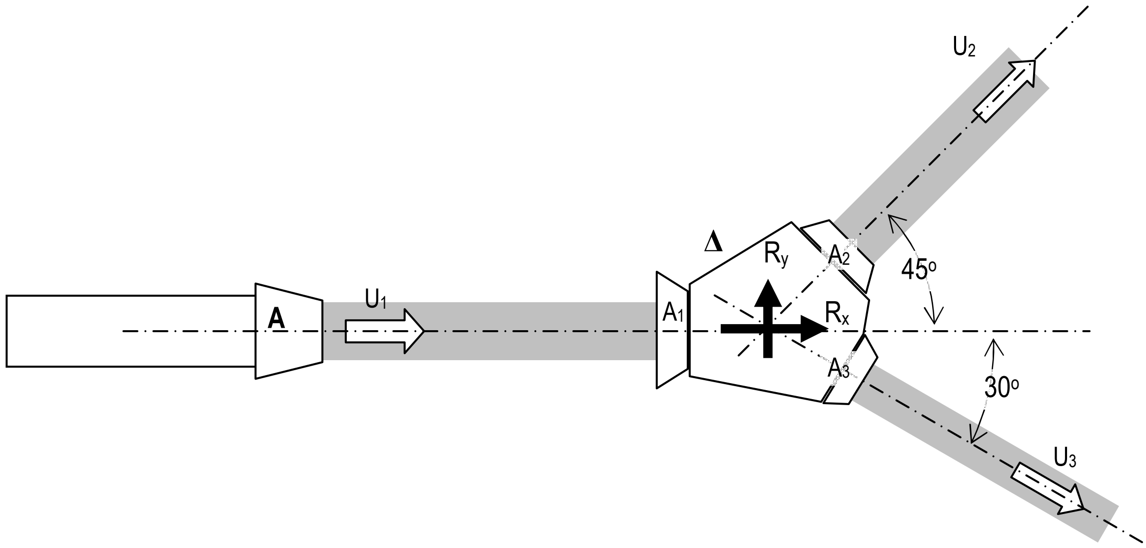
Άσκηση 1

Ακροφύσιο Α εκτοξεύει κυλινδρική φλέβα νερού διαμέτρου d_1=30cm με ρυθμό 140l/s. Η φλέβα του νερού εισέρχεται σε ένα διαχύτη Δ, και χωρίζεται σε 2 κυλινδρικές φλέβες με διατομές A_2 & A_3 (διαμέτρων d_2=20cm & d_3=15cm) και με ταχύτητες U_2=2,0m/s και U_3 αντίστοιχα, σύμφωνα με τη γεωμετρία που παρουσιάζεται στο σκαρίφημα. Υπολογίστε την ταχύτητα U_1 εξόδου της φλέβας του νερού από το ακροφύσιο, την ταχύτητα U_3 και τις αντιδράσεις R_x R_y στη στήριξη του διαχύτη, θεωρώντας το βάρος Β του διαχύτη αμελητέο.



Επίλυση

Το πρόβλημα θα λυθεί σε δύο στάδια. Πρώτα θα υπολογίσουμε τις ταχύτητες U_1 & U_3 με τη βοήθεια του ισοζυγίου παροχών (εξίσωση συνέχειας) σε όγκο ελέγχου (CV) που περικλείει το διαχύτη.

Υπολογίζουμε την ταχύτητα U_1:

$$U_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{4Q_1}{\pi {d_1}^2} = \frac{4 \times 140 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi \times (0{,}30\mathrm{m})^2} \quad \Rightarrow \quad U_1 = 1{,}981\mathrm{m/s} \tag{2.1}$$

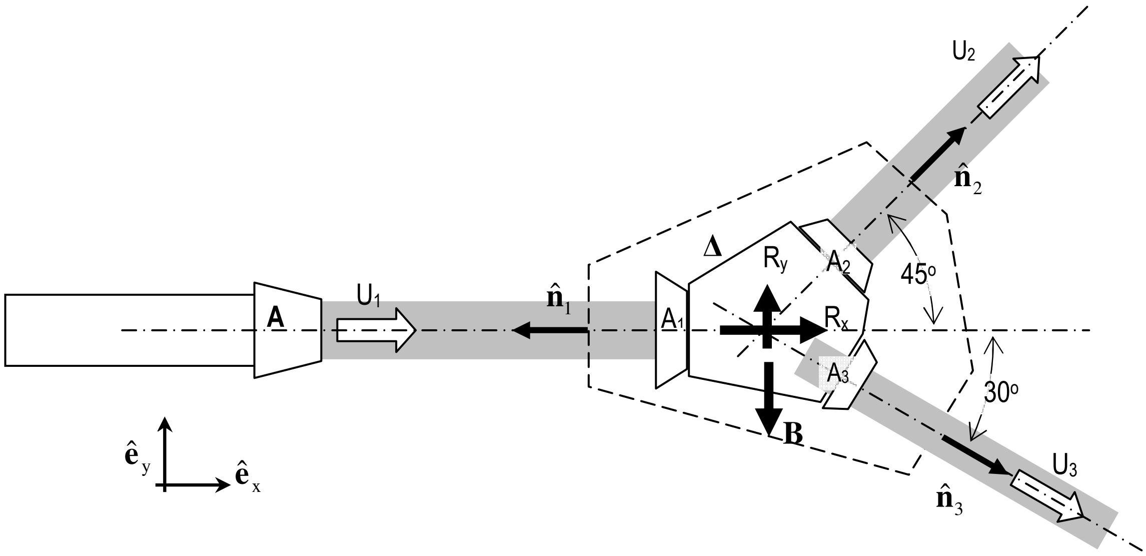
και με ισοζύζιο παροχών (εξίσωση συνέχειας) την ταχύτητα U_3

$$\sum_{i=1}^{N} \pm A_i U_i = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1U_1 - A_2U_2 - A_3U_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 - A_2U_2 - A_3U_3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{1}{A_3}\left(Q_1 - A_2U_2\right) = \frac{4}{\pi {d_3}^2}\left(Q_1 - \frac{\pi {d_2}^2}{4}U_2\right) \\ &= \frac{4}{\pi \times (0{,}15\mathrm{m})^2}\left(140 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} - \frac{\pi \times (0{,}2\mathrm{m})^2}{4} \times 2{,}0\mathrm{m/s}\right) \quad \Rightarrow \quad U_3 = 4{,}367\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στον ίδιο όγκο ελέγχου.

Σχεδιάζουμε τα μοναδιαία εξωτερικά διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3$ των διατομών A_1, A_2, A_3, από τις οποίες ο όγκος ελέγχου ανταλάσσει ορμή (μάζα ×ταχύτητα νερού) με το περιβάλλον και ορίζουμε σύστημα αξόνων Oxy με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$.



<u>Ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στη διεύθυνση</u> $\hat{\mathbf{e}}_x$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\langle\hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\rangle \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_i\rangle\right) = F_B \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{F}_B\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \sin\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right]$$

Το τελευταίο (δεξιά) άθροισμα του παραπάνω ισοζυγίου ισούται με 0 γιατί κάθε όρος του ισούται με 0. Ας δούμε αναλυτικά γιατί.

Ο $1^{ος}$ όρος του αθροίσματος δίνει την $\hat{\mathbf{e}}_x$ -συνιστώσα του διανυσματικού αθροίσματος των δυνάμεων πίεσης στην επιφάνεια ελέγχου. Επειδή παντού στην επιφάνεια ελέγχου υφίσταται ατμοσφαιρική πίεση (ακόμα και στις φλέβες εισροής και εκροής του νερού στον όγκο ελέγχου, που είναι ροές με ελεύθερη επιφάνεια άρα σε αυτές εξασκείται η ίδια πίεση με αυτή του περιβάλλοντος δηλ. η ατμοσφαιρική), ο $1^{ος}$ όρος του αθροίσματος γίνεται

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-p_i A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{N}\left(-p_{atm} A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad p_{atm}\sum_{i=1}^{N}\left(A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0$$

Αλλά για ακίνητες κλειστές επιφάνειες (στην περίπτωσή μας πολύγωνα) ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{N}\left(A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0$ (μπορείτε να το επιβεβαιώσετε για οποιοδήποτε κλειστό πολυγωνικό σχήμα). Έτσι, $\sum_{i=1}^{N}\left(-p_i A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0$

Ο $2^{ος}$ όρος του αθροίσματος δίνει την $\hat{\mathbf{e}}_x$ -συνιστώσα του διανυσματικού αθροίσματος των διατμητικών δυνάμεων στην επιφάνεια ελέγχου. Διατμητικές δυνάμεις αναπτύσσονται στις υγρές φλέβες εάν υπάρχει βαθμίδα ταχυτήτων (σχετική κίνηση μεταξύ στρώσεων της υγρής φλέβας). Επειδή όμως η κατανομή ταχύτητας στις φλέβες που εξετάζουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι σταθερή (επειδή πρόκειται για ροή «ανοικτού τύπου», σε κάθε διατομή όλα τα υγρά σωματίδια έχουν την ίδια ταχύτητα) η βαθμίδα ταχύτητας είναι 0 και επομένως διατμητικές δυνάμεις δεν αναπτύσσονται. Έτσι τ_i=0 παντού και, επομένως,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-\tau_i A_i \sin\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)=0$$

Έτσι,

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \sin\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right]=$$

$$=-p_{Atm}\sum_{i=1}^{N}\left(-A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(0\times A_i \sin\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)=-p_{Atm}0-0=0$$

Αντικαθιστώντας στο ισοζύγιο και τα υπόλοιπα γνωστά μεγέθη έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\rho U_1 A_1 U_1 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_1, \mathbf{U}_1\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_1\rangle \\
&+\rho U_2 A_2 U_2 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{U}_2\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_2\rangle \\
&+\rho U_3 A_3 U_3 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_3, \mathbf{U}_3\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_3\rangle = \\
&= B\cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{B}\rangle + R_x \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, R_x\hat{\mathbf{e}}_x\rangle + R_y \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, R_y\hat{\mathbf{e}}_y\rangle + [-0-0]^* \quad \Rightarrow
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\rho(U_1)^2 A_1 \cos(\pi)\cos(0) + \rho(U_2)^2 A_2 \cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \rho(U_3)^2 A_3 \cos(0)\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$$

$$= B\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + R_x \cos(0) + R_y \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + [-0-0] \qquad \Rightarrow$$

$$-\rho(U_1)^2 A_1 + \rho(U_2)^2 A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \rho(U_3)^2 A_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 + R_x + 0 + 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{R_x = -\rho(U_1)^2 A_1 + \rho(U_2)^2 A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \rho(U_3)^2 A_3 \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{2.4}$$

και με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών

$$\begin{aligned}
R_x &= -\rho(U_1)^2 A_1 + \rho(U_2)^2 A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \rho(U_3)^2 A_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 1000\frac{kg}{m^3}\left[-\left(1{,}981\frac{m}{s}\right)^2 \frac{\pi(0{,}3m)^2}{4} + \left(2{,}0\frac{m}{s}\right)^2 \frac{\pi(0{,}2m)^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(4{,}367\frac{m}{s}\right)^2 \frac{\pi(0{,}15m)^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{4}1000\frac{kg}{m^3}\left[-\left(1{,}981\frac{m}{s}\right)^2 (0{,}3m)^2 + \left(2{,}0\frac{m}{s}\right)^2 (0{,}2m)^2\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(4{,}367\frac{m}{s}\right)^2 (0{,}15m)^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= 103{,}317\frac{kg}{m^3}\frac{m^4}{s^2} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$R_x = 103{,}32\ N \tag{2.5}$$

<u>Ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{e}}_y$</u>

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_i\rangle\right) = F_B \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{F}_B\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right]$$

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο ισοζύγιο

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , \hat{\mathbf{n}}_i \right\rangle - \tau_i A_i \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x , \hat{\mathbf{n}}_i \right\rangle\right)\right]=$$

$$= -p_{atm}\sum_{i=1}^{N}\left(A_i \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , \hat{\mathbf{n}}_i \right\rangle\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(0\times A_i \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_x , \hat{\mathbf{n}}_i \right\rangle\right) = p_{atm}\,0 + 0 = 0$$

Επομένως το ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στην $\hat{\mathbf{e}}_y$-διεύθυνση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&\rho U_1 A_1 U_1 \cos\left\langle \hat{\mathbf{n}}_1 , \mathbf{U}_1 \right\rangle \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , \mathbf{U}_1 \right\rangle \\
&+ \rho U_2 A_2 U_2 \cos\left\langle \hat{\mathbf{n}}_2 , \mathbf{U}_2 \right\rangle \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , \mathbf{U}_2 \right\rangle \\
&+ \rho U_3 A_3 U_3 \cos\left\langle \hat{\mathbf{n}}_3 , \mathbf{U}_3 \right\rangle \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , \mathbf{U}_3 \right\rangle = \\
&= B\cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , \mathbf{B} \right\rangle + R_x \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , R_x\hat{\mathbf{e}}_x \right\rangle + R_y \cos\left\langle \hat{\mathbf{e}}_y , R_y\hat{\mathbf{e}}_y \right\rangle \quad \Rightarrow
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\rho U_1^{\,2} A_1 \cos(0)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \rho U_2^{\,2} A_2 \cos(0)\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \rho U_3^{\,2} A_3 \cos(0)\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) =$$

$$= B\cos(\pi) + R_x \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + R_y \cos(0) + 0 \quad \Rightarrow$$

$$\rho U_2^{\,2} A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \rho U_3^{\,2} A_3 \frac{1}{2} = -B + 0 + R_y \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{R_y = \rho U_2^{\,2} A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \rho U_3^{\,2} A_3 \frac{1}{2} - B} \tag{2.7}$$

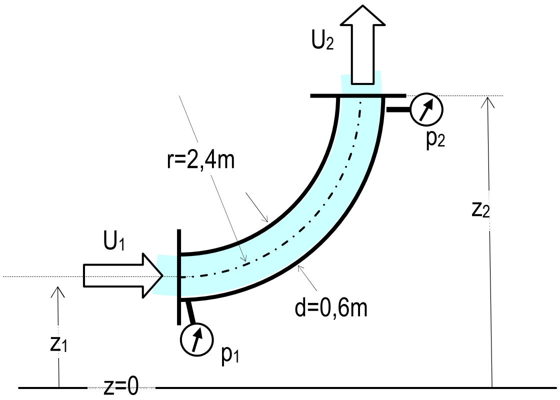
Επίσης, αμελώντας το βάρος Β του διαχύτη ($B \approx 0$) και με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών παίρνουμε

$$\begin{aligned}
R_y &= \rho U_2^{\,2} A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \rho U_3^{\,2} A_3 \frac{1}{2} \\
&= \frac{\pi}{4} 1000 \frac{kg}{m^3}\left[\left(2{,}0\frac{m}{s}\right)^2 (0{,}2m)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(4{,}367\frac{m}{s}\right)^2 (0{,}15m)^2 \frac{1}{2}\right] \\
&= -79{,}646 \frac{kg}{m^3}\frac{m^4}{s^2} = -79{,}646\ N
\end{aligned} \tag{2.8}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η φορά της R_y είναι αντίθετη αυτής που υποθέσαμε.

Άσκηση 2

Μια σωληνοκαμπύλη διαμέτρου d=0,6m και ακτίνας καμπυλότητας r=2,4m μεταφέρει νερό με παροχή $0,9m^3/s$ και σχηματίζει καμπύλη 90^o σε κατακόρυφο επίπεδο. Ο συντελεστής τοπικής αντίστασης για την καμπύλη είναι K=0,17. Η πίεση στην είσοδο της καμπύλης είναι p_1=3bar. Προσδιορίστε την ολική δύναμη που ασκεί το νερό στην καμπύλη. Αμελήστε το βάρος του νερού στην καμπύλη και το βάρος της καμπύλης.



Για να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το νερό στην καμπύλη, αρκεί να υπολογίσουμε τι αντιδράσεις πρέπει να αναπτύξουμε στην καμπύλη εξωτερικά. Θα εφαρμόσουμε ισοζ΄γιο παροχής γραμμικής ορμής σε όγκο ελέγχου που περικελείει την καμπύλη. Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις συνθήκες της ροής στην είσοδο και έξοδο της καμπύλης.

Έτσι αρχικά θα εφαρμόσουμε ισοζύγιο ολικής υδραυλικής ενέργειας α.μ.β.υ. (εξίσωση Bernoulli) μεταξύ των διατομών εισόδου (1) και εξόδου (2) της καμπύλης.

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + C_1\frac{U_1^2}{2g} + \Delta H_{1\to2} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + C_2\frac{U_2^2}{2g} \qquad (1.1)$$

Επειδή η καμπύλη έχει σταθερή διατομή $A=\pi d^2/4$

$$U_2 = U_1 = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4\times 0,9m^3/s}{\pi\times(0,6m)^2} \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1 = 3,183m/s \qquad (1.2)$$

Η εξίσωση Bernoulli, μετά τις απλοποιήσεις από την καταγραφή των συνθηκών που επικρατούν τοπικά,

$$U_2 = U_1 = 3,183m/s,\quad C_1=C_2,\quad \Delta H_{(1\to2)} = -H_L \quad \text{και} \quad z_2 - z_1 = 2,4m \qquad (1.3)$$

όπου $$H_L = K\frac{U^2}{2g} = 0,17\times\frac{(3,183m/s)^2}{2\times 9,81m/s^2} = 0,088m \qquad (1.4)$$

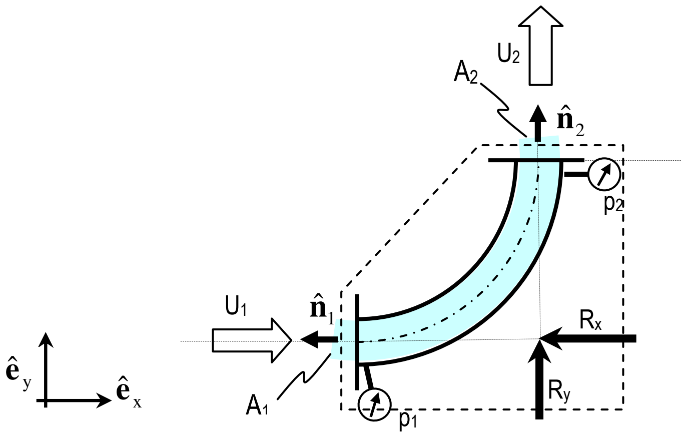
γίνεται

$$\frac{P_1}{\gamma} - (z_2 - z_1) - H_L = \frac{P_2}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1 - \rho g\left[(z_2 - z_1) + H_L\right] \quad \Rightarrow$$

$$P_2 = 3\times10^5\frac{N}{m^2} - 1000\frac{kg}{m^3}\times 9,81\frac{m}{s^2}\times(2,4m + 0,088m) = 2,766\times10^5\frac{N}{m^2} = 2,766bar \qquad (1.5)$$

Με δεδομένες πλέον τις συνθήκες στον όγκο ελέγχου μπορούμε να εφαρμόσουμε ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής.

Σχεδιάζουμε τα μοναδιαία εξωτερικά διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2$ των διατομών A_1, A_2, από τις οποίες ο όγκος ελέγχου ανταλάσσει ορμή (μάζα ×ταχύτητα νερού) με το περιβάλλον και ορίζουμε σύστημα αξόνων Oxy με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$.



<u>Ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στη διεύθυνση Ox</u>

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_i\rangle\right) = F_B \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{F}_B\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \sin\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right]$$

Το τελευταίο (δεξιά) άθροισμα του παραπάνω ισοζυγίου αποτελείται από 2 όρους.

Ο $1^{ος}$ όρος του αθροίσματος δίνει την $\hat{\mathbf{e}}_x$ -συνιστώσα του διανυσματικού αθροίσματος των δυνάμεων πίεσης στην επιφάνεια ελέγχου. Παντού στην επιφάνεια ελέγχου –εκτός των διατομών εισόδου (A_1) & εξόδου (A_2)- υφίσταται ατμοσφαιρική πίεση. Ειδικά στις διατομές εισόδου (A_1) & εξόδου (A_2) υφίσταται εκτός της ατμοσφαιρικής πίεσης και υδραυλικές πιέσεις p_1 & p_2. Οι συνολικές πιέσεις στις διατομές εισόδυ & εξόδου είναι (p_1+p_{atm}) & (p_2+p_{atm}). Επομένως, ο $1^{ος}$ όρος του αθροίσματος γίνεται

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(-(p_{atm}+p_i)A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) + \sum_{i=3}^{N}\left(-p_{atm} A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) =$$

$$= p_1 A_1 \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_1\rangle + p_2 A_2 \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_2\rangle + p_{atm}\sum_{i=1}^{N}\left(A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0$$

Αλλά για ακίνητες κλειστές επιφάνειες (στην περίπτωσή μας πολύγωνα) ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{N}\left(A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = 0$ (μπορείτε να το επιβεβαιώσετε για οποιοδήποτε κλειστό πολυγωνικό σχήμα). Έτσι,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right) = p_1 A_1 \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_1\rangle + p_2 A_2 \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_2\rangle$$

Ο $2^{ος}$ όρος του αθροίσματος δίνει την $\hat{\mathbf{e}}_x$ -συνιστώσα του διανυσματικού αθροίσματος των διατμητικών δυνάμεων στην επιφάνεια ελέγχου. Διατμητικές δυνάμεις αναπτύσσονται σε υγρές φλέβες εάν υπάρχει βαθμίδα ταχυτήτων (σχετική κίνηση μεταξύ στρώσεων της υγρής φλέβας). Στην εξεταζόμενη περίπτωση έχουμε ροή σε σωλήνα, άρα υπάρχει σχετική κίνηση λεπτότοιχων υγρών κυλίνδρων (υδάτινων στρώσεων) ομοαξονικών με το σωλήνα. Επειδή όμως η κατανομή ταχύτητας στις φλέβες που εξετάζουμε είναι αξισυμμετρική, οι βαθμίδες ταχύτητας σε κάθε σταθερή ακτίνα α ταχύτητας είναι ακτινικές και αλληλοαναιρούνται. Επομένως και οι διατμητικές δυνάμεις είναι ακτινικές και αλληλοαναιρούνται (σε κάθε υγρό κυλινδρικό δακτύλιο). Έτσι, $\sum_{i=1}^{N}\left(-\tau_i A_i \sin\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i \rangle\right) = 0$

Αντικαθιστώντας στο ισοζύγιο και τα υπόλοιπα γνωστά μεγέθη έχουμε:

$$\begin{aligned}&\rho U_1 A_1 U_1 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_1, \mathbf{U}_1\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_1\rangle + \rho U_2 A_2 U_2 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{U}_2\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{U}_2\rangle = \\ &= R_x \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, -R_x\hat{\mathbf{e}}_x\rangle + R_y \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, R_y\hat{\mathbf{e}}_y\rangle + \left[-p_1 A_1 \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_1\rangle - p_2 A_2 \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_2\rangle - 0\right] \Rightarrow\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&\rho U^2 A \cos(\pi)\cos(0) + \rho U^2 A \cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= R_x \cos(\pi) + R_y \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left[-p_1 A\cos(\pi) - p_2 A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$-\rho U^2 A + 0 = -R_x + [p_1 A - 0] \Rightarrow \quad R_x = \rho U^2 A + p_1 A \tag{1.8}$$

και με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών

$$\begin{aligned}R_x &= \left(\rho U^2 + p_1\right)\frac{\pi d^2}{4} = \left[1000\frac{kg}{m^3}\times\left(3{,}183\frac{m}{s}\right)^2 + 3{,}0\times10^5\frac{N}{m^2}\right]\times\frac{\pi}{4}(0{,}6m)^2 \\ &= \left[10131{,}49\frac{kgm}{m^2s^2} + 3{,}0\times10^5\frac{N}{m^2}\right]\times\frac{\pi}{4}(0{,}6m)^2 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$R_x = 87{,}688\times10^3\,N = 87{,}688\ kN \tag{1.9}$$

<u>Ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στη διεύθυνση Oy</u>

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_i\rangle\right) = F_B \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{F}_B\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right]$$

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο ισοζύγιο αναφορικά με το δεύτερο άθροισμα έχουμε,

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right] = -p_1 A\cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_1\rangle - p_2 A\cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_2\rangle - 0$$

και αντικαθιστώντας, το ισοζύγιο γίνεται

$$\begin{aligned}&\rho U_1 A_1 U_1 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_1, \mathbf{U}_1\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_1\rangle + \rho U_2 A_2 U_2 \cos\langle \hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{U}_2\rangle \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_2\rangle = \\ &= R_x \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, -R_x\hat{\mathbf{e}}_x\rangle + R_y \cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, R_y\hat{\mathbf{e}}_y\rangle + \left[-p_1 A\cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_1\rangle - p_2 A\cos\langle \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_2\rangle - 0\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\rho U^2 A\cos(\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\rho U^2 A\cos(0)\cos(0)=$$
$$=R_x\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+R_y\cos(0)+\left(-p_1 A\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)-p_2 A\cos(0)\right)\quad\Rightarrow \tag{1.10}$$

$$\rho U^2 = R_y - p_2 A \quad\Rightarrow\quad R_y=\left(\rho U^2+p_2\right)A \tag{1.11}$$

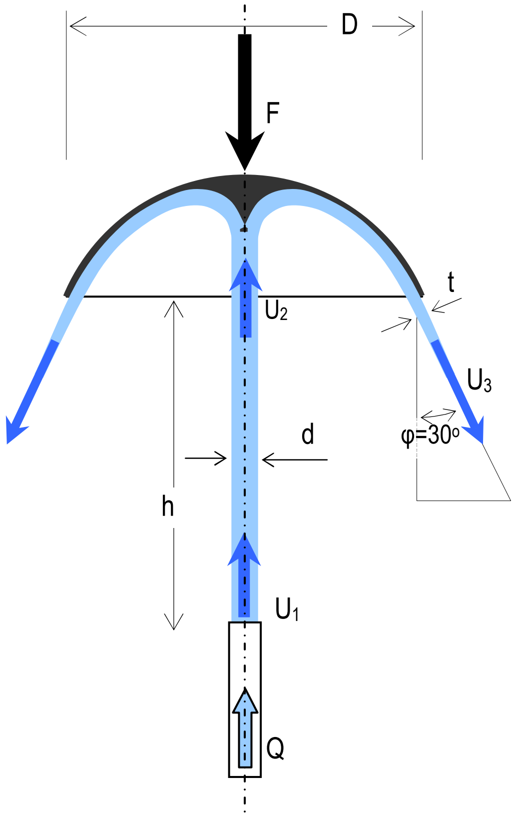
και με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών

$$R_y=\left(\rho U^2+p_2\right)A$$
$$=\left[1000\frac{kg}{m^3}\times\left(3{,}183\frac{m}{s}\right)^2+2{,}766\times10^5\ \frac{N}{m^2}\right]\times\frac{\pi}{4}(0{,}6m)^2$$
$$=\left[10131{,}49\frac{kgm}{m^2s^2}+2{,}766\times10^5\ \frac{N}{m^2}\right]\times\frac{\pi}{4}(0{,}6m)^2\quad\Rightarrow$$

$$R_y=81{,}071\times10^3\,N=81{,}071\ \ kN \tag{1.12}$$

Άσκηση 3

Ακροφύσιο Α εκτοξεύει κυλινδρική φλέβα νερού διαμέτρου d=2cm με ρυθμό Q=4 l/s. Η φλέβα του νερού προσκρούει σε έναν αναστροφέα ροής ημισφαιρικού σχήματος (κύπελο) σε ύψος h=1m ψηλότερα από το ακροφύσιο. Η φλέβα, εξερχόμενη από τον αναστροφέα, αποκτά κωνικό σχήμα με γωνία κώνου $\varphi=30^o$ ως προς τον άξονα (βλέπε σχήμα), διαμέτρου D=20cm και με πάχος τοιχώματος t=3mm . Να υπολογισθεί η δύναμη F που πρέπει να εφαρμοσθεί στον αναστροφέα προκειμένου αυτός να διατηρηθεί στη θέση του, συναρτήσει της γωνίας φ. Θεωρήστε το βάρος Β του αναστροφέα αμελητέο.



Επίλυση

Κατ'αρχάς η ταχύτητα εξόδου από το ακροφύσιο U_1 είναι

$$U_1 = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d_1^{\,2}} = \frac{4\times 4\times 10^{-3}\,m^3/s}{\pi\times(0{,}02m)^2} = 12{,}73m/s \tag{3.1}$$

Η ταχύτητα πρόσκρουσης στον αναστροφέα, U_2, δεν είναι ίση με την ταχύτητα εξόδου από το ακροφύσιο, U_1, επειδή μεσολαβεί ένα ύψος h στο οποίο η φλέβα χάνει ταχύτητα. Η ταχύτητα πρόσκρουσης U_2 στον αναστροφέα δίνεται από την έκφραση [κάνοντας ισοζύγιο υδραυλικής ενέργειας α.μ.β.υ. – Bernoulli μεταξύ των σημείων (1) & (2)]:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + C_1\frac{U_1^{\,2}}{2g} + \Delta H_{1\to 2} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + C_2\frac{U_2^{\,2}}{2g} \tag{3.2}$$

Η εξίσωση Bernoulli, μετά τις απλοποιήσεις από την καταγραφή των συνθηκών που επικρατούν τοπικά,

$$P_1=P_2=p_{atm},\;\; C_1=C_2=1,\;\; \Delta H_{(1\to 2)} = 0 \;\text{ και }\; z_2 - z_1 = h = 1{,}0m \tag{3.3}$$

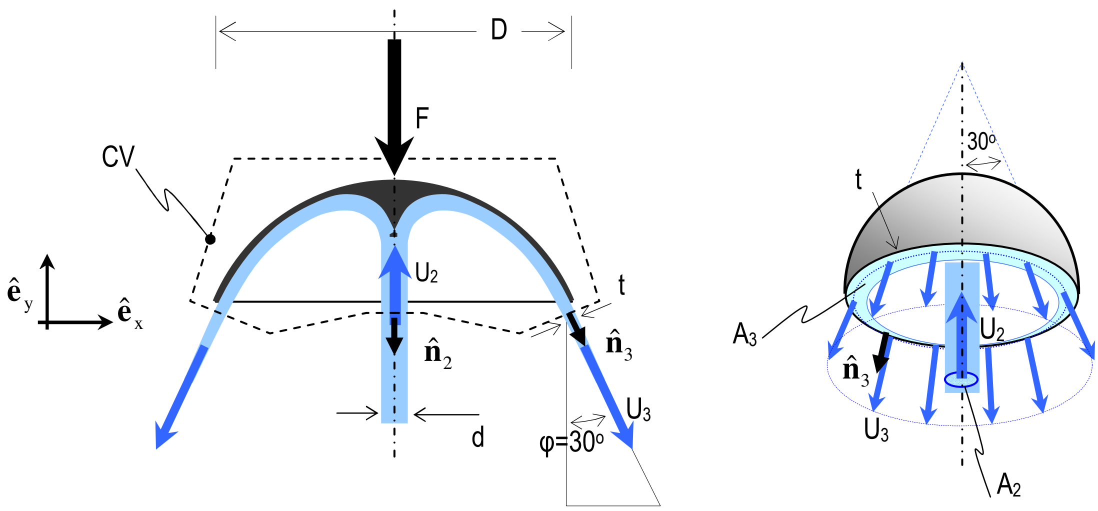
$$U_2 = \sqrt{U_1{}^2 - 2gh} = \sqrt{(12{,}73\mathrm{m/s})^2 - 2\times 1{,}0\mathrm{m}\times 9{,}81\mathrm{m/s^2}} \quad \Rightarrow \quad U_2 = 11{,}937\mathrm{m/s} \qquad (3.4)$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής σε όγκο ελέγχου που περικλείει τον αναστροφέα ροής. Εξ αιτίας της αξονικής συμμετρίας και της πρόσκρουσης της κυλινδρικής φλέβας στον άξονα του αναστροφέα το ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής θα εξετασθεί μόνο για τον κατακόρυφο άξονα (Oy).

Σχεδιάζουμε τα μοναδιαία εξωτερικά διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3$ των διατομών A_2, A_3, από τις οποίες ο όγκος ελέγχου, CV, ανταλάσσει ορμή (μάζα ×ταχύτητα νερού) με το περιβάλλον και ορίζουμε σύστημα αξόνων Oxy με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$.

Πρέπει πρώτα να υπολογισθεί η ταχύτητα εξόδου του νερού από τον αναστροφέα, U_3. Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$Q = U_3 A_3 = U_3 \pi D t \quad \Rightarrow \quad U_3 = \frac{Q}{\pi D t} = \frac{4{,}0\times 10^{-3}\mathrm{m^3/s}}{\pi\times 0{,}2\mathrm{m}\times 0{,}003\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad U_3 = 2{,}122\mathrm{m/s} \qquad (3.5)$$



Ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής στη διεύθυνση Oy

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\rho U_i A_i U_i \cos\langle\hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{U}_i\rangle \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_i\rangle\right) = F_B \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{F}_B\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left[\left(-p_i A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle - \tau_i A_i \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}_i\rangle\right)\right]$$

$$\rho U_2 A_2 U_2 \cos\langle\hat{\mathbf{n}}_2, \mathbf{U}_2\rangle \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_2\rangle + \rho U_3 A_3 U_3 \cos\langle\hat{\mathbf{n}}_3, \mathbf{U}_3\rangle \cos\langle\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{U}_3\rangle = F\cos\langle\hat{\mathbf{e}}_y, -F\hat{\mathbf{e}}_y\rangle + 0 \quad \Rightarrow \qquad (3.6)$$

$$\rho U_2{}^2 \frac{\pi d^2}{4}\cos(\pi)\cos(0) + \rho U_3{}^2 \pi D t \cos(0)\cos(\pi+\varphi) = F\cos(\pi) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \rho U_2{}^2 \frac{\pi d^2}{4} + \rho U_3{}^2 \pi D t \cos\varphi} \qquad (3.7)$$

και με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών

$$
\begin{aligned}
F &= \rho U_2{}^2 \frac{\pi d^2}{4} + \rho U_3{}^2 \pi D t \cos\frac{\pi}{6} \\
&= \pi \times 1000 \frac{kg}{m^3} \times \left[\left(11{,}94 \frac{m}{s}\right)^2 \times \frac{(0{,}02m)^2}{4} + \left(2{,}122 \frac{m}{s}\right)^2 \times 0{,}2m \times 0{,}003m \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\
&= 52{,}13 \frac{kg}{m^3} \frac{m^4}{s^2} = 52{,}13N
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$