμφωνα με όσα έχουν γραφεί στην εισαγωγή, η μέθοδος είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος τιμών του λόγου $r = \ell/h$. Έχει αποδειχθεί[12] ότι για να υπάρχει μια λεία συμπεριφορά της λύσηw πλησίον των συνοριακών τιμών $x = a$, b, πρέπει να ισχύει
$$r = \frac{\ell}{h} < \frac{k}{\pi},$$
όταν k κατάλληλη σταθερά.

Παράδειγμα 9.2.2 - 1

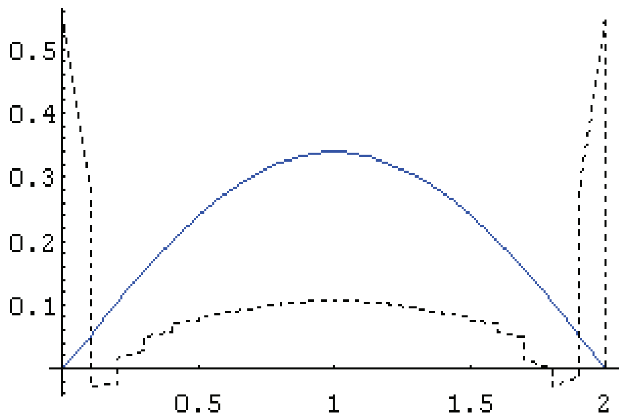
Η μέθοδος των Crank-Nicolson εξετάστηκε στο πρόβλημα
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{όπου } 0 < x < 2 \text{ και } t > 0 \tag{9.2.2 - 19}$$
με συνοριακές συνθήκες
$$u\,(0,t) = u\,(2,t) = 0, \quad \text{όταν} \quad t > 0 \tag{9.2.2 - 20}$$
αρχική συνθήκη
$$u(x,0) = 1, \quad \text{όταν} \quad 0 \le x \le 2 \tag{9.2.2 - 21}$$
και θεωρητική λύση
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[1-(-1)^k\right] \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{1}{2}k\pi x\right) \exp\left(-\frac{1}{4}k^2\pi^2 t\right). \tag{9.2.2 - 22}$$
Τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές των h και ℓ σε χρόνο $t = 1$ και με μέτρο μέτρησης των σφαλμάτων το
$$\|u_m^n - U_m^n\|_\infty = \max_{m=1,2,\ldots,N} |u_m^n - U_m^n|$$
δίνονται στον Πίνακα 9.2.2 - 1, ενώ η γραφική παράσταση της θεωρητικής και της προσεγγιστικής λύσης στο Σχ. 9.2.2 - 3, όπου άμεσα προκύπτει ότι το μέγιστο σφάλμα της μεθόδου είναι πλησίον των άκρων του διαστήματος $[0, 2]$.

---

[12] Lawson, J. D. and Morris, J. LI. (1978). The extrapolation of first order methods for parabolic partial differential equations. I. *SIAM J. Numer. Anal. 15(6)*. pp. 1212–1224.

Πίνακας 9.2.2 - 1: Παράδειγμα 9.2.2 - 1

Μέθοδος	ℓ	h	$e = \|u_m^n - U_m^n\|_\infty$
	0.1	0.1	0.56E-01
		0.025	0.55E+00
	0.01	0.1	0.31E-03
		0.025	0.67E-04



Σχήμα 9.2.2 - 3: Μέθοδος των Crank-Nickolson. Η διακεκομμένη καμπύλη δείχνει την αριθμητική και η συνεχής τη θεωρητική λύση του Παραδείγματος 9.2.2 - 1

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το Παράδειγμα 9.2.2 - 1 με τη μέθοδο $(9.2.2-10)$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα του Πίνακα 9.2.2 - 1.
2. Παραλείποντας τους όρους $\mathcal{O}\left(\ell^3\right)$ στο ανάπτυγμα κατά Taylor της $\mathbf{U}(t+\ell)$ δείξτε ότι ορίζεται η παρακάτω μέθοδος λύσης της $(9.2.1-1)$

$$\mathbf{U}(t+\ell)=\left(I+\ell A+\frac{\ell^2 A^2}{2}\right)\mathbf{U}(t),$$

όταν ο πίνακας A δίνεται από την $(9.2.2-4)$ και I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης N.

Εφαρμόστε τη μέθοδο αυτή στη λύση του Παραδείγματος 9.2.2 - 1 και συγκρίνατε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα του Πίνακα 9.2.2 - 1.
3. Η γραμμική μορφή της εξίσωσης **διάχυσης-μεταφοράς** (diffusion-convection) σε μία διάσταση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{όπου } 0<x<X \text{ και } t>0, \tag{9.2.2 - 23}$$

όπου $\mu>0$ είναι η **παράμετρος μεταφοράς** (convection parameter).

Η **αρχική συνθήκη** του προβλήματος είναι

$$u(x,0)=g(x) \quad \text{με} \quad 0<x<X \tag{9.2.2 - 24}$$

και οι **συνοριακές συνθήκες**

$$u(0,t) = v(t) \quad \text{με } t>0 \tag{9.2.2 - 25}$$

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{με } t>0. \tag{9.2.2 - 26}$$

i) Με κατάλληλη διαμέριση του διαστήματος $[0,X]$ δείξτε ότι, όταν η εξίσωση $(9.2.2-23)$ με τις προσεγγίσεις $(9.1.2-5)$, $(9.1.2-6)$ και τις συνοριακές συνθήκες $(9.2.2-25)$, $(9.2.2-26)$ - δηλαδή $U_{N+1}^n=U_{N-1}^n$ - εφαρμοστεί στα N εσωτερικά σημεία της διαμέρισης σε επίπεδο χρόνου $t=n\ell$ όπου $n=1,2,\ldots$, προκύπτει το παρακάτω σύστημα των N

διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
\frac{dU_1}{dt} &= -\frac{2}{h^2}U_1^n + \frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{2}\mu h\right)U_2^n + \frac{1}{h^2}\left(1+\frac{1}{2}\mu h\right)v_t, \\
\frac{dU_m^n}{dt} &= \frac{1}{h^2}\left(1+\frac{1}{2}\mu h\right)U_{m-1}^n - \frac{2}{h^2}U_2^n + \frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{2}\mu h\right)U_{m+1}^n \\
&\quad \text{για} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\
\frac{dU_N^n}{dt} &= \frac{2\left(U_{N-1}^n - U_N^n\right)}{h^2}
\end{aligned}$$

που γράφεται επίσης σε διανυσματική μορφή ως

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\,\mathbf{U}(t) + \mathbf{b} \quad \text{με} \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{g}, \qquad (9.2.2 - 27)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix}
-2 & 1-\frac{1}{2}\mu h & & & \\
1+\frac{1}{2}\mu h & -2 & 1-\frac{1}{2}\mu h & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 1+\frac{1}{2}\mu h & -2 & 1-\frac{1}{2}\mu h \\
 & & & 2 & -2
\end{bmatrix}$$

και $\mathbf{b} = h^{-2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\mu h\right)U_t(n\ell), 0, \ldots, 0\right]^\top$. Δώστε τη μορφή της μεθόδου $(9.2.2-10)$ για την περίπτωση αυτή.

ii) Ποια είναι η μορφή της μεθόδου των Crank-Nicolson για τη λύση του προβλήματος $(9.2.2-23)$ με συνοριακές συνθήκες $(9.2.2-25)$ και $(9.2.2-26)$;

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis.* Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[3] Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1996). Matrix Computations. Baltimore: Johns Hopkins (3rd ed.). ISBN 978–0–8018–5414–9.

[4] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction.* Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.

[5] Smith, G. D. (1986). *Numerical Solution of Partial-Differential Equations: Finite Difference Methods.* Oxford: Oxford University Press (3rd ed.). ISBN 978–0–19–859650–9.

[6] Twizell, E.H. (1984). *Computational Methods for Partial Differential Equations.* Chichester: Ellis Horwood. ISBN 978–085–312–383–5.

[7] Twizell, E. H. (1988). *Numerical Methods with Applications in the Biomedical Sciences.* Chichester: Ellis Horwood. ISBN 978–0–7458–0027–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/

Παράρτημα Α

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Α.1 Εισαγωγή

[1]

Α.1.1 Ορισμός ακολουθίας

Ορισμός 1.1.1 - 1. *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{E} : \nu \longrightarrow a(\nu), \qquad (1.1.1 - 1)$$

όπου $\mathbb{N}$ *το σύνολο των φυσικών αριθμών και* Ε *ένα μη κενό σύνολο λέγεται* **ακολουθία** *στοιχείων του συνόλου* Ε.

Στην $(1.1.1-1)$ τα πρότυπα, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί, λέγονται **δείκτες**, ενώ οι εικόνες τους **όροι** της ακολουθίας. Η έκφραση $a(\nu)$ θα συμβολίζεται συνήθως στο εξής με a_ν και θα λέγεται ο ν-οστός ή ο γενικός όρος της ακολουθίας, δηλαδή

$$a_\nu = a(\nu) \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

[1] Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Σειρές* και:
https://en.wikipedia.org/wiki/Sequence

Επίσης μια ακολουθία θα συμβολίζεται με (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ ή αναλυτικά a_ν; $\nu = 1, 2, \ldots$, ενώ θα χρησιμοποιείται και ο όρος *η ακολουθία* a_ν; $\nu \in \mathbb{N}$.

Στην ειδική περίπτωση που το σύνολο $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία a_ν λέγεται ακολουθία των πραγματικών αριθμών. Άρα:

Ορισμός 1.1.1 - 2. *Ορίζεται ως* **ακολουθία των πραγματικών αριθμών** *κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου* $\mathbb{N}$ *των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$.

Στο εξής θα εξεταστούν μόνον οι ακολουθίες των πραγματικών αριθμών.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 1.1.1 - 2 είναι ότι το πεδίο ορισμού και τιμών μιας ακολουθίας, έστω $a_\nu = a(\nu)$; $\nu \in \mathbb{N}$, είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι είναι υποσύνολο του αντίστοιχου πεδίου ορισμού και τιμών της συνάρτησης $f(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.1.1 - 1

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu^2 + 1} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Δίνοντας στο ν διαδοχικά τις τιμές $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ προκύπτουν οι παρακάτω όροι της ακολουθίας:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{\nu}{\nu^2 + 1}, \ldots .$$

Τότε η αντίστοιχη συνάρτηση θα έχει τύπο

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{με πεδίο ορισμού και τιμών το} \quad \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις 1.1.1 - 1

- Άμεσα προκύπτει ότι μία ακολουθία είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_ν, όπως στο Παράδειγμα 1.1.1 - 1.
- Μία ακολουθία είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται
  - επαρκείς όροι της, όπως $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι ορίζεται η ακολουθία $a_\nu = \nu^2$; $\nu \in \mathbb{N}$,

- ένας αναγωγικός τύπος ή αναδρομική σχέση, που επιτρέπει τον υπολογισμό του όρου a_ν από τον $a_{\nu-1}$ ή γενικότερα από ορισμένους προηγούμενούς του, όπως

$$a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{\nu-1}; \quad \nu = 2,\, 3,\, \ldots, \quad \text{όταν} \quad a_1 = -\frac{1}{4}.$$

- Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη ν να αρχίζουν από το 0 ή από κάποιο δείκτη $\nu_0 > 1$, όπως

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+1}; \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots, \quad \text{ή} \quad b_\nu = \frac{\nu}{\nu-3}; \quad \nu = 4,\, 5,\, \ldots .$$

- Οι τιμές του δείκτη ν, ενώ **αρχίζουν** από κάποια τιμή, πρέπει τελικά να **τείνουν στο άπειρο**, διαφορετικά δεν ορίζεται ακολουθία.

Επομένως ο τύπος

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+1}; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots \quad \textbf{ορίζει} \text{ ακολουθία, ενώ ο}$$

$$b_\nu = \frac{1}{\nu+1}; \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, 10 \quad \textbf{δεν ορίζει}.$$

A.1.2 Πράξεις μεταξύ ακολουθιών

Έστω (a_ν), (b_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ δύο ακολουθίες. Τότε ορίζονται για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ οι παρακάτω πράξεις:

Ισότητα	$(a_\nu) = (b_\nu)$, όταν $a_\nu = b_\nu$.
Πρόσθεση	$(a_\nu) + (b_\nu) = (a_\nu + b_\nu)$.
Γινόμενο	$(a_\nu)\,(b_\nu) = (a_\nu b_\nu)$.
Πηλίκο	$\dfrac{(a_\nu)}{(b_\nu)} = \left(\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right)$ με $b_\nu \neq 0$.
Γινόμενο με πραγματικό αριθμό	$\lambda\,(a_\nu) = (\lambda a_\nu)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Απόλυτη τιμή	$\lvert(a_\nu)\rvert = (\lvert a_\nu\rvert)$.
Τετραγωνική ρίζα	$\sqrt{(a_\nu)} = \left(\sqrt{a_\nu}\right)$, και ανάλογα
Ρίζα k-τάξης με $k \geq 2$	$\sqrt[k]{(a_\nu)} = \left(\sqrt[k]{a_\nu}\right)$.

Παρατήρηση 1.1.2 - 1

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου γενικεύονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

Α.1.3 Φραγμένη ακολουθία

Ορισμός 1.1.3 - 1. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **άνω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός s, τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \leq s$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Ο αριθμός s, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τον s, θα λέγεται ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 1.1.3 - 2. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **κάτω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός σ, τέτοιος ώστε $\sigma \leq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Ο αριθμός σ, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μικρότερος από τον σ, θα λέγεται τότε ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 1.1.3 - 3. *Η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί σ, s με $\sigma \leq s$, τέτοιοι ώστε $\sigma \leq a_\nu \leq s$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.*

Άρα μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη τότε και μόνον, όταν υπάρχει κλειστό διάστημα $[\sigma, s]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι της.

Παράδειγμα 1.1.3 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένη, επειδή

$$0 \leq a_\nu = \frac{1}{\nu} \leq 1,$$

δηλαδή όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$.

Ορισμός 1.1.3 - 4. *Η ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *είναι* **απόλυτα φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός, τέτοιος ώστε* $|a_\nu| \leq \theta$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Το θ θα λέγεται τότε ένα απόλυτο φράγμα της ακολουθίας. Είναι φανερό ότι αν ο θ είναι ένα απόλυτο φράγμα, τότε και κάθε άλλος θετικός αριθμός $\varphi > \theta$ είναι επίσης ένα απόλυτο φράγμα της. Γενικότερα ισχύει:

Πρόταση 1.1.3 - 1. *Μία φραγμένη ακολουθία είναι απόλυτα φραγμένη και αντίστροφα.*

Σύμφωνα με την πρόταση αυτή, στο εξής ο όρος *φραγμένη* και *απόλυτα φραγμένη* ακολουθία θα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία.

Παράδειγμα 1.1.3 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu} \sin 2\nu}{\nu^2 + 1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι απόλυτα φραγμένη, επειδή

$$|a_\nu| \leq \frac{\left|\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu} \sin 2\nu\right|}{\nu^2 + 1} \leq \frac{\nu^2 + \sqrt{\nu}}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2\nu^2}{\nu^2 + 1} < 2,$$

δηλαδή $|a_\nu| < 2$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε προφανώς είναι $-2 \leq a_\nu \leq 2$, δηλαδή η ακολουθία a_ν είναι επίσης και φραγμένη σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.3 - 3.

A.1.4 Μονοτονία ακολουθίας

Δίνεται στη συνέχεια η έννοια της μονοτονίας μιας ακολουθίας.

Έστω (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε θα λέγεται ότι η ακολουθία είναι:

Ορισμός 1.1.4 - 1 **αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.1.4 - 2 **γνήσια αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu < a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.1.4 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \nu^2 + 1\,; \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, επειδή

$$a_1 = 2 \,<\, a_2 = 5 \,<\, \ldots\,.$$

Ορισμός 1.1.4 - 3 **φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.1.4 - 4 **γνήσια φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu > a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.1.4 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu^2 + 1}\,; \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια φθίνουσα, επειδή

$$a_1 = \frac{1}{2} \,>\, a_2 = \frac{1}{5} \,>\, \ldots\,.$$

Ορισμός 1.1.4 - 5 **σταθερή** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_{\nu+1} = a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.1.4 - 3

Η ακολουθία $a_\nu = 5; \quad \nu \in \mathbb{N}$ είναι σταθερή, επειδή $a_1 = 5 \,=\, a_2 = 5 \,=\ldots\,.$

Μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ που ανήκει σε μία από τις κατηγορίες ορισμών 1.1.4 - 1 ή 1.1.4 - 3 θα λέγεται **μονότονη** ακολουθία, ενώ όταν ανήκει στις 1.1.4 - 2 ή 1.1.4 - 4 θα λέγεται **γνήσια μονότονη** ακολουθία.

Παρατηρήσεις 1.1.4 - 1

1. Κάθε γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

2. Αν η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα, τότε $a_\nu \geq \alpha_1$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της, όπως αυτό ισχύει στο Παράδειγμα 1.1.4 - 1, όπου ένα κάτω φράγμα της είναι ο αριθμός 2.

Όμοια, αν η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα, τότε $a_\nu \leq \alpha_1$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της, όπως αυτό ισχύει στο Παράδειγμα 1.1.4 - 2, όπου ένα άνω φράγμα της είναι ο αριθμός 1/2.

3. Για να καθοριστεί το είδος της μονοτονίας μιας ακολουθίας (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ τις περισσότερες φορές ακολουθείται μία από τις παρακάτω μεθόδους:

i) εξετάζεται το πρόσημο της διαφοράς

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu .$$

Παράδειγμα 1.1.4 - 4

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, επειδή

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{\nu+1}{\nu+2} - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} > 0\,,$$

δηλαδή $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Αν οι όροι της a_ν διατηρούν πρόσημο, τότε συνήθως συγκρίνεται ο λόγος $a_{\nu+1}/a_\nu$ με τη μονάδα, οπότε από τη σύγκριση αυτή εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της ακολουθίας.

iii) Υπολογίζεται μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας μία σχέση, από την οποία προκύπτει μία ένδειξη μονοτονίας και έπειτα, με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αποδεικνύεται η ανισοτική σχέση, η οποία καθορίζει τελικά το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας.

A.1.5 Ορισμός σύγκλισης ακολουθιών

Ορισμός 1.1.5 - 1. *Θα λέγεται ότι μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$* **συγκλίνει** *στον πραγματικό αριθμό a ή τείνει στον αριθμό a ή το όριό της είναι ο αριθμός a και αυτό θα συμβολίζεται με*[2]

$$a_\nu \to a \quad \text{ή} \quad \lim_{\nu -> +\infty} a_\nu = a \quad \text{ή επίσης} \quad \lim a_\nu = a,$$

τότε και μόνον, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή δείκτης που εξαρτάται γενικά από το ε, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$|a_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \nu \geq \nu_0(\varepsilon). \tag{1.1.5 - 1}$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 0$, δηλαδή $\lim a_\nu = 0$, η ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **μηδενική**.

Από τον Ορισμό 1.1.5 - 1 προκύπτει τότε ότι:

Πρόταση 1.1.5 - 1. *Αν $\lim a_\nu = a$, τότε η ακολουθία $\delta_\nu = (a_\nu - a)$; $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική και αντίστροφα, δηλαδή*

$$\lim a_\nu = a \iff \lim (a_\nu - a) = 0. \tag{1.1.5 - 2}$$

Παράδειγμα 1.1.5 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι μηδενική, επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $1/\varepsilon$.

Πράγματι, αν

$$\nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \nu_0(\varepsilon),$$

[2] Ο συμβολισμός lim είναι η συγκοπή της λέξης *limes*, που σημαίνει *όριο* και στο εξής, όταν χρησιμοποιείται, θα σημαίνει $\lim_{\nu \to +\infty}$, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\nu} < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$|a_\nu| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon, \quad \text{οπότε} \quad a_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Παράδειγμα 1.1.5 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει στο 1, επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.5 - 1 είναι

$$|a_\nu - 1| = \left| \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1} - 1 \right| = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2}{\nu} < \varepsilon \quad \text{με} \quad \varepsilon > 0,$$

οπότε $\nu > 2/\varepsilon$. Τότε υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $2/\varepsilon$ και αυτό επειδή, αν είναι

$$\nu_0 = \text{ακέραιο μέρος του} \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = \nu_0(\varepsilon),$$

τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι

$$\nu > \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{\nu} < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad |a_\nu - 1| < \varepsilon,$$

οπότε $\lim a_\nu = 1$.

Παράδειγμα 1.1.5 - 3

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_\nu = (-1)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Αν με την εις άτοπον απαγωγή υποτεθεί ότι συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = 1/2$, θα υπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$|(-1)^\nu - x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_0.$$

Τότε όμως, επειδή $\nu_0 < \nu_0 + 1$ είναι

$$|(-1)_0^\nu - x| < \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| < \frac{1}{2},$$

οπότε έχουμε

$$\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| \leq \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| + |(-1)_0^\nu - x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

δηλαδή $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| < 1$, ενώ προφανώς $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| = 2$.

Άρα η υπόθεση ότι η ακολουθία συγκλίνει οδηγεί σε άτοπο, που σημαίνει ότι η a_ν δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. ■

A.1.6 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Δίνονται στη συνέχεια με τη μορφή προτάσεων οι κυριότερες ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών.

Πρόταση 1.1.6 - 1. *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι* **μονοσήμαντα** *ορισμένο.*

Πρόταση 1.1.6 - 2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν συγκλίνουν.*

Πρόταση 1.1.6 - 3. *Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη είναι μηδενική ακολουθία.*

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει:

Πόρισμα 1.1.6 - 1. *Αν $\lim a_\nu = a$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\lim (ka_\nu) = ka. \tag{1.1.6 - 1}$$

Πρόταση 1.1.6 - 4. *Αν η (b_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι μια μηδενική ακολουθία και η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ φράσσεται από την ακολουθία (b_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ από κάποιο δείκτη και μετά, έστω ν_1, δηλαδή αν ισχύει*

$$|a_\nu| \leq k\,|b_\nu| \quad \text{με} \quad k > 0 \quad \text{για κάθε} \quad \nu \geq \nu_1,$$

τότε η (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

Παράδειγμα 1.1.6 - 1

Έστω η ακολουθία
$$a_\nu = \frac{5\sin^2\nu}{\nu^2+\nu+1}.$$
Τότε, επειδή σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.6 - 4 είναι

$$|a_\nu| = \left|\frac{5\sin^2\nu}{\nu^2+\nu+1}\right| = \frac{5\left|\sin^2\nu\right|}{|\nu^2+\nu+1|} \le \frac{5}{\nu^2+\nu+1} < \overbrace{5}^{k}\ \overbrace{\frac{1}{\nu}}^{b_\nu}$$

και ισχύει ότι $\lim b_\nu = \frac{1}{\nu} = 0$, θα πρέπει και $\lim a_\nu = 0$.

Πόρισμα 1.1.6 - 2. *Αν $|a_\nu| \le |b_\nu|$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και η (b_ν) είναι μηδενική ακολουθία, τότε και η ακολουθία (a_ν) είναι μηδενική.*

Πρόταση 1.1.6 - 5. *Αν*

$$b_\nu \le a_\nu \le \gamma_\nu \quad \textit{για κάθε} \quad \nu \ge \nu_0 \quad \textit{και} \quad \lim b_\nu = \lim \gamma_\nu = a,$$

τότε θα πρέπει και $\lim a_\nu = a$ (**ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες**).

Πρόταση 1.1.6 - 6. *Αν δύο ακολουθίες (a_ν) και (b_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν και ισχύει $a_\nu < b_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $a_\nu \le b_\nu$.*

Πόρισμα 1.1.6 - 3. *Αν $\lim a_\nu = a$ και $a_\nu < s$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $a \le s$.*

Πόρισμα 1.1.6 - 4. *Αν $\lim a_\nu = a$ και $\sigma < a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $\sigma \le a$.*

A.1.7 Πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών

Όμοια δίνονται στη συνέχεια οι δυνατές πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών με τη μορφή των παρακάτω προτάσεων:

Πρόταση 1.1.7 - 1 (όριο αθροίσματος). *Αν $\lim a_\nu = a$ και $\lim b_\nu = b$, τότε υπάρχει το $\lim(a_\nu + b_\nu)$ και ισχύει*

$$\lim(a_\nu + b_\nu) = a + b. \qquad (1.1.7 - 1)$$

Παρατηρήσεις 1.1.7 - 1

i) Η ισχύς της Πρότασης 1.1.7 - 1 επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή ισχύει

$$\lim\left(a_{1_\nu} + a_{2_\nu} + \ldots + a_{k_\nu}\right) = \lim a_{1_\nu} + \lim a_{2_\nu} + \ldots + \lim a_{k_\nu}, \tag{1.1.7 - 2}$$

ενώ δεν ισχύει αν το πλήθος των προσθετέων δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή άπειρο.

ii) Το αντίστροφο της Πρότασης 1.1.7 - 1 δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή: *αν το άθροισμα δύο ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία, αυτό δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι καθεμιά από αυτές είναι συγκλίνουσα ακολουθία.* Είναι επίσης δυνατόν στην περίπτωση αυτή να μη συγκλίνει ούτε η μία ούτε η άλλη ακολουθία.

Πρόταση 1.1.7 - 2 (όριο διαφοράς). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε υπάρχει το* $\lim\left(a_\nu - b_\nu\right)$ *και ισχύει*

$$\lim\left(a_\nu - b_\nu\right) = a - b. \tag{1.1.7 - 3}$$

Πρόταση 1.1.7 - 3 (όριο γινομένου). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$, *τότε υπάρχει το* $\lim\left(a_\nu\, b_\nu\right)$ *και ισχύει*

$$\lim\left(a_\nu\, b_\nu\right) = ab. \tag{1.1.7 - 4}$$

Παρατηρήσεις 1.1.7 - 2

i) Η Πρόταση 1.1.7 - 3 επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή

$$\lim\left(a_{1_\nu}\, a_{2_\nu}\, \cdots\, a_{k_\nu}\right) = \lim a_{1_\nu}\, \lim a_{2_\nu}\, \cdots\, \lim a_{k_\nu}. \tag{1.1.7 - 5}$$

Ειδικότερα, αν οι k-ακολουθίες είναι **ίσες**, δηλαδή

$$a_{i_\nu} = a_\nu; \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \text{και} \quad \lim a_\nu = a,$$

τότε ισχύει

$$\lim (a_\nu)^k = (\lim a_\nu)^k = a^k \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (1.1.7 - 6)$$

ii) Η (1.1.7−5) δεν ισχύει αν το πλήθος των παραγόντων δεν είναι πεπερασμένο.

iii) Το αντίστροφο της Πρότασης 1.1.7 - 3 δεν ισχύει γενικά.

Από τις Προτάσεις 1.1.7 - 1 και 1.1.7 - 3 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 1.1.7 - 1. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b_\nu = b$*, τότε*

$$\lim (ka_\nu + \lambda b_\nu) = ka_\nu + \lambda b_\nu \qquad (1.1.7 - 7)$$

για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$ *(**γραμμική ιδιότητα**).*

Η γραμμική ιδιότητα γενικεύεται ως εξής:
αν $\lim a_{i_\nu} = a_i$ και $k_i \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim (k_1 a_{1_\nu} + k_2 a_{2_\nu} + \ldots + k_\nu a_{k_\nu})$$

$$= k_1 \lim a_{1_\nu} + k_2 \lim a_{2_\nu} + \ldots + k_\nu \lim a_{k_\nu},$$

Πρόταση 1.1.7 - 4 (όριο πηλίκου). *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\lim b\nu = b \neq 0$*, όπου* $b_\nu \neq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$*, τότε υπάρχει το* $\lim (a_\nu / b_\nu)$ *και ισχύει*

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \frac{a}{b}\,. \qquad (1.1.7 - 8)$$

Παράδειγμα 1.1.7 - 1

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 + \nu + 5}{3\nu^2 + 1}\,,$$

που γράφεται επίσης ως εξής:

$$a_\nu = \frac{1 + \frac{1}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}}\,.$$

Τότε, επειδή η ακολουθία

- $\dfrac{1}{\nu}$ (Παράδειγμα 1.1.5 - 1) συγκλίνει στο μηδέν, και
- η $\dfrac{1}{\nu^2}$ σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.7 - 3, επειδή

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{\nu}, \quad \text{είναι επίσης μηδενική,}$$

σύμφωνα με τις Προτάσεις 1.1.7 - 1 και 1.1.7 - 4 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim a_\nu &= \lim \frac{\nu^2+\nu+5}{3\nu^2+1} = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3+\frac{1}{\nu^2}\right)} \\ &= \frac{1+\lim\left(\frac{1}{\nu}\right)+5\lim\left(\frac{1}{\nu^2}\right)}{3+\lim\left(\frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 1.1.7 - 3

i) Το αντίστροφο της Πρότασης 1.1.7 - 4 δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή η ύπαρξη του ορίου $\lim\left(a_\nu/b_\nu\right)$ δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη ενός από τα $\lim a_\nu$ ή $\lim b_\nu$.

ii) Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.7 - 4, αν $a_\nu = 1$ και $b_\nu \neq 0$ με $\lim b_\nu = b \neq 0$, τότε από τον τύπο $(1.1.7-6)$ έχουμε

$$\frac{1}{\left(b_\nu\right)^k} = \frac{1}{b^k}. \qquad (1.1.7 - 9)$$

Συνδυάζοντας τις $(1.1.7-6)$ και $(1.1.7-9)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 1.1.7 - 2. *Αν $a_\nu \neq 0$ και $\lim a_\nu = a \neq 0$, τότε ισχύει*

$$\lim\left(a_\nu\right)^k = a^k \quad \text{για κάθε} \quad k = \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots. \qquad (1.1.7 - 10)$$

Η $(1.1.7-10)$ αποτελεί γενίκευση της $(1.1.7-6)$.

Πρόταση 1.1.7 - 5 (όριο απόλυτης τιμής). *Αν $\lim a_\nu = a$, τότε υπάρχει το $\lim\left|a_\nu\right|$ και ισχύει*

$$\lim\left|a_\nu\right| = |a|. \qquad (1.1.7 - 11)$$

Παρατηρήσεις 1.1.7 - 4

i) Το αντίστροφο της Πρότασης 1.1.7 - 5 δεν ισχύει, όταν $a \neq 0$, δηλαδή:

$$\text{αν} \quad \lim |a_\nu| = |a| \neq 0, \quad \textbf{δεν} \text{ συνεπάγεται ότι και} \quad \lim a_\nu = a$$

και αυτό επειδή είναι δυνατόν μία ακολουθία να συγκλίνει απόλυτα, χωρίς όμως η ίδια να συγκλίνει.

Ειδικά, όταν $a = 0$, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\lim a_\nu = 0 \iff -\lim a_\nu = 0 \iff \lim |a_\nu| = 0. \qquad (1.1.7 - 12)$$

Πρόταση 1.1.7 - 6 (όριο ρίζας). *Αν* $\lim a_\nu = a$, *τότε*

$$\lim \sqrt{|a_\nu|} = \sqrt{|a|} = \sqrt{\lim a_\nu}. \qquad (1.1.7 - 13)$$

Παρατήρηση 1.1.7 - 1

Από την Πρόταση 1.1.7 - 6 προκύπτει ότι τα σύμβολα

$$\lim \quad \text{και} \quad \sqrt{}$$

επιτρέπεται να εναλλάσσονται αριστερά από την ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$.

Η γενίκευση της Πρότασης 1.1.7 - 6 διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 1.1.7 - 7 (γενίκευση ρίζας). *Αν* $a_\nu \geq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *και* $\lim a_\nu = a$, *τότε*

$$\lim \sqrt[k]{a_\nu} = \sqrt[k]{\lim a_\nu} \quad \textit{με} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (1.1.7 - 14)$$

Από την Πρόταση 1.1.7 - 7 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 1.1.7 - 3. *Αν* $a > 0$, *τότε, αν*

$$a_\nu = a, \quad \textit{είναι} \quad a_\nu = \lim \sqrt[\nu]{a} = 1, \quad \textit{ενώ, αν}$$

$$a_\nu = \nu, \qquad \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

Σε συμπλήρωση των παραπάνω προτάσεων δίνονται στη συνέχεια οι εξής:

Πρόταση 1.1.7 - 8. *Έστω η ακολουθία*

$$a_\nu = \omega^\nu \, ; \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \mu\varepsilon \quad |\omega| < 1.$$

Τότε $\quad \lim a_\nu = 0.$

Πρόταση 1.1.7 - 9. *Αν* $\omega \in \mathbb{R}$ *και* $|\omega| < 1$, *τότε*

$$\lim a_\nu = \nu^k \omega^\nu = 0\, ; \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \mu\varepsilon \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Πρόταση 1.1.7 - 10. *Έστω μία ακολουθία* (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ *με* $a_\nu \neq 0$ *για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$. *Τότε, αν*

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| < 1, \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \quad \lim a_\nu = 0.$$

Πρόταση 1.1.7 - 11. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\lim \frac{x^\nu}{\nu\,!} = 0.$$

Σχετικά τώρα με τη σύγκλιση μονότονων ακολουθιών δεχόμαστε ότι ισχύει:

Αξίωμα Α.1.1. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.*

Το αξίωμα αυτό, αν και αφορά μόνο τις μονότονες ακολουθίες, δίνει μία ικανή συνθήκη ύπαρξης του ορίου ακολουθίας. Επίσης εξασφαλίζει την ύπαρξη στο $\mathbb{R}$ του ορίου μιας ακολουθίας με ορισμένες προϋποθέσεις, αλλά δεν δίνει καμία ένδειξη για τον υπολογισμό του.

Άμεσες συνέπειες του αξιώματος είναι οι επόμενες δύο προτάσεις:

Πρόταση 1.1.7 - 12. *Αν μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό s, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει $\lim a_\nu \leq s$.*

Πρόταση 1.1.7 - 13. *Αν μία ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό σ, τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει $\sigma \leq \lim a_\nu$.*

A.1.8 Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται σύμφωνα με τους ορισμούς της Παραγράφου A.1.5 ότι η ακολουθία

$$a_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, ενώ η ακολουθία

$$b_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

είναι γνήσια φθίνουσα.

Επίσης αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$2 = \alpha_1 \leq a_\nu < b_\nu \leq b_1 = 4. \tag{1.1.8 - 1}$$

Τότε σύμφωνα με το Αξίωμα A.1.1 για τις οριακές τιμές των ισχύει:

$$2 \leq \lim a_\nu \leq \lim b_\nu = 4. \tag{1.1.8 - 2}$$

Αλλά

$$\frac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = 1. \tag{1.1.8 - 3}$$

Από τις $1.1.8 - 1)$ και $1.1.8 - 3)$ προκύπτει ότι $\quad \lim a_\nu = \lim b_\nu$.

Ορισμός 1.1.8 - 1 (αριθμού e). *Ο αριθμός e ορίζεται ως η κοινή οριακή τιμή των ακολουθιών (a_ν); $\nu \in \mathbb{N}$ και (b_ν); $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή*

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \tag{1.1.8 - 4}$$

όπου ισχύει ότι

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \leq \ e \ \leq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}. \tag{1.1.8 - 5}$$

Ο αριθμός e, που συμβολισμός του εισήχθη από τον Euler το 1736, παίζει σπουδαίο ρόλο στα Μαθηματικά και κυρίως τα Εφαρμοσμένα, ενώ αποδεικνύεται στην Ανάλυση ότι δεν είναι ρητός, ούτε αλγεβρικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα καμιάς αλγεβρικής εξίσωσης (κατά συνέπεια δεν είναι άρρητος), αλλά, όπως και ο αριθμός π, μη αλγεβρικός ή **υπερβατικός** αριθμός.[3] Μία προσέγγισή του στα 3 δεκαδικά ψηφία είναι $e \approx 2.718$.

[3]Το ότι είναι υπερβατικός απεδείχθη από τον Hermite και η ανακάλυψη αυτή θεωρείται ως μία από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Μαθηματικών. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι και ο αριθμός π είναι υπερβατικός και κατά συνέπεια *το άλυτο του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη*.