Τυπολόγιο για τα Μαθηματικά Ι: Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών, Παν. Δυτικής Αττικής

Χρήσιμες ταυτότητες:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$
$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Λογάριθμοι: Έστω $a > 0$ και $a \neq 1$. Τότε αν $y > 0$:

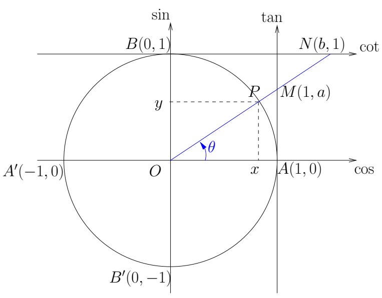
$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y.$$

Ιδιότητες λογαρίθμων:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, για κάθε $x, y > 0$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, για κάθε $x, y > 0$.
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$ για κάθε $x > 0$ και οποιοδήποτε y.
4. $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$.
5. Έστω $0 < x < y$ και $a > 1$. Τότε $\log_a x < \log_a y$.
6. Έστω $0 < x < y$ και $0 < a < 1$. Τότε $\log_a x > \log_a y$.
7. Έστω $a, b > 0$ και $a, b \neq 1$.
   Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Σχέση ακτινίων – μοιρών:
$1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, και $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι:



$\cos\theta =$ η τετμημένη του σημείου $P = x$.
$\sin\theta =$ η τεταγμένη του σημείου $P = y$.
$\tan\theta =$ η αλγεβρική τιμή του $AM = a$.
$\cot\theta =$ η αλγεβρική τιμή του $AN = b$.

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ (\text{για } \theta \neq k\pi + \pi/2),\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ (\text{για } \theta \neq k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Τιμές των sin, cos, tan και cot, για γωνίες του 1ου τεταρτημορίου:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot\theta$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$\sin x = \sin\theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \theta$$
$$\cos x = \cos\theta \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta$$
$$\tan x = \tan\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta$$
$$\cot x = \cot\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta,\ k \in \mathbb{Z}$$

Νόμος ημιτόνων και συνημιτόνων σε τυχαίο τρίγωνο: Αν ABC είναι τυχαίο τρίγωνο, και a, b, c είναι τα μήκη των πλευρών του, τότε:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

και

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(A).$$

Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί:

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \cos\theta = x \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$
$$\theta = \arcsin y \Leftrightarrow \sin\theta = y \quad \text{και} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\theta = \arctan a \Leftrightarrow \tan\theta = a \quad \text{και} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\theta = \operatorname{arccot} b \Leftrightarrow \cot\theta = b \quad \text{και} \quad 0 < \theta < \pi$$

Μιγαδικοί αριθμοί: Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$.
Μέτρο του z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Συζυγής του z: $\bar{z} = a - bi$.
Τριγωνομετρική ή πολική μορφή του z:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

όπου $r = |z|$, και $\theta = \arg z$ είναι το όρισμα του z (στο $[0, 2\pi)$).
Πολικές συντ/νες: $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$
τύπος του Euler: Αν $t \in \mathbb{R}$: $e^{it} = \cos t + i\sin t$
Τύπος De Moivre: Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Έστω $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο z έχει ακριβώς $\boldsymbol{n}$ **διακριτές** $\boldsymbol{n}$**-οστές ρίζες**

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right],$$

όπου $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Συνεχείς συναρτήσεις:
Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής: Έστω f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ξ είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ $f(a)$ και $f(b)$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός c ανάμεσα στα a και b τέτοιος ώστε $f(c) = \xi$.

Θεώρημα Bolzano: Έστω f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\rho \in (a, b)$ τέτοιος ώστε $f(\rho) = 0$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων:

$f(x)$	$f'(x)$
$c,\ c \in \mathbb{R}$ σταθ.	0
x	1
x^n, n ακέραιος	nx^{n-1}
x^p, p ρητός, $x > 0$	px^{p-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Πράξεις με παραγώγους:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

Ολοκληρώματα:
Θεμελιώδες Θεώρημα Απ. Λογ.: Αν f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), και $g'(x) = f(x)$.
Επιπλέον,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

όπου F είναι οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f, δηλ. μια συνάρτηση τέτοια ώστε $F' = f$.
Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\text{Αν } f(x) \ge 0, \text{ για } a \le x \le b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$
$$\int k\,dx = kx + C$$
$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \ne -1)$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \ne 1)$$
$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$