ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΙΙ

Ροές με ελεύθερη επιφάνεια

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί η παροχή εξ αιτίας *ομοιόμορφης ροής* νερού σε ορθογωνικό κανάλι που κατασκευάζεται από αφινίριστο σκυρόδεμα (unfinished concrete) και η κοίτη του οποίου έχει κλίση S=0,0101m/m, με πλάτος 2,0m και βάθος ροής 0,530m. Να χαρακτηρισθεί η ροή.

Επίλυση

Για τον προσδιορισμό της μέσης ταχύτητας της ροής μετρημένη σε (m/s) θα εφαρμόσουμε την εμπειρική εξίσωση του Manning (Τερζίδης, 1996, Μαθήματα Υδραυλικής 3, εξ. 6.4.3) που δίνει την κλίση των τριβών, S_f (=-dH/dx), συναρτήσει του συντελεστή τραχύτητας των τοιχωμάτων του καναλιού, n, της μέσης ταχύτητας της ροής, U, και της υδραυλικής ακτίνας της ροής

$$S_f = \frac{n^2 U^2}{R_h^{4/3}}, \tag{1.1}$$

η οποία με αλγεβρικές πράξεις διατυπώνεται και στη σχέση Chezy-Manning

$$U = C\sqrt{R_h S_f} \text{ (Chezy) όπου } C = \frac{1}{n}\left(R_h\right)^{1/6} \text{ (Manning)} \tag{1.2}$$

Την τιμή του συντελεστή τραχύτητας, n, θα την πάρουμε από τους κατάλληλους πίνακες (π.χ. βλέπε Κορωνάκης, 2005, σελ. 254 ή από Πίνακα Π.1 Β-2.c.4 *“Lined or Built-up Channels/ Nonmetal/Concrete/Unfinished”* του Παραρτήματος ΙΙΙ). Από του πίνακες αυτούς προκύπτει το παρακάτω εύρος τιμών του n

$0{,}014<n<0{,}020$ και με μέση τιμή σχεδιασμού n=0,017

ΠΡΟΣΟΧΗ ! Σε μερικά συγγράμματα, βιβλία, εγχειρίδια, τεχνικές οδηγίες κλπ μπορεί να μη αναφέρεται ο τύπος του Manning με αυτήν ακριβώς τη μορφή ή με τς ίδιες ακριβώς μεταβλητές, ή να αναφέρεται ο τύπος του Chezy. Για παράδειγμα, μπορεί τη μεταβλητή που αναφέρεται στο συντελεστή αντίστασης (ή συντελεστή τριβής ή ....) να μη συμβολίζεται με “n” αλλά με “C” ή “k” ή κάτι άλλο. Κάθε τύπος αποτελεί μια εμπειρική αριθμητική έκφραση που περιγράφει το ίδιο φυσικό φαινόμενο (τοπική απώλεια υδραυλικής ενέργειας λόγω τριβών) αλλά ενδεχομένως μετρημένο με διαφκαι όχι μιορετικό τρόπο και διαφορετικές μεζούρες. Θα πρέπει να είσαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί και να μην μπλέκετε τις διάφορες μεταβλητές από διαφορετικές εκφράσεις ή διαφορετικά βιβλία πίνακες κλπ.

Από τα γεωμετρικά στοιχεία της ροής στο κανάλι προκύπτει υδραυλική ακτίνα

$$R_h = \frac{A}{P_w} = \frac{by}{b+2y} = \frac{2{,}0\text{m} \times 0{,}530\text{m}}{2{,}0\text{m} + 2\times 0{,}53\text{m}} \quad \Rightarrow \quad R_h = 0{,}346\text{m} \tag{1.3}$$

Τώρα, σύμφωνα με τα δεδομένα, **η ροή είναι ομοιόμορφη**,

επομένως **η γραμμή της ολικής ενέργειας, είναι παράλληλη με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού και την κοίτη του καναλιού**, επομένως οι τρείς κλίσεις, τριβών, S_f, ελεύθερης επιφάνειας νερού, S_w, και πυθμένα καναλιού, S_o, είναι ίσες, δηλαδή

$$S_f=S_w=S_o \tag{1.4}$$

Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα (Προσοχή: ή σχέση Chezy/Manning είναι μια αριθμητική σχέση – δε χρησιμοποιούμε μονάδες, η τιμή του R_h αναφέρεται σε m και το αποτέλεσμα για την ταχύτητα σε m/s, n και S_o είναι αδιάστατα)

$$U = \frac{1}{n}\left(R_h\right)^{2/3}\sqrt{S_0} = \frac{1}{0{,}017}\times\sqrt[3]{0{,}346^2}\times\sqrt{0{,}0101} \quad\Rightarrow\quad U = 2{,}914 \quad [m/s] \tag{1.5}$$

και την παροχή

$$Q = UA = Uby = 2{,}914 m/s \times 2{,}0 m \times 0{,}53 m \quad\Rightarrow\quad Q = 3{,}089 m^3/s \tag{1.6}$$

Η μέση ταχύτητα και η παροχή για τις ακραίες τιμές του συντελεστή τραχύτητας υπολογίζονται αντίστοιχα:

$0{,}014<n<0{,}020 \quad\Leftrightarrow\quad 3{,}538 m/s > U > 2{,}4769 m/s \quad\Leftrightarrow\quad 3{,}751\ m^3/s > Q > 2{,}626 m^3/s$

Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε τη ροή θα υπολογίσουμε τους αδιάστατους αριθμούς Reynolds και Froude.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το κυριότερο χαρακτηριστικό της δεδομένης ροής είναι οτι είναι ομοιόμορφη (δηλαδή η μέση ταχύτητα της ροής, U, δε μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού). Αυτό μας δόθηκε στην εκφώνηση ως δεδομένο, άμεσα. Ενδέχεται να μη μας δίνεται άμεσα ως δεδομένο αλλά να μπορούμε να το συμπεράνουμε από άλλα δεδομένα. Για παράδειγμα, έστω οτι μας δινόταν οτι «*η διατομή του αγωγού παραμένει αμετάβλητη σε όλο το μήκος του (πρισματικός αγωγός) όπως επίσης και το βάθος ροής (παραμένει αμετάβλητο σε όλο το μήκος του αγωγού)*». Σε μια τέτοια περίπτωση από την εφαρμογή του νόμου συνέχειας (ισοζύγιο παροχής μάζας / όγκου νερού) προκύπτει οτι η ταχύτητα παραμένει αμετάβλητη και συμπεραίνουμε οτι η ροή είναι ομοιόμορφη.

Από πίνακες με τις φυσικές ιδιότητες του νερού βρίσκουμε τις τιμές της πυκνότητας και του δυναμικού ιξώδους (υποθέτουμε θερμοκρασία 20^oC), $\rho=998 kg/m^3$ και $\mu=1{,}0\times10^{-3} Ns/m^2$ αντίστοιχα. Τότε

Ο αριθμός Reynolds,

$$Re = \frac{4R_h\rho U}{\mu} = \frac{4\times 0{,}346 m\times 998 kg/m^3\times 2{,}914 m/s}{1{,}0\times10^{-3} Ns/m^2} \quad\Rightarrow\quad Re = 4{,}03\times10^6 > 10000 \tag{1.7}$$

και ο αριθμός Froude

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gy}} = \frac{2{,}914 m/s}{\sqrt{9{,}81 m/s^2\times 0{,}53 m}} \quad\Rightarrow\quad Fr = 1{,}278 > 1 \tag{1.8}$$

Άρα η ροή είναι τυρβώδης (πλήρως ανεπτυγμένη - Re>10000) και υπερκρίσιμη (Fr>1)

Πρόσθετη εκτίμηση

Αφού η ροή είναι υπερκρίσιμη κάπου κατάντη θα δημιουργηθεί υδραυλικό άλμα (Υ/Α), μόλις, ή εάν και εφόσον, η τιμή του Froude μειωθεί σε μικρότερη από 1, είτε λόγω τριβών -

οπότε θα μειωθεί η ταχύτητα και θα αυξηθεί το βάθος ροής, είτε λόγω εμποδίου στη ροή – υπερχειλιστής κλπ, είτε λόγω μείωσης της κλίσης του αγωγού.

Προσοχή ! Αυτό δεν μορούμε να προβλέψουμε εάν θα γίνει ή πότε θα γίνει γιατί δεν έχουμε τα αντίστοιχα δεδομένα. Λύσαμε το πρόβλημα μόνο για την περιοχή της ροής ή το μήκος του αγωγού για τα οποία μας δίνεται οτι η ροή είναι ομοιόμορφή.

Στην περίπτωση που θα δημιουργείτο υδραυλικό άλμα (Υ/Α) σε κάποιο οριζόντιο τμήμα του αγωγού, για να προσδιορίσουμε τη νέα κατάσταση της ροής μετά το άλμα θα εφαρμόσουμε ισοζύγιο ροής γραμμικής ορμής σε όγκο ελέγχου που περιέχει το άλμα[1]:

$$\rho U_1 U_1 A_1 - \rho U_2 U_2 A_2 = p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad \Rightarrow$$

$$\rho U_1 U_1 (y_1 b) - \rho U_2 U_2 (y_2 b) = \left(\frac{1}{2}\rho g y_2\right)(y_2 b) - \left(\frac{1}{2}\rho g y_1\right)(y_1 b) \quad \Rightarrow \tag{1.9}$$

$$\rho U_1 Q - \rho U_2 Q = \frac{1}{2}\rho g {y_2}^2 b - \frac{1}{2}\rho g {y_1}^2 b \quad \Rightarrow \quad (U_1 - U_2)Q = U_1\left(1 - \frac{y_1}{y_2}\right)Q = \frac{1}{2} g b\left({y_2}^2 - {y_1}^2\right)$$

$$U_1 \frac{y_2 - y_1}{y_2} Q = \frac{1}{2} g b (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) \overset{y_2 \neq y_1}{\Longrightarrow} y_2(y_2 + y_1) - \frac{2}{gb} U_1 Q = 0 \quad \Rightarrow$$

$$ {y_2}^2 + y_1 y_2 - \frac{2}{gb} U_1 Q = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{-y_1 \pm \sqrt{{y_1}^2 + 8U_1 Q/(gb)}}{2} \overset{y_2>0}{\Longrightarrow}$$

$$y_2 = \frac{-y_1 + \sqrt{{y_1}^2 + 8U_1 Q/(gb)}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{y_1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8{U_1}^2/(g y_1)}\right] \tag{1.10}$$

και θέτοντας $Fr_1 = \frac{{U_1}^2}{g y_1}$ η παραπάνω σχέση γίνεται $y_2 = \frac{y_1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1}\right)$ (1.11)

που είναι η γνωστή έκφραση [[Τερζίδης. Γ. 1996 «Μαθήματα Υδραυλικής 1 - Γενική Υδραυλική», Παρ. 3.4.5, έκφραση (3.4.48)] και Τερζίδης, Γ. 1996 «Μαθήματα Υδραυλικής 3 Ανοικτοί Αγωγοί», Παρ. 6.7.3, έκφραση (6.7.33)] που συνδέει τα βάθη ροής ενός Υ/Α σε οριζόντιο αγωγό, οπότε αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε:

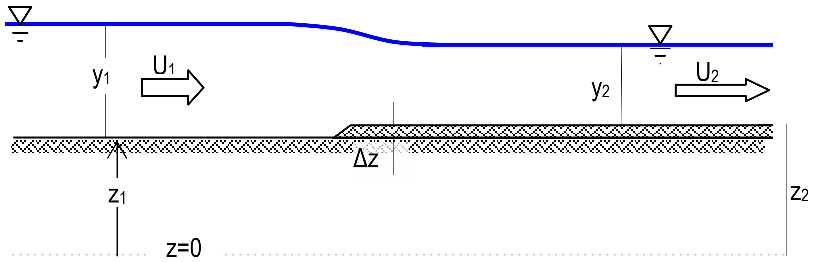
$$y_2 = \frac{0{,}53\text{m}}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8 \times 1{,}278}\right) \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0{,}623\text{m} \tag{1.11}$$

[1] εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli –ισοζύγιο ολικής υδραυλικής ενέργειας – δεν εξυπηρετεί γιατί εμφανίζεται ένας παραπάνω άγνωστος, οι απώλειες της υδραυλικής ενέργειας της ροής στο άλμα

Άσκηση 2

Έστω ροή σε ένα οριζόντιο κανάλι ορθογωνικής διατομής πλάτους b=3m. Η παροχή είναι $Q=9m^3/s$ και το ύψος της στάθμης της ροής είναι $y_1=1{,}5m$. Από κάποιο σημείο του καναλιού και μετά η κοίτη ανυψώνεται με ένα ομαλό αναβαθμό (σκαλοπάτι) κατά 17cm. Χαρακτηρίσατε τη ροή (τυρβώδης, στρωτή, κρίσιμη, υπερκρίσιμη, υποκρίσιμη κλπ) πριν και μετά τον αναβαθμό.

Υποθέστε ότι οι απώλειες λόγω τριβής είναι αμελητέες. Είναι αποδεκτή αυτή η υπόθεση?



Επίλυση

Ροή στο κανάλι πριν τον αναβαθμό (δείκτης 1)

Μέση ταχύτητα της ροής στη διατομή (1), U_1,

$$Q = U_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{Q}{by_1} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{9m^3/s}{3m \times 1{,}5m} \quad \Rightarrow \quad U_1 = 2{,}0m/s \tag{2.1}$$

Υδραυλική ακτίνα, R_{H1} στο τμήμα (1)

$$R_{h1} = \frac{A_1}{P_w} = \frac{by_1}{b+2y_1} \quad \Rightarrow \quad R_{h1} = \frac{3m \times 1{,}5m}{3m + 2 \times 1{,}5m} \quad \Rightarrow \quad R_{h1} = 1{,}5m \tag{2.2}$$

Αριθμός Reynolds, στο τμήμα (1)

$$Re_1 = \frac{4R_h U}{\nu} \quad \Rightarrow \quad Re_1 = \frac{4 \times 1{,}5m \times 2{,}0m/s}{1{,}12 \times 10^{-6} m^2/s} \quad \Rightarrow \quad Re_1 = 1{,}071 \times 10^7 m/s \tag{2.3}$$

Επειδή $Re>10^5$, η ροή στο τμήμα (1) του καναλιού είναι τυρβώδης, πλήρως ανεπτυγμένη.

Άρα είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες.

Ο αδιάστατος αριθμός Froude στη διατομή (1) είναι

$$F_{R1} = \frac{U_1}{\sqrt{gy_1}} \quad \Rightarrow \quad F_{R1} = \frac{2{,}0m/s}{\sqrt{9{,}81m/s^2 \times 1{,}5m}} \quad \Rightarrow \quad F_{R1} = 0{,}521 < 1 \tag{2.4}$$

Άρα η ροή είναι υποκρίσιμη (βλέπε και σχετικό διάγραμμα E-y).

Υπολογίζουμε ακόμα μερικά μεγέθη (για το πρώτο τμήμα του καναλιού) τα οποία θα μας χρειασθούν στη συνέχεια της ανάλυσης.

Ειδική παροχή, q_1:

$$q_1 = \frac{Q}{b} = \frac{9{,}0m^3/s}{3{,}0m} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 3{,}0m^2/s \tag{2.5}$$

Ειδική ενέργεια, E_1:

$$E_1 = y_1 + \frac{U_1^{\,2}}{2g} = y_1 + \frac{q_1^{\,2}}{2gy_1^{\,2}} = 1{,}5\text{m} + \frac{\left(3{,}0\text{m}^2/\text{s}\right)^2}{2\times\left(9{,}81\text{m}/\text{s}^2\right)\times\left(1{,}5\text{m}\right)^2} \Rightarrow E_1 = 1{,}7039\text{m} \qquad (2.6)$$

Ροή στο κανάλι μετά τον αναβαθμό (δείκτης 2)

Θέτουμε τη στάθμη αναφοράς υψομέτρων κάτω από τον πυθμένα του καναλιού πριν τον αναβαθμό. Μετά τον αναβαθμό το υψόμετρο z της κοίτης του καναλιού αυξάνει και γίνεται

$$z_2 = z_1 + 0{,}17\text{m} \Rightarrow z_2 - z_1 = 0{,}17\text{m}$$

Για να προσδιορίσουμε το νέο ύψος της στάθμης της ροής y_2, θα εξετάσουμε τη μεταβολή της συνολικής υδραυλικής ενέργειας, Η, και της ειδικής ενέργειας, Ε.

Η ειδική παροχή, q_2, παραμένει ίδια αφού δεν αλλάζει το πλάτος του καναλιού:

$$q_2 = q_1 = q = 3{,}0\text{m}^2/\text{s} \qquad (2.7)$$

Εφ'όσον υποθέσαμε ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες, η συνολική υδραυλική ενέργεια α.μ.β.υ. διατηρείται και στα δύο τμήματα του καναλιού.

$$H_1 = H_2 \Rightarrow z_1 + y_1 + \frac{U_1^{\,2}}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{U_2^{\,2}}{2g} \Rightarrow z_1 + y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^{\,2}} = z_2 + y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^{\,2}} \Rightarrow$$

$$E_1 - \left(z_2 - z_1\right) = E_2 \Rightarrow E_2 = E_1 - \left(z_2 - z_1\right) = 1{,}704\text{m} - 0{,}17\text{m} \Rightarrow E_2 = 1{,}534\text{m} \qquad (2.8)$$

Με βάση αυτήν την τιμή της ειδικής ενέργειας E_2=1,504m και τη σχέση E-y, μπορούμε να υπολογίσουμε τη στάθμη της ροής y_2:

$$E_2 = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^{\,2}} \Leftrightarrow E_2 - y_2 - \frac{q^2}{2gy_2^{\,2}} = 0 \Leftrightarrow y_2^{\,3} - E_2 y_2^{\,2} + \frac{q^2}{2g} = 0 \qquad (2.9)$$

$$y_2^{\,3} - E_2 y_2^{\,2} + \frac{q^2}{2g} = 0 \Rightarrow y_2 = 1{,}23\text{m} \qquad (2.10)$$

η οποία επιλύεται αριθμητικά, π.χ. με μέθοδο Newton-Raphson (βλέπε Παράρτημα) με $f(y_2) = y_2^{\,3} - E_2 y_2^{\,2} + \frac{q^2}{2g}$ & $f'(y_2) = 3y_2^{\,2} - 2E_2 y_2$, q_2=3,0m^2/s και E_2=1,534m, ως ακολούθως:

i	$y_{2,i}$	$f(y_{2,i})$	$f'(y_{2,i})$=df/dy
1	2	2,3227156	5,864
2	1,603903	0,6385401	2,796737
3	1,375586	0,1589594	1,456415
4	1,266442	0,029586	0,926182
5	1,234498	0,002279	0,784516
6	1,231593	1,828E-05	0,771937
7	1,231569	1,212E-09	0,771835
8	1,231569	0	0,771835

και δίνει ως αποτέλεσμα $y_2 = 1{,}23\text{m}$

Η υδραυλική ακτίνα, R_{H2} στο τμήμα (2) μετά τον αναβαθμό είναι

$$R_{h2} = \frac{A_2}{P_{w2}} = \frac{by_2}{b + 2y_2} = \frac{3m \times 1{,}23m}{3m + 2 \times 1{,}23m} \Rightarrow R_{h2} = 0{,}676m \quad (2.11)$$

Μέση ταχύτητα της ροής στη διατομή (2), U_2,

$$Q = U_2 A_2 \Rightarrow U_2 = \frac{Q}{b_2 y_2} = \frac{9m^3/s}{3m \times 1{,}23m} \Rightarrow U_2 = 2{,}44m/s \quad (2.12)$$

Ο αριθμός Reynolds, στο τμήμα (2) είναι

$$Re_2 = \frac{4R_{h2}U_2}{\nu} = \frac{4 \times 0{,}676m \times 2{,}44m/s}{1{,}12 \times 10^{-6} m^2/s} \Rightarrow Re_2 = 5{,}89 \times 10^6 m/s \quad (2.13)$$

Άρα $Re_2 < Re_1$. Επίσης, επειδή $Re_2 > 10^5$, η ροή στο τμήμα (2) του καναλιού είναι και αυτή τυρβώδης, πλήρως ανεπτυγμένη. Άρα και στο τμήμα (2), η υπόθεση ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες ισχύει.

Ο αδιάστατος αριθμός Froude για τη ροή μετά τον αναβαθμό είναι

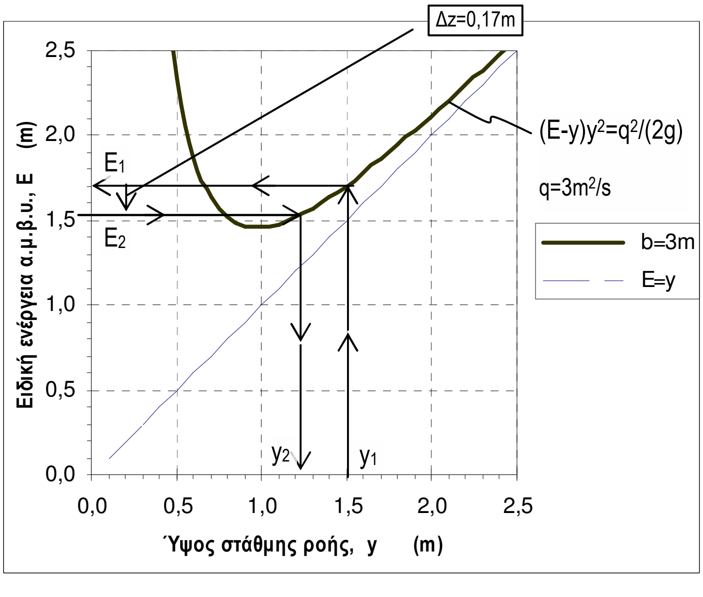
$$F_{R2} = \frac{U_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{2{,}44m/s}{\sqrt{9{,}81m/s^2 \times 1{,}23m}} \Rightarrow F_{R2} = 0{,}702 < 1 \quad (2.14)$$

Άρα η ροή είναι υποκρίσιμη και μπορεί να διατηρηθεί (δε θα υπάρξει άλμα) και στο δεύτερο τμήμα του καναλιού.

Γραφική επίλυση (εναλλακτικά)

Και στα δύο τμήματα του καναλιού (πριν και μετά τον αναβαθμό) αντιστοιχεί το ίδιο διάγραμμα ειδικής ενέργειας έναντι ύψους στάθμης (E-y) επειδή το πλάτος του καναλιού παραμένει σταθερό (βλέπε διάγραμμα).

Οι ροές στα δύο τμήματα του καναλιού (πριν και μετά τον αναβαθμό) αντιστοιχούν σε διαφορετικά ζεύγη (E_1,y_1) & (E_2,y_2) της ίδιας καμπύλης (E-y). Με βάση την τιμή του βάθους της ροής $y_1=1{,}5m$ προσδιορίζουμε την ειδική ενέργεια από την καμπύλη $(E-y)y^2=q^2/(2g)$ για ($q=3m^2/s$) (το $y_1=1{,}5m$ αντιστοιχεί σε $E_1=1{,}704m$) την οποία στη συνέχεια υποβιβάζουμε κατά το ποσό που κέρδισε η ροή λόγω υψομετρικής διαφοράς (Δz=017cm). Έτσι παίρνουμε την ειδική ενέργεια της ροής μετά τον αναβαθμό ($E_2=1{,}534m$), οπότε προσδιορίζουμε από την ίδια καμπύλη (E-y) το βάθος ροής που αντιστοιχεί σε αυτή ($y_2=1{,}23m$).



Συζήτηση

Το πρόβλημα επιλύθηκε με δύο τρόπους (αναλυτικά και γραφικά).

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι:

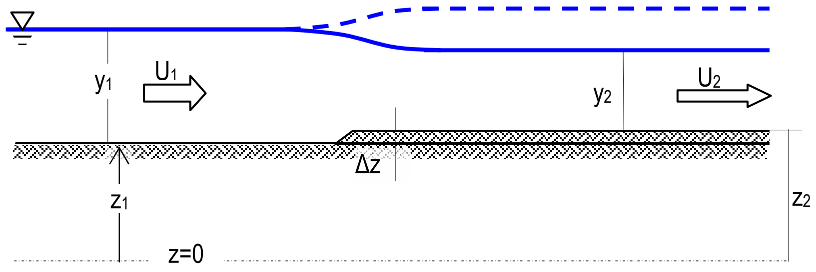
Για υποκρίσιμη (ποτάμια) ροή, $y_2<y_1 \rightarrow A_2<A_1$ και $U_2>U_1$

όπως ακριβώς θα γινόταν σε ροή σε κλειστό αγωγό στον οποίο μειώνεται η διάμετρος.

Άσκηση 3

Έστω ροή σε ένα οριζόντιο κανάλι ορθογωνικής διατομής πλάτους b. Η παροχή είναι Q και το ύψος της στάθμης της ροής είναι y_1. Από κάποιο σημείο του καναλιού και μετά η κοίτη ανυψώνεται με ένα ομαλό αναβαθμό (σκαλοπάτι) κατά Δz=t. Να εξετάσετε τι θα γίνει με το νέο βάθος της ροής μετά τον αναβαθμό.

Υποθέστε ότι οι απώλειες λόγω τριβής είναι αμελητέες.



Επίλυση

Ροή στο κανάλι πριν τον αναβαθμό (δείκτης 1)

Υπολογίζουμε μερικά μεγέθη (για το πρώτο τμήμα του καναλιού) τα οποία θα μας χρειασθούν στη συνέχεια της ανάλυσης.

Ειδική παροχή, q_1: $q_1 = \dfrac{Q}{b}$ (3.1)

Ειδική ενέργεια, E_1: $E_1 = y_1 + \dfrac{U_1^2}{2g} = y_1 + \dfrac{q_1^2}{2gy_1^2}$ (3.2)

Ροή στο κανάλι μετά τον αναβαθμό (δείκτης 2)

Θέτουμε τη στάθμη αναφοράς υψομέτρων στην κοίτη του καναλιού πριν τον αναβαθμό. Έτσι z_1=0. Μετά τον αναβαθμό το υψόμετρο z της κοίτης του καναλιού αυξάνει και γίνεται

$$z_2 = z_1 + t \quad \Rightarrow \quad z_2 = t \tag{3.3}$$

Για να προσδιορίσουμε το νέο ύψος της στάθμης της ροής y_2, θα χρησιμοποιήσουμε το ισοζύγιο ροής ολικής ενέργειας ανά μονάδα βάρους υγρού (α.μ.β.υ.).

Θα εξετάσουμε τη συνολική υδραυλική ενέργεια, Η, και την ειδική ενέργεια, Ε, στις δύο διατομές εκατέρωθεν του αναβαθμού.

Εφ'όσον υποθέσαμε ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες, $\Delta E_{1\to 2} \approx 0$, η συνολική υδραυλική ενέργεια α.μ.β.υ. διατηρείται και στα δύο τμήματα του καναλιού.

$$H_1 - \Delta E_{1\to 2} = H_2 \quad \overset{\Delta E_{1\to 2}=0}{\Rightarrow} \quad z_1 + y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{U_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad z_1 + E_1 = z_2 + E_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 + E_1 = t + E_2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 - t \quad \Rightarrow \quad 0 + E_1 = t + E_2 \quad \Rightarrow$$

(3.4

$$E_2 = E_1 - t$$

Η ειδική παροχή, q_2, παραμένει ίδια αφού δεν αλλάζει το πλάτος του καναλιού:

$$q_2 = q_1 = q \tag{3.5}$$

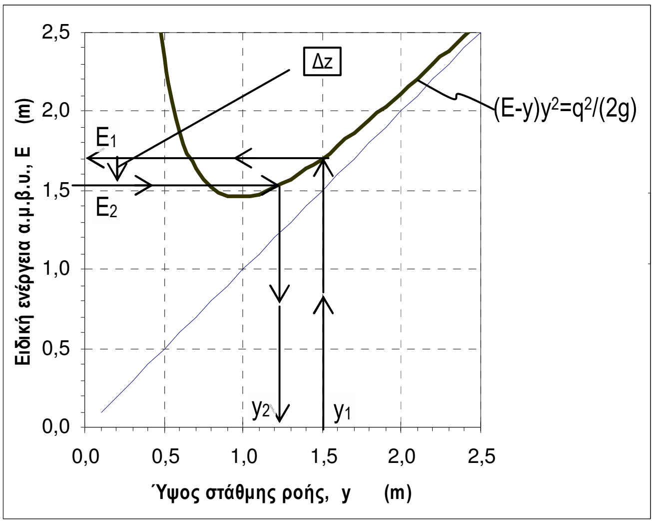
Γραφική επίλυση

Και στα δύο τμήματα του καναλιού (πριν και μετά τον αναβαθμό) αντιστοιχεί το ίδιο διάγραμμα ειδικής ενέργειας έναντι ύψους στάθμης (E-y) επειδή το πλάτος του καναλιού παραμένει σταθερό (βλέπε διάγραμμα) και, επομένως, η ειδική παροχή, q, είναι σταθερή.

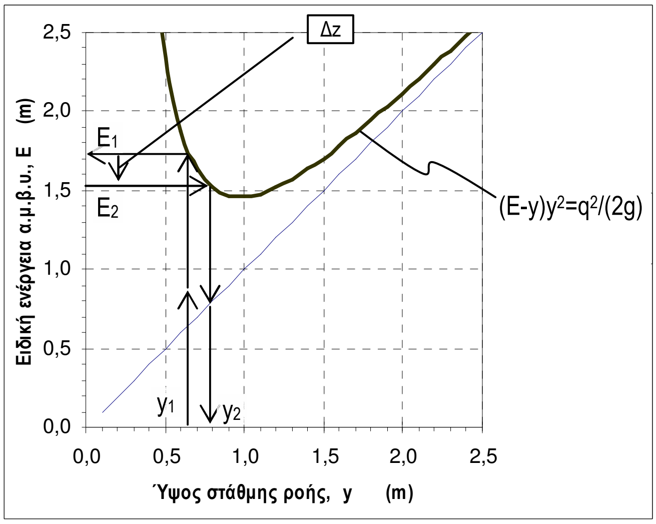
Οι ροές στα δύο τμήματα του καναλιού (πριν και μετά τον αναβαθμό) αντιστοιχούν σε διαφορετικά ζεύγη (E_1,y_1) & (E_2,y_2) της ίδιας καμπύλης (E-y).

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το εάν η τιμή του βάθους της ροής y_1 είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το κρίσιμο βάθος, εάν δηλαδή η ροή πριν τον αναβαθμό είναι ποτάμια (υποκρίσιμη ροή – περίπτωση A) ή χειμαρρώδης (υπερκρίσιμη ροή – περίπτωση B) αντίστοιχα. Προσδιορίζουμε την ειδική ενέργεια από την καμπύλη $(E-y)y^2=q^2/(2g)$ -το y_1 αντιστοιχεί σε E_1- την οποία στη συνέχεια υποβιβάζουμε κατά το ποσό που κέρδισε η ροή λόγω υψομετρικής διαφοράς, Δz. Έτσι παίρνουμε την ειδική ενέργεια της ροής μετά τον αναβαθμό $E_2=E_1-\Delta z$ οπότε προσδιορίζουμε από την ίδια καμπύλη (E-y) το βάθος ροής που αντιστοιχεί σε αυτή, y_2.

Περίπτωση A (ποτάμια ροή)



Περίπτωση B (χειμαρρώδης ροή)



Συζήτηση

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι:

Υποκρίσιμη (ποτάμια) ροή, $y_2<y_1$ → $A_2>A_1$ και $U_2<U_1$

Υπερκρίσιμη (χειμαρώδης) ροή, $y_2>y_1$ → $A_2>A_1$ και $U_2<U_1$

Άσκηση 4

Νερό ρέει με μέση ταχύτητα 3,0m/s και με βάθος ροής 3,0m σε ένα ορθογωνικό κανάλι με λεία τοιχώματα. Να υπολογιστεί η μέγιστη ανύψωση από την κοίτη του καναλιού ενός αναβαθμού (‘σκαλοπατιού’) έτσι ώστε να διατηρηθούν οι ροϊκές συνθήκες (τυρβώδης, στρωτή, κρίσιμη, υπερκρίσιμη, υποκρίσιμη κλπ).

Υπόθεση: οι απώλειες λόγω τριβής είναι αμελητέες στον αναβαθμό.

Επίλυση

Τα χαρακτηριστικά της ροής ανάντι του αναβαθμού (δείκτης 1)είναι

Ειδική ενέργεια, E_1:

$$E_1 = y_1 + \frac{U_1^{\,2}}{2g} = 3{,}0\mathrm{m} + \frac{(3{,}0\mathrm{m/s})^2}{2 \times 9{,}81\mathrm{m/s^2}} \quad \Rightarrow \quad E_1 = 3{,}459\mathrm{m} \tag{4.1}$$

Η μέγιστη ανύψωση του αναβαθμού, Δz_{max}, θα είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ της ανάντι ειδικής ενέργειας και της ελάχιστης ειδικής ενέργειας (προκειμένου να διατηρηθούν οι συνθήκες της ροής κατάντι του αναβαθμού) η οποία είναι αυτή που παρατηρείται σε συνθήκες κρίσιμης ροής (με κρίσιμο βάθος ροής), ήτοι

$$\Delta z_{max} = E_1 - E_{min} \tag{4.2}$$

Το κρίσιμο βάθος μιας ροής, y_c, δίνεται από την έκφραση:

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(Q/b)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(Uy)^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(3{,}0\mathrm{m/s} \times 3{,}0\mathrm{m})^2}{9{,}81\mathrm{m/s^2}}} \quad \Rightarrow \quad y_c = 2{,}021\mathrm{m} \tag{4.3}$$

Γνωρίζουμε ότι σε συνθήκες κρίσιμης ροής ισχύει η σχέση μεταξύ κρίσιμου βάθους και ελάχιστης ειδικής ενέργειας:

$$y_c = \frac{2}{3} E_{min} \tag{4.4}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω με τα δεδομένα έχουμε

$$E_{min} = \frac{3}{2} y_c = \frac{3}{2} \times 2{,}02\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad E_{min} = 3{,}032\mathrm{m} \tag{4.5}$$

Επομένως η μέγιστη ανύψωση του αναβαθμού προκύπτει

$$\Delta z_{max} = E_1 - E_{min} = 3{,}459\mathrm{m} - 3{,}032\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \Delta z_{max} = 0{,}427\mathrm{m} \tag{4.6}$$

Άσκηση 5

Έστω ροή σε ένα οριζόντιο κανάλι ορθογωνικής διατομής. Η παροχή είναι $Q=9m^3/s$. Σε μια περιοχή, το κανάλι διευρύνεται ομαλά και το πλάτος του αυξάνει από $b_1=3m$ σε $b_2=4m$. Σε μια τυπική διατομή πριν τη διεύρυνση, το ύψος της στάθμης του νερού είναι $y_1=1{,}20m$. Χαρακτηρίσατε τη ροή (τυρβώδης, στρωτή, κρίσιμη, υπερκρίσιμη, υποκρίσιμη κλπ).

Πως θα μετασχηματιστεί η ροή κατάντη (δηλ. μετά) τη διεύρυνση? Τι θα παρατηρήσει κάποιος? Μπορεί η ροή στη διατομή (2) να διατηρηθεί? Τι θα συμβεί?

Υποθέστε ότι οι τριβές είναι αμελητέες. Είναι αποδεκτή αυτή η υπόθεση?

Επίλυση

Ανάντι της διεύρυνσης

Μέση ταχύτητα της ροής στη διατομή (1), U_1,

$$Q = U_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{Q}{b_1 y_1} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{9m^3/s}{3m \times 1{,}2m} \quad \Rightarrow \quad U_1 = 2{,}5m/s \tag{5.1}$$

Υδραυλική ακτίνα, R_{H1} στο τμήμα (1)

$$R_{h1} = \frac{A_1}{P_w} = \frac{b_1 y_1}{b_1 + 2y_1} \quad \Rightarrow \quad R_{h1} = \frac{3m \times 1{,}2m}{3m + 2 \times 1{,}2m} \quad \Rightarrow \quad R_{h1} = 0{,}667m \tag{5.2}$$

Αριθμός Reynolds, στο τμήμα (1)

$$Re_1 = \frac{4R_h U}{\nu} \quad \Rightarrow \quad Re_1 = \frac{4 \times 0{,}667m \times 2{,}5m/s}{1{,}12 \times 10^{-6} m^2/s} \quad \Rightarrow \quad Re_1 = 5{,}96 \times 10^6 m/s \tag{5.3}$$

Επειδή $Re>10^5$, η ροή στο τμήμα (1) του καναλιού είναι τυρβώδης, πλήρως ανεπτυγμένη.

Άρα είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες.

Ο αδιάστατος αριθμός Froude στη διατομή (1) είναι

$$F_{R1} = \frac{U_1}{\sqrt{g y_1}} \quad \Rightarrow \quad F_{R1} = \frac{2{,}5m/s}{\sqrt{9{,}81m/s^2 \times 1{,}2m}} \quad \Rightarrow \quad F_{R1} = 0{,}729 < 1 \tag{5.4}$$

Άρα η ροή είναι υποκρίσιμη (βλέπε σχετικό διάγραμμα) και μπορεί να διατηρηθεί (δε θα υπάρξει άλμα) για το πρώτο τουλάχιστον τμήμα του καναλιού.

Υπολογίζουμε ακόμα μερικά μεγέθη (για το πρώτο τμήμα του καναλιού) τα οποία θα μας χρειασθούν στη συνέχεια της ανάλυσης.

Ειδική παροχή, q_1:

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{9{,}0m^3/s}{3{,}0m} \quad \Rightarrow \quad q_1 = 3{,}0m^2/s \tag{5.5}$$

Ειδική ενέργεια, E_1:

$$E_1 = y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = y_1 + \frac{q_1^2}{2g y_1^2} = 1{,}2m + \frac{\left(3{,}0m^2/s\right)^2}{2 \times \left(9{,}81m/s^2\right) \times \left(1{,}2m\right)^2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = 1{,}5186m \tag{5.6}$$

Κατάντη της διεύρυνσης

Στο δεύτερο τμήμα του καναλιού το πλάτος του, b_2, αυξάνει. Για να προσδιορίσουμε το νέο ύψος της στάθμης της ροής b_2, θα εξετάσουμε τη μεταβολή της συνολικής υδραυλικής ενέργειας, H, και της ειδικής ενέργειας, E.

Ειδική παροχή, q_2:

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{9{,}0\text{m}^3/\text{s}}{4{,}0\text{m}} \quad \Rightarrow \quad q_2 = 2{,}25\text{m}^2/\text{s} \tag{5.7}$$

Εφ'όσον υποθέσαμε ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες, η συνολική υδραυλική ενέργεια α.μ.β.υ. διατηρείται και στα δύο τμήματα του καναλιού.

$$H_1 = H_2 \quad \Rightarrow \quad z_1 + y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{U_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad z_1 + y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = z_2 + y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} \tag{5.8}$$

όπου

$$q_1 = \frac{Q_1}{b_1} = \frac{U_1A_1}{b_1} = \frac{U_1b_1y_1}{b_1} = U_1y_1 \quad \text{και} \quad q_2 = \frac{Q_2}{b_2} = U_2y_2 \tag{5.9}$$

είναι οι ειδικές παροχές (παροχή ανά μονάδα πλάτους καναλιού) στις δύο τυπικές διατομές του καναλιού.

Όμως το κανάλι είναι οριζόντιο, άρα $z_1=z_2$, και η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = y_2 + \frac{U_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} \quad \Leftrightarrow \quad E_1(y_1) = E_2(y_2) \tag{5.10}$$

Αυτή η εξίσωση έχει ως μοναδικό άγνωστο το y_2. Μετά από αλγεβρικές πράξεις θα μας δώσει

$$y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} \quad \Leftrightarrow \quad E_1 - y_2 - \frac{q_2^2}{2gy_2^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2^3 - E_1y_2^2 + \frac{q_2^2}{2g} = 0 \tag{5.11}$$

$$y_2^3 - E_1y_2^2 + \frac{q_2^2}{2g} = 0 \tag{5.12}$$

η οποία επιλύεται αριθμητικά (π.χ. με μέθοδο Newton-Raphson (βλέπε Παράρτημα) με $f(y_2) = y_2^3 - E_1y_2^2 + \frac{q^2}{2g}$ & $f'(y_2) = 3y_2^2 - 2E_1y_2$, $q_2=2{,}25\text{m}^2/\text{s}$ και $E_1=1{,}5186\text{m}$, ως ακολούθως:

i	$y_{2,i}$	$f(y_{2,i})$	$f'(y_{2,i})$=df/dy
1	2	2,1836275	5,9256
2	1,631493	0,5585214	3,030135
3	1,44717	0,1084322	1,88756
4	1,389725	0,0091261	1,573132
5	1,383923	8,901E-05	1,54248
6	1,383866	8,768E-09	1,542176
7	1,383866	0	1,542176

και δίνει ως αποτέλεσμα $y_2 = 1{,}3839\text{m}$

Έτσι, η ειδική ενέργεια, E_2:

$$E_2 = y_2 + \frac{q_2^{\,2}}{2gy_2^{\,2}} = 1{,}3839\mathrm{m} + \frac{\left(2{,}25\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\right)^2}{2\times\left(9{,}81\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)\times\left(1{,}3839\mathrm{m}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad E_2 = 1{,}5186\mathrm{m} \tag{5.13}$$

όπως ήταν αναμενόμενο(!).

Η υδραυλική ακτίνα, R_{H2} στο τμήμα (2) είναι

$$R_{h2} = \frac{A_2}{P_{w2}} = \frac{b_2 y_2}{b_2 + 2y_2} = \frac{4\mathrm{m}\times 1{,}384\mathrm{m}}{4\mathrm{m} + 2\times 1{,}384\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad R_{h2} = 0{,}818\mathrm{m} \tag{5.14}$$

Μέση ταχύτητα της ροής στη διατομή (2), U_2,

$$Q = U_2 A_2 \quad\Rightarrow\quad U_2 = \frac{Q}{b_2 y_2} = \frac{9\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{4\mathrm{m}\times 1{,}384\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad U_2 = 1{,}626\mathrm{m}/\mathrm{s} \tag{5.15}$$

Ο αριθμός Reynolds, στο τμήμα (2) είναι

$$Re_2 = \frac{4R_{h2}U_2}{\nu} = \frac{4\times 0{,}818\mathrm{m}\times 1{,}626\mathrm{m}/\mathrm{s}}{1{,}12\times 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}} \quad\Rightarrow\quad Re_2 = 4{,}75\times 10^6\,\mathrm{m}/\mathrm{s} \tag{5.16}$$

Που είναι $Re_2 < Re_1$ όπως ήταν αναμενόμενο. Επίσης, επειδή $Re_2 > 10^5$, η ροή στο τμήμα (2) του καναλιού είναι και αυτή τυρβώδης, πλήρως ανεπτυγμένη. Άρα και στο τμήμα (2), η υπόθεση ότι οι απώλειες λόγω ιξωδών τριβών είναι αμελητέες ισχύει.

Ο αδιάστατος αριθμός Froude στη διατομή (2) είναι

$$F_{R2} = \frac{U_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{1{,}626\mathrm{m}/\mathrm{s}}{\sqrt{9{,}81\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\times 1{,}384\mathrm{m}}} \quad\Rightarrow\quad F_{R2} = 0{,}441 < 1 \tag{5.17}$$

Άρα η ροή είναι υποκρίσιμη και στο δεύτερο τμήμα του καναλιού και δε θα υπάρξει άλμα.

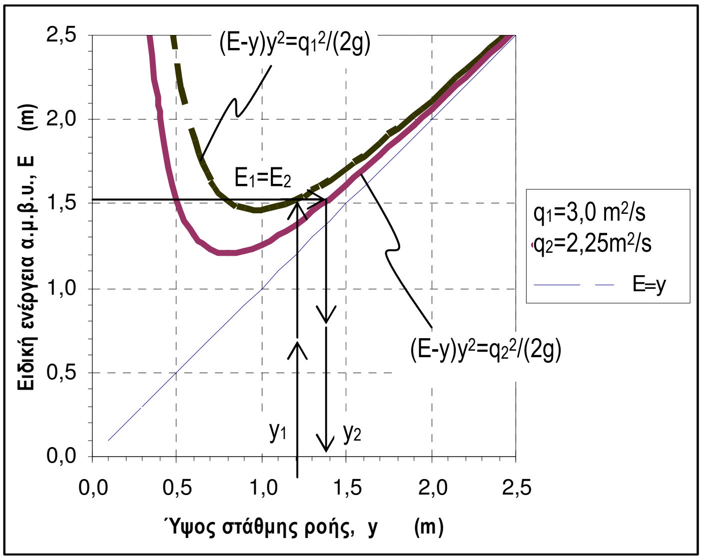
<u>Γραφική επίλυση (εναλλακτικά)</u>

Στα δύο τμήματα του καναλιού αντιστοιχούν διαφορετικές καμπύλες ειδικής ενέργειας έναντι ύψους στάθμης (E-y). Αυτό συμβαίνει διότι, η παροχή, Q, είναι μεν ίδια για κάθε τμήμα, αλλά, εξ αιτίας των διαφορετικών πλατών b_1 & b_2, για κάθε τμήμα του καναλιού αντιστοιχεί μια καμπύλη σε κάθε ειδική παροχή, $q_1=Q/b_1$, & $q_2=Q/b_2$ (βλέπε αντίστοιχα τις καμπύλες με διακεκομένη γραμμή και συνεχόμενη γραμμή στο παρακάτω διάγραμμα).

Η ολική υδραυλική ενέργεια α.μ.β.υ. διατηρείται (θεωρούμε μηδενικές απώλειες κατά τη διεύρυνση), δηλαδή $H=z+y+U^2/(2g)=z+E=$αμετάβλητο

Επίσης διατηρείται αμετάβλητη η δυναμική ενέργεια α.μ.β.υ., z (λόγω αμετάβλητου ύψους κοίτης καναλιού), άρα θα διατηρείται αμετάβλητη και η ειδική ενέργεια, E. Επομένως θα πρέπει να επαληθεύεται η εξίσωση $E_1(y_1)=E_2(y_2)$ για τις δύο στάθμες, y_1 & y_2, που θα έχει η ροή στα τμήματα του καναλιού πριν και μετά τη διεύρυνση. Έτσι, ξεκινώντας από την τιμή $y_1=1{,}2$m γράφουμε ευθεία // στον άξονα E, η οποία τέμνει το διάγραμμα $(E-y)y^2=q_1^{\,2}/(2g)$ για ($q_1=3\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$) σε σημείο που έχει $E_1=1{,}52$m.

Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο στο διάγραμμα $(E-y)y^2=q_2^{\,2}/(2g)$ για ($q_2=2{,}25\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$) που επαληθεύει την $E_2=E_1=1{,}52$m και, ξεκινώντας από εκείνο, γράφουμε μια ευθεία // στον άξονα E που τέμνει τον άξονα των y στο $y_2=1{,}38$m. Αυτό είναι το νέο βάθος της ροής μετά τη διεύρυνση.



<u>Συζήτηση</u>

Το πρόβλημα επιλύθηκε με δύο τρόπους (αναλυτικά και γραφικά).

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι:

Υποκρίσιμη ροή, $b_1<b_2 \rightarrow y_1<y_2$ $(p_1>p_2)$, $A_1<A_2$ και $U_1>U_2$

όπως ακριβώς θα γινόταν σε ροή σε κλειστό αγωγό στον οποίο διευρύνεται η διάμετρος.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε το βάθος της ροής σε ένα κανάλι μετά από στένωσή του δηλαδή εάν $b_2<b_1$ (b_2 το πλάτος του καναλιού κατάντι της στένωσης).

Εάν, για παράδειγμα η ροή χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω μεγέθη

Πριν τη στένωση (ανάντι) b_1=4m U_1=1,626m/s y_1=1,38m

Μετά τη στένωση (κατάντι) b_2=3m

Τότε με παρόμοιο τρόπο (ακολουθώντας με αντίθετη φορά τη διαδικασία στο διάγραμμα) προσδιορίζουμε ότι: U_2=1,626m/s και y_1=1,20m

Άσκηση 6

Σε έναν οριζόντιο ορθογωνικό αγωγό πλάτους b ρέει νερό με σταθερή παροχή.

Εάν το βάθος ροής αυξάνει κατά τη διεύθυνση της ροής χαρακτηρίσατε τη ροή ως προς το εάν είναι ποτάμια ή χειμαρώδης.

Εάν το βάθος της ροής μειώνεται κατά τη διεύθυνση της ροής χαρακτηρίσατε τη ροή ως προς το εάν είναι ποτάμια ή χειμαρώδης.

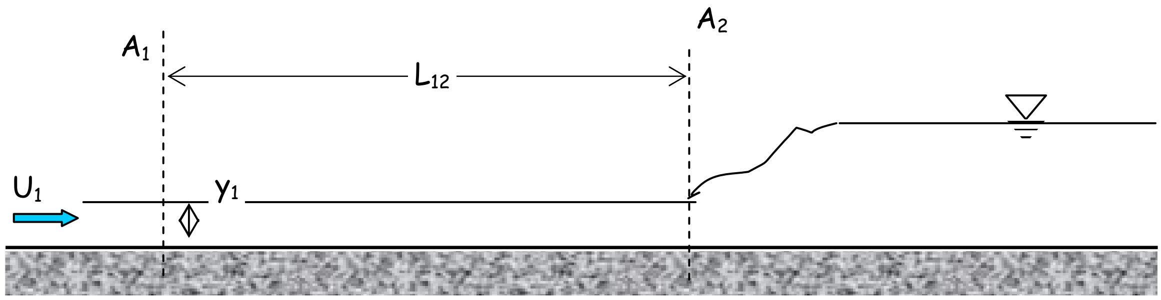
Άσκηση 7

Σε έναν οριζόντιο ορθογωνικό αγωγό πλάτους b=2m ρέει νερό με σταθερή παροχή. Σε μια διατομή A_1, το βάθος ροής είναι y_1=15cm και η μέση ταχύτητα του νερού είναι U_1=2,3m/s. Οι συνολικές απώλειες υδραυλικής ενέργειας ανά μονάδα μήκους αγωγού λόγω τριβών εκτιμώνται στα ΔH/L=2,25cm/m.

Ερωτήματα

Πόση είναι (α) η παροχή, Q, και (β) η ειδική παροχή, q, του νερού στον αγωγό?

(γ) Σε τι μήκος L_2 κατάντι της διατομής A_1 εκτιμάτε οτι θα δημιουργηθεί το υδραυλικό άλμα?



Υπόδειξη Η συνολική υδραυλική ενέργεια, H, μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού.

Επίλυση

(α) Η παροχή στον αγωγό στη διατομή (1) είναι:

$$Q = U_1 y_1 b = 2{,}3\mathrm{m/s} \times 0{,}15\mathrm{m} \times 2\mathrm{m} \quad \Rightarrow \boxed{Q = 0{,}69\mathrm{m}^3/\mathrm{s}} \tag{7.1}$$

(β) και η ειδική παροχή είναι:

$$q = U_1 y_1 = 2{,}3\mathrm{m/s} \times 0{,}15\mathrm{m} \quad \Rightarrow \boxed{q = 0{,}345\mathrm{m}^2/\mathrm{s}} \tag{7.2}$$

Τόσο η παροχή όσο και η ειδική παροχή παραμένουν σταθερές σε όλο το μήκος του αγωγού

(γ) Όπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχει ένα υδραυλικό άλμα, επομένως ανάντι του Υ/Α η ροή θα είναι χειμαρώδης και κατάντι του Υ/Α ποτάμια. Ελέγχουμε αυτήν την υπόθεση υπολογίζοντας τον αριθμό Froude στη διατομή (1) ανάντι του Υ/Α

$$Fr_1 = \frac{U_1}{c} = \frac{U_1}{\sqrt{g y_1}} = \frac{2{,}3\mathrm{m/s}}{\sqrt{9{,}81\mathrm{m/s}^2 \times 0{,}15\mathrm{m}}} = \frac{2{,}3\mathrm{m/s}}{1{,}213\mathrm{m/s}} = 1{,}896 > 1 \tag{7.3}$$

άρα, όντως η ροή είναι χειμαρώδης στη διατομή (1).

Το Υ/Α θα δημιουργηθεί όταν η ροή από χειμαρώδης γίνει ποτάμια δηλαδή όταν $Fr_2 \rightarrow 1$.

Η ειδική ενέργεια στη διατομή (1) είναι

$$E_1 = y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = 0{,}15\text{m} + \frac{(2{,}3\text{m/s})^2}{2\times 9{,}81\text{m/s}^2} = 0{,}15\text{m} + 0{,}269623 = 0{,}4196\text{m} \tag{7.4}$$

Επειδή η ροή είναι χειμαρώδης σε οριζόντιο πυθμένα, το βάθος ροής θα αυξάνει κατάντι (βλέπε Άσκηση 6) και η ροή θα τείνει να γίνει ποτάμια επειδή ο Fr θα αυξάνει (θα μειώνεται λόγω τριβής η ταχύτητα και επομένως θα αυξάνει το βάθος ροής για να διατηρηθεί η παροχή σταθερή).

Όταν η ροή "πάει να γίνει κρίσιμη" θα ισχύει η σχέση της παροχής για κρίσιμη ροή

$$q = \sqrt{g y_{cr}^{\;3}} \Rightarrow y_{cr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(0{,}345\text{m}^2/\text{s})^2}{9{,}81\text{m/s}^2}} = 0{,}22979\text{m} \tag{7.5}$$

Εκεί, στη διατομή (2), η κρίσιμη ροή έχει ειδική ενέργεια:

$$E_2 = E_{min} = \frac{3}{2} y_{cr} = \frac{3}{2}\times 0{,}22979\text{m} = 0{,}34468\text{m} \tag{7.6}$$

Ένα ισοζύγιο ολικής υδραυλικής ενέργειας α.μ.β.υ. (Bernoulli) μεταξύ της διατομής (1) και της σχεδόν κρίσιμης (cr) διατομής (2) θα δώσει

$$H_1 + \Delta H_{1\to cr} = H_2 \quad \Rightarrow \quad (z_1 + E_1) + \frac{\Delta H_{1\to 2}}{L} L_{12} = (z_2 + E_2) \;\overset{z_1 = z_2}{\Longrightarrow}\; E_1 + \frac{\Delta H_{1\to cr}}{L} L_{12} = E_2$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{E_2 - E_1}{\frac{\Delta H_{1\to cr}}{L}} = \frac{0{,}34468\text{m} - 0{,}4196\text{m}}{-2{,}25\text{cm/m}} \quad \Rightarrow \boxed{L_{12} = 3{,}331\text{m}} \tag{7.7}$$

Άσκηση 8

Στην κορυφή (1) του υπερχειλιστή ενός φράγματος ταμιευτήρα νερού, μετριέται το βάθος ροής y_1=65cm.

Στο τέλος της υπερχείλισης (3) όπου ο πυθμένας του καναλιού γίνεται οριζόντιος, μετριέται το βάθος ροής y_3=80cm.

Η στάθμη της κορυφής του υπερχειλιστή είναι z_1=18,0m.

Το κανάλι του υπερχειλιστή έχει ορθογωνική διατομή πλάτους b=4,5m.

<u>Ερωτήματα</u>

(α) Πόση είναι η παροχή, Q, και πόση η ειδική παροχή, q, του νερού (εκροή από το φράγμα) διαμέσου του υπερχειλιστή?

(β) Σε τι ύψος, y_φ, υψηλότερα από την κορυφή του υπερχειλιστή είναι η στάθμη του νερού στον ταμιευτήρα (πόσο είναι το φορτίο)?

(γ) Θα δημιουργηθεί υδραυλικό άλμα στην περιοχή της ροής που επισημαίνεται με διακεκομμένη γραμμή? ΝΑΙ – ΟΧΙ και γιατί?

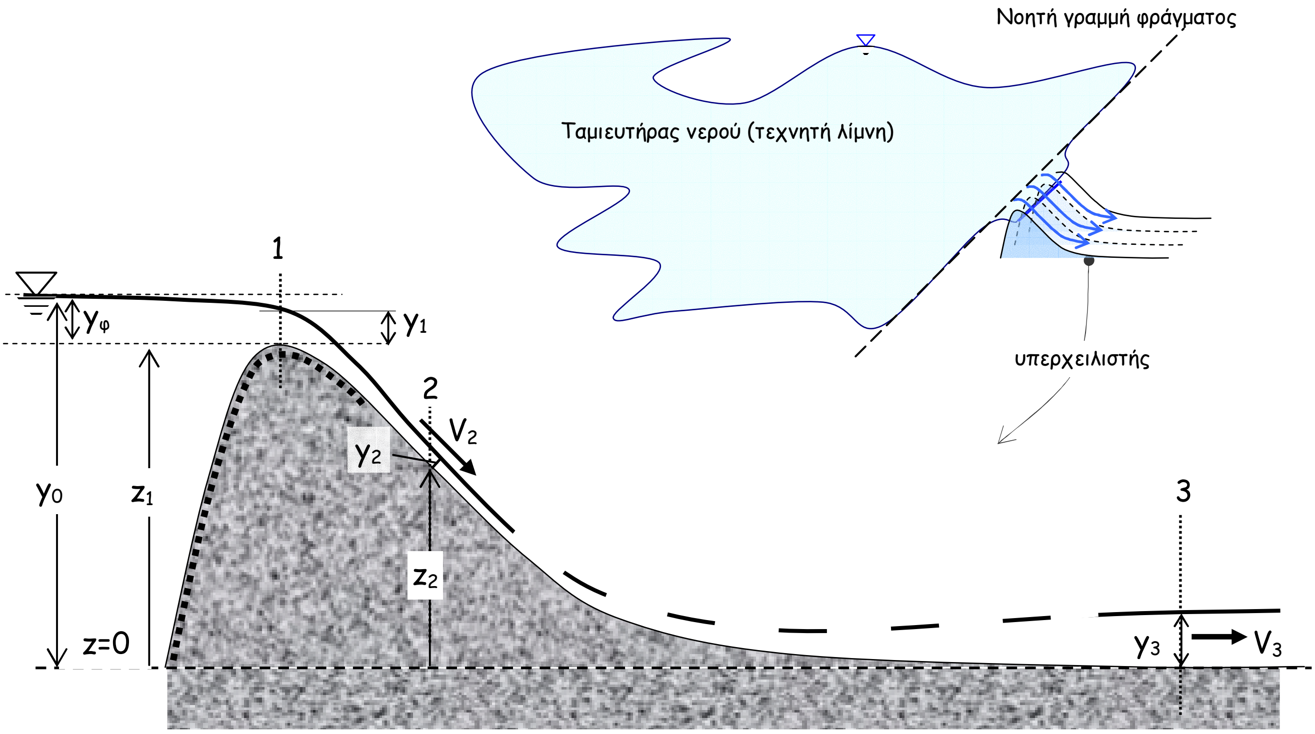
(δ) Πόση είναι η ειδική ενέργεια α.μ.β.υ., Ε, στις διατομές 0, 1 και 3?

(ε) Πόση είναι η συνολική υδραυλική ενέργεια α.μ.β.υ., Η, στις διατομές 0, 1 και 3?

(στ) Σε τυχαία θέση (2), όπου η στάθμη της κοίτης του υπερχειλιστή είναι z_2, πόση είναι η ειδική ενέργεια $E_2(z)$? (θεωρήστε ότι οι τριβές από την κορυφή του υπερχειλιστή μέχρι εκείνη τη θέση είναι αμελητέες).

(ζ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του βάθους ροής στη θέση 3, $y_{3,max}$, ώστε να διατηρείται ένα υδραυλικό άλμα πριν από τη θέση 3?

<u>Σημείωση</u> - Αμελήστε τις τριβές σε μια <u>στενή</u> περιοχή εκατέρωθεν της κορυφής του υπερχειλιστή (αυτή που επισημαίνεται με την εστιγμένη καμπύλη ....).



Επίλυση

(α) Η παροχή διαμέσου του υπερχειλιστή θα υπολογισθεί από μέτρηση του βάθους ροής σε μια διατομή στην οποία επικρατούν συνθήκες κρίσιμης ροής. Αυτή η διατομή είναι η (1) δηλαδή η κορυφή του υπερχειλιστή (βλέπε σχετική ανάλυση από Τερζίδης, Γ., «Υδραυλική 3. Ροή σε ανοικτούς αγωγούς», εδάφιο 6.4.7, σελ. 29-31).

Για τη διατομή (1), όπου η ροή είναι κρίσιμη, η ειδική παροχή είναι:

$$q = \sqrt{g y_{cr}{}^{3}} = \sqrt{9{,}81 m/s^2 \times (0{,}65m)^3} \Rightarrow \boxed{q = 1{,}641\ m^2/s} \tag{8.1}$$

ενώ η παροχή είναι:

$$Q = qb = 1{,}641 m^2/s \times 4{,}5m \Rightarrow \boxed{Q = 7{,}386 m^3/s} \tag{8.2}$$

Είναι δεδομένο ότι η παροχή παραμένει σταθερή. Η ειδική παροχή παραμένει και αυτή σταθερή κατάντι της διατομής (1) σε όλο το κανάλι υπερχείλισης -αφού το πλάτος του καναλιού υπερχείλισης παραμένει σταθερό (προσοχή, αυτό συμβαίνει από την κορυφή του υπερχειλιστή και μετά). Δηλαδή, $q=q_1=q_2=q_3$.

Αλλά, προσοχή, θα πρέπει να πούμε οτι $q_0 \neq q$. Η διαφοροποίηση τη ειδικής παροχής ανάντι της υπερχείλισης, οφείλεται στο ότι αναφερόμαστε σε υπερχειλιστή ταμιευτήρα φράγματος νερού. Έτσι, στον υπερχειλιστή συσωρεύεται νερό από μια πολύ μεγάλη λεκάνη. Επομένως το πλάτος και η διατομή υπερχείλισης είναι πολύ μικρότερη από οποιαδήποτε διατομή εντός της λεκάνης – ανάντι του υπερχειλιστή.

Η ταχύτητα στην κρίσιμη διατομή είναι $V_1 = \dfrac{q}{y_1} = \dfrac{1{,}641\ m^2/s}{0{,}65m} = 2{,}5246\ m/s$ (8.3)

(β) Σε τι ύψος, y_φ, υψηλότερα από την κορυφή του υπερχειλιστή είναι η στάθμη του νερού στον ταμιευτήρα (πόσο είναι το φορτίο)?

Επειδή στη διατομή (1) η ροή είναι κρίσιμη, η ειδική ενέργεια, E_1, γίνεται ελάχιστη και ίση με (Τερζίδης, εξ. 6.4.31)

$$E_1 = E_{min} = \frac{3}{2} y_{cr} = \frac{3}{2} \times 0{,}65m = 0{,}975m \tag{8.4}$$

Έτσι, η ολική ενέργεια α.μ.β.υ. στη διατομή (1) γίνεται

$$H_1 = z_1 + E_1 = 18{,}0m + 0{,}975m = 18{,}975m \tag{8.5}$$

Επειδή η ροή από τη διατομή (0) -πολύ ανάντι ως προς την κορυφή του υπερχειλιστή, μέχρι την κορυφή του υπερχειλιστή, διατομή (1) -σύμφωνα με τη σημείωση- μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται χωρίς απώλειες ενέργειας λόγω τριβών (γιατί?), μπορούμε να διατυπώσουμε το ισοζύγιο ολικής υδραυλικής ενέργειας α.μ.β.υ. (Bernoulli) ως εξής:

$$H_0 + \Delta H_{0\to1} = H_1 \Rightarrow (z_0 + E_0) + \Delta H_{0\to1} = H_1 \overset{\Delta H_{0\to1}\approx 0}{\Longrightarrow} 0 + y_0 + \frac{V_0{}^2}{2g} = H_1 \tag{8.6}$$

Η μέση ταχύτητα V_0 δίνεται από την έκφραση $V_0=q_0/y_0$, όπου q_0 η ειδική παροχή ανάντι της υπερχείλισης [διαφορετική όμως της q ($q_0 \neq q$)]. Οπότε στο ισοζύγιο Bernoulli εμπλέκονται 2 άγνωστα μεγέθη, τα y_0 & $V_0(=q_0/y_0)$ και η εξίσωση (8.6) δεν επιλύεται.

Μπορούμε όμως να «παρακάμψουμε» το πρόβλημα εκμεταλλευόμενοι το δεδομένο ότι πρόκειται για τον υπερχειλιστή από έναν ταμιευτήρα φράγματος νερού. Επομένως το πλάτος και η διατομή υπερχείλισης είναι πολύ μικρότερη από οποιαδήποτε διατομή ανάντι του υπερχειλιστή. Δηλαδή σε οποιαδήποτε διατομή ανάντι του υπερχειλιστή η ροή έχει τόσο μικρή ταχύτητα που για πρακτικούς λόγους μπορούμε να πούμε ότι «δεν υφίσταται ροή». Έτσι, μπορούμε να θέσουμε $V_0 \approx 0$, οπότε η εξίσωση (8.6) επιλύεται άμεσα:

$$y_0 = H_1 = z_1 + E_1 \quad \Rightarrow \quad z_1 + y_\varphi = z_1 + E_1 \quad \Rightarrow \quad y_\varphi = E_1 \quad \Rightarrow$$

$$y_\varphi = E_1 = E_c = \frac{3}{2} y_c \quad \Rightarrow \quad y_\varphi = \frac{3}{2} \times 0{,}65\text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_\varphi = 0{,}975\text{m}} \tag{8.7}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι πολύ ανάντι της υπερχείλισης ένα επιφανειακό στρώμα νερού, πάχους y_φ, από το επίπεδο $z=z_1$ και πάνω «γλυστράει» χωρίς τριβές πάνω στην υπόλοιπη «ακίνητη» μάζα του νερού με μέση ταχύτητα V_φ.

Τότε το ισοζύγιο Bernoulli –αλλά αυτή τη φορά για τη ροή της στρώσης του φορτίου- μεταξύ των διατομών (0) και (1) μπορεί να ξαναγραφεί και ως

$$H_\varphi + \Delta H_{\varphi\to1} = H_1 \quad \Rightarrow \quad \left(z_\varphi + E_\varphi\right) + \Delta H_{\varphi\to1} = \left(z_1 + E_1\right) \quad \overset{\substack{z_\varphi = z_1 \\ \Delta H_{\varphi\to1}\approx 0}}{\Longrightarrow} \quad y_\varphi + \frac{V_\varphi^{\,2}}{2g} = E_1 \tag{8.8}$$

Και πάλι καταλήγουμε σε μια εξίσωση με 2 άγνωστα μεγέθη, τα y_φ και $V_\varphi(=q_{\varphi0}/y_\varphi)$, που δεν επιλύεται. Με παρόμοιο τρόπο «παρακάμπτουμε» το πρόβλημα εκμεταλλευόμενοι –όπως και προηγούμενα- το δεδομένο ότι πρόκειται για τον υπερχειλιστή από έναν ταμιευτήρα φράγματος νερού. Επομένως το πλάτος και η διατομή υπερχείλισης είναι πολύ μικρότερη από οποιαδήποτε διατομή ροής φορτίου. Δηλαδή σε οποιαδήποτε διατομή φορτίου πρακτικά δεν υφίσταται ροή. Έτσι, μπορούμε να θέσουμε ότι $V_\varphi \approx 0$, οπότε η τελευταία σχέση δίνει τιμή για το φορτίο [ίδια με της (8.7) – κάτι που ήταν αναμενόμενο].

$$y_\varphi = E_1 \quad \Rightarrow \quad y_\varphi = E_1 = E_c = \frac{3}{2} y_c \quad \Rightarrow \quad y_\varphi = \frac{3}{2} \times 0{,}65\text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_\varphi = 0{,}975\text{m}} \tag{8.9}$$

(γ) Για να δημιουργηθεί υδραυλικό άλμα στην περιοχή που επισημαίνεται με διακεκομένη γραμμή, δηλαδή μετά τη διατομή (2) μέχρι τη διατομή (3), θα πρέπει η ροή να μετατρέπεται από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη. Στη διατομή (2) η ροή είναι υπερκρίσιμη (γιατί? - διότι λόγω κατηφορικού πυθμένα και αμελητέων τριβών θα έχουμε αύξηση της ταχύτητας μιας ήδη κρίσιμης ροής).

Έτσι, θα πρέπει να εξετάσουμε εάν στη διατομή (3) η ροή είναι υποκρίσιμη ή υπερκρίσισμη. Αρκεί να υπολογίσουμε τον αριθμό Froude στη διατομή (3), Fr_3 ή, αντίστοιχα, την ταχύτητα V_3.

$$V_3 = \frac{q_3}{y_3} = \frac{1{,}641\,\text{m}^2/\text{s}}{0{,}80\text{m}} \quad \Rightarrow \quad V_3 = 2{,}051\,\text{m/s} \tag{8.10}$$

$$Fr_3 = \frac{V_3}{\sqrt{g y_3}} = \frac{2{,}051\,\text{m/s}}{\sqrt{9{,}81\,\text{m/s}^2 \times 0{,}80\text{m}}} \quad \Rightarrow \quad Fr_3 = 0{,}732 < 1 \tag{8.11}$$

Επομένως, αφού η ροή στη θέση (2) είναι υπερκρίσιμη ενώ στη θέση (3) είναι υποκρίσιμη, κάπου ενδιάμεσα των διατομών (2) & (3) θα δημιουργηθεί υδραυλικό άλμα.

(δ) Πόση είναι η ειδική ενέργεια α.μ.β.υ., Ε, στις διατομές 0, 1 και 3?

Από τον ορισμό της ειδικής ενέργειας α.μ.β.υ. $E = y + \frac{V^2}{2g}$ προκύπτουν οι τιμές της Ε στις τρεις διατομές:

Στη διατομή (0)

$$E_0 = y_0 + \frac{V_0^{\,2}}{2g} \overset{V_0 \approx 0}{\Rightarrow} E_0 = y_0 = z_1 + y_\varphi = 18m + 0{,}975m \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = 18{,}975m} \tag{8.12}$$

Στη διατομή (1) – κρίσιμη διατομή όπου ήδη υπολογίσαμε την ταχύτητα V_1 [σχέση 8.3)]

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^{\,2}}{2g} = y_1 + \frac{(q/y_1)^2}{2g} = 0{,}65m + \frac{(2{,}5246\ m/s)^2}{2 \times 9{,}81 m/s^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_1 = 0{,}975m} \tag{8.13}$$

που προφανώς είναι ίδια με την τιμή που προκύπτει από τη σχέση (8.7),

και στη διατομή (3)

$$E_3 = y_3 + \frac{V_3^{\,2}}{2g} = y_3 + \frac{\left(\frac{q}{y_3}\right)^2}{2g} = 0{,}80m + \frac{\left(\frac{1{,}641\ m^2/s}{0{,}80m}\right)^2}{2 \times 9{,}81 m/s^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_3 = 1{,}0145m} \tag{8.14}$$

(ε) Η συνολική υδραυλική ενέργεια α.μ.β.υ., Η, σε κάθε μια από τις διατομές 0, 1 και 3 προκύπτει εύκολα από τον ορισμό $H = z + E$ εάν στις αντίστοιχες ειδικές ενέργειες α.μ.β.υ. προσθέσουμε τις υψομετρικές στάθμες, z:

Στη διατομή (0) – διατομή φορτίου

$$H_0 = z_\varphi + E_\varphi = z_1 + E_\varphi = 18{,}0m + 0{,}975m = 18{,}975m \tag{8.15}$$

Στη διατομή (1) – έχουν γίνει ήδη οι υπολογισμοί

$$H_1 = z_1 + E_1 = 18{,}0m + 0{,}975m = 18{,}975m \tag{8.16}$$

και στη διατομή (3)

$$H_3 = z_3 + E_3 = 0{,}0m + E_3 = E_3 = 1{,}0145m \tag{8.17}$$

Παρατηρούμε ότι H_0=H_1, που ήταν αναμενόμενο εξ αιτίας της δεδομένης απουσίας τριβών μεταξύ των διατομών (0) και (1).

Η δραστική μείωση της τιμής της ολικής υδραυλικής ενέργειας α.μ.β.υ. στη διατομή (3) οφείλεται εν μέρει στις ενεργειακές απώλειες λόγω τριβών του νερού με τα τοιχώματα του καναλιού μεταξύ των διατομών (1) & (3) (και ιδίως για τη διαδρομή κατά την οποία η ροή παραμένει υπερκρίσιμη) αλλά –κυρίως- λόγω εσωτερικών τριβών στο υδραυλικό άλμα.

(στ) Σε οποιαδήποτε διατομή (2), όπου η στάθμη της κοίτης του υπερχειλιστή είναι z_2, και θεωρώντας ότι οι τριβές από την κορυφή του υπερχειλιστή (1) μέχρι εκείνη τη θέση είναι αμελητέες ($\Delta H_{1\rightarrow 2} \approx 0$), η ειδική ενέργεια $E_2(z)$ εκτιμάται μέσω εξίσωσης Bernoulli ως εξής

$$H_1 + \Delta H_{1\to 2} = H_2 \overset{\Delta H_{1\to 2}\approx 0}{\Longrightarrow} H_1 = H_2 \Rightarrow H_1 = z_2 + E_2 \Rightarrow \boxed{E_2 = H_1 - z_2} \tag{8.18}$$

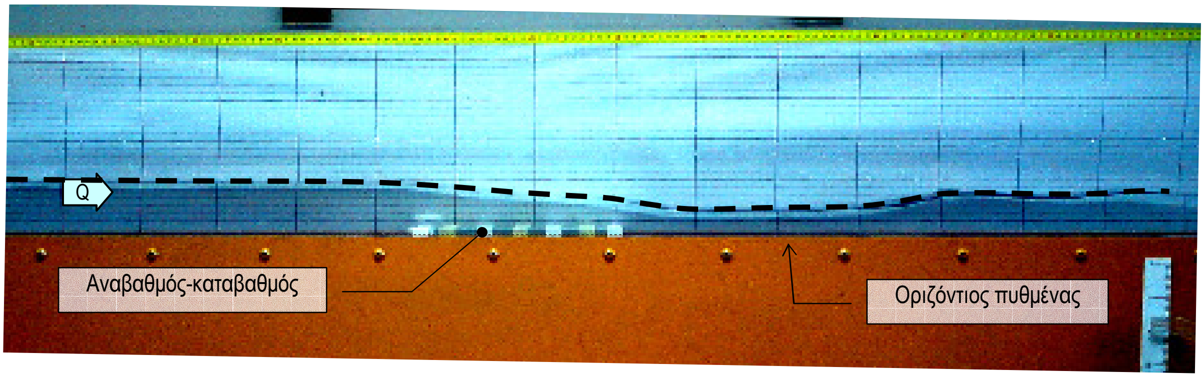
(ζ) Όπως αναφέρθηκε στο (γ) η ροή στη διατομή (3) είναι υποκρίσιμη. Έχει γίνει υποκρίσιμη ανάντι της (3) κάπου μεταξύ της (2) και της (3). Για να διατηρηθεί το Υ/Α ακριβώς πριν από τη θέση (3) η ροή αρκεί να μετατρέπεται σε υποκρίσιμη σε μια διατομή οριακά ανάντι της (3) άρα στην (3) ο αντίστοιχος αριθμός Froude θα πρέπει να είναι οριακά μικρότερος του 1. Δηλαδή θα πρέπει

$$Fr_3^{\,2} = \frac{q^2}{g y_3^{\,3}} = 1 \Rightarrow y_3^{\,3} = \frac{q^2}{g} \Rightarrow y_3 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\left(1{,}641\ \mathrm{m^2/s}\right)^2}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} = \sqrt[3]{\frac{2{,}6929\ \mathrm{m^4}}{9{,}81\ \mathrm{m}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_3 = 0{,}6499\ \mathrm{m}} \tag{8.19}$$

Άσκηση 9 Έστω κανάλι ορθογωνικής διατομής πλάτους b. Ο πυθμένας του καναλιού είναι οριζόντιος. Στο κανάλι αναπτύσσεται ροή σταθερής παροχής, Q. Σε κάποιο σημείο του πυθμένα του καναλιού τοποθετείται ένας αναβαθμός/καταβαθμός ύψους, t=10mm. Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού επισημαίνεται με τη διακεκομένη γραμμή. Η ροή είναι από αριστερά προς τα δεξιά.

Αναγνωρίστε τα διάφορα είδη ροών ανάντι- υπεράνω- και κατάντι- του αναβαθμού/καταβαθμού. Σημειώστε επάνω στην Εικόνα τα σημεία ενδιαφέροντος.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ι) Αριθμητική επίλυση αλγεβρικής εξίσωσης - Μέθοδος παραγώγου “Newton-Raphson”

Έστω η αλγεβρική εξίσωση

f(x)=0

για την οποία θέλουμε να βρούμε μία ή περισσότερες ρίζες, x.

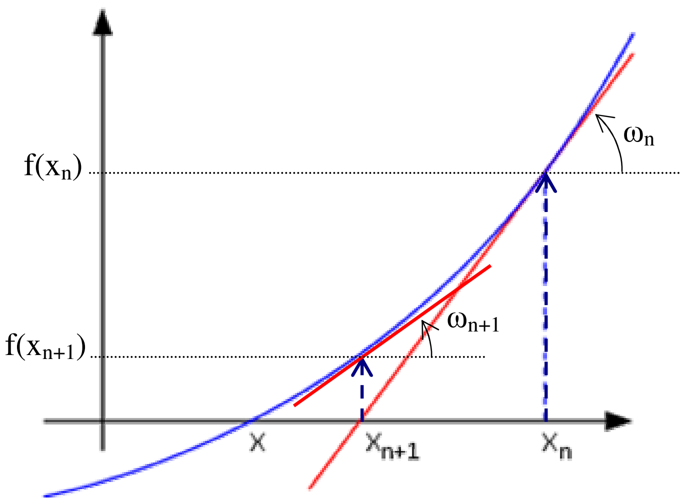
Η διαδικασία της μεθόδου **Newton-Raphson** είναι η εξής:

Ξεκινάμε με μια αρχική υπόθεση της τιμής της ρίζας, x_n, σχετικά κοντά στην πραγματική ρίζα, υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f(x_n)$ και την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $f'(x_n)$ στο ίδιο σημείο x_n.

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε την επόμενη δοκιμαστική τιμή της ρίζας, x_{n+1} ως

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι n=N όταν σταθεροποιηθεί (για τη ζητούμενη ακρίβεια) η x σε κάποια ρίζα και η $f(x) \rightarrow 0$.



$\tan\omega_n = f'(x_n)$

$\tan\omega_{n+1} = f'(x_{n+1})$

ΙΙ) Επίλυση της εξίσωσης 3^{ου} βαθμού (κυβικής) $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$

(από "Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering formulas, tables, functions, graphs, transforms" ISBN 0-87891-521-4, Research & Education Association, USA, 1980)

Θέτοντας

$A = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^{\,2}}{9}$ και $B = \frac{1}{6}(a_1 a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27} a_2^{\,3}$,

τότε

εάν	υπάρχουν
$A^3+B^2>0$	1 πραγματική ρίζα & 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες
$A^3+B^2=0$	3 πραγματικές ρίζες, τουλάχιστο 2 ίσες
$A^3+B^2<0$	3 πραγματικές ρίζες

Θέτουμε $s_1 = \sqrt{B + \sqrt{A^3 + B^2}}$ και $s_2 = \sqrt{B - \sqrt{A^3 + B^2}}$

Τότε οι 3 ρίζες της κυβικής εξίσωσης δίνονται από τις εκφράσεις:

$$z_1 = s_1 + s_2 - \frac{a_2}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)$$

Επίσης, για τις ρίζες z_1, z_2, z_3 της κυβικής εξίσωσης ισχύει

$$z_1 + z_2 + z_3 = -a_2$$

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = a_1$$

$$z_1 z_2 z_3 = -a_0$$

ΙΙΙ. Πίνακας Π.1 Τιμές του συντελεστή τραχύτητας, n για διάφορους αγωγούς (Chow, 1959)

TABLE 12-1 Values of the roughness coefficient n. (**Boldface** figures are values generally recommended in design.) (Chow, 1959)

Type of channel and description	Minimum	Normal	Maximum
A. CLOSED CONDUITS FLOWING PARTLY FULL			
A-1. Metal			
a. Brass, smooth	0.009	**0.010**	0.013
b. Steel			
1. Lockbar and welded	0.010	0.012	0.014
2. Riveted and spiral	0.013	0.016	0.017
c. Cast iron			
1. Coated	0.010	0.013	0.014
2. Uncoated	0.011	0.014	0.016
d. Wrought iron			
1. Black	0.012	0.014	0.015
2. Galvanized	0.013	0.016	0.017
e. Corrugated metal			
1. Subdrain	0.017	0.019	0.021
2. Storm drain	0.021	**0.024**	0.030
A-2. Nonmetal			
a. Lucite	0.008	0.009	0.010
b. Glass	0.009	**0.010**	0.013
c. Cement			
1. Neat, surface	0.010	0.011	0.013
2. Mortar	0.011	0.013	0.015
d. Concrete			
1. Culvert, straight and free of debris	0.010	0.011	0.013
2. Culvert with bends, connections, and some debris	0.011	**0.013**	0.014
3. Finished	0.011	0.012	0.014
4. Sewer with manholes, inlet, etc., straight	0.013	0.015	0.017
5. Unfinished, steel form	0.012	0.013	0.014
6. Unfinished, smooth wood form	0.012	**0.014**	0.016
7. Unfinished, rough wood form	0.015	0.017	0.020
e. Wood			
1. Stave	0.010	0.012	0.014
2. Laminated, treated	0.015	0.017	0.020
f. Clay			
1. Common drainage tile	0.011	**0.013**	0.017
2. Vitrified sewer	0.011	0.014	0.017
3. Vitrified sewer with manholes, inlet, etc.	0.013	0.015	0.017
4. Vitrified subdrain with open joint	0.014	0.016	0.018
g. Brickwork			
1. Glazed	0.011	0.013	0.015
2. Lined with cement mortar	0.012	0.015	0.017
h. Sanitary sewers coated with sewage slimes, with bends and connections	0.012	0.013	0.016
i. Paved invert, sewer, smooth bottom	0.016	0.019	0.020
j. Rubble masonry, cemented	0.018	0.025	0.030

TABLE 12-1 Values of the roughness coefficient n. (**Boldface** figures are values generally recommended in design.) (Chow, 1959) (*continued*)

Type of channel and description	Minimum	Normal	Maximum
B. LINED OR BUILT-UP CHANNELS			
B-1. Metal			
a. Smooth steel surface			
1. Unpainted	0.011	**0.012**	0.014
2. Painted	0.012	0.013	0.017
b. Corrugated	0.021	0.025	0.030
B-2. Nonmetal			
a. Cement			
1. Neat, surface	0.010	0.011	0.013
2. Mortar	0.011	0.013	0.015
b. Wood			
1. Planed, untreated	0.010	0.012	0.014
2. Planed, creosoted	0.011	0.012	0.015
3. Unplaned	0.011	0.013	0.015
4. Plank with battens	0.012	0.015	0.018
5. Lined with roofing paper	0.010	0.014	0.017
c. Concrete			
1. Trowel finish	0.011	**0.013**	0.015
2. Float finish	0.013	0.015	0.016
3. Finished, with gravel on bottom	0.015	0.017	0.020
4. Unfinished	0.014	0.017	0.020
5. Gunite, good section	0.016	0.019	0.023
6. Gunite, wavy section	0.018	0.022	0.025
7. On good excavated rock	0.017	0.020	
8. On irregular excavated rock	0.022	0.027	
d. Concrete bottom float finished with sides of			
1. Dressed stone in mortar	0.015	0.017	0.020
2. Random stone in mortar	0.017	0.020	0.024
3. Cement rubble masonry, plastered	0.016	0.020	0.024
4. Cement rubble masonry	0.020	0.025	0.030
5. Dry rubble or riprap	0.020	0.030	0.035
e. Gravel bottom with sides of			
1. Formed concrete	0.017	0.020	0.025
2. Random stone in mortar	0.020	0.023	0.026
3. Dry rubble or riprap	0.023	0.033	0.036
f. Brick			
1. Glazed	0.011	**0.013**	0.015
2. In cement mortar	0.012	**0.015**	0.018
g. Masonry			
1. Cemented rubble	0.017	0.025	0.030
2. Dry rubble	0.023	0.032	0.035
h. Dressed ashlar	0.013	0.015	0.017
i. Asphalt			
1. Smooth	0.013	0.013	
2. Rough	0.016	0.016	
j. Vegetal lining	0.030	—	0.500

TABLE 12-1 Values of the roughness coefficient n. (**Boldface** figures are values generally recommended in design.) (Chow, 1959) *(continued)*

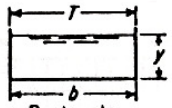
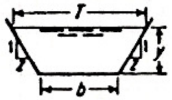
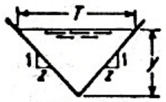
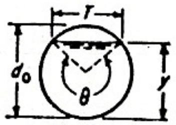
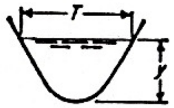
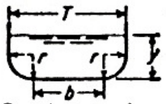
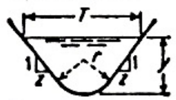
Type of channel and description	Minimum	Normal	Maximum
C. EXCAVATED OR DREDGED			
a. Earth, straight and uniform			
1. Clean, recently completed	0.016	0.018	0.020
2. Clean, after weathering	0.018	**0.022**	0.025
3. Gravel, uniform section, clean	0.022	0.025	0.030
4. With short grass, few weeds	0.022	0.027	0.033
b. Earth, winding and sluggish			
1. No vegetation	0.023	0.025	0.030
2. Grass, some weeds	0.025	0.030	0.033
3. Dense weeds or aquatic plants in deep channels	0.030	0.035	0.040
4. Earth bottom and rubble sides	0.028	0.030	0.035
5. Stony bottom and weedy banks	0.025	0.035	0.040
6. Cobble bottom and clean sides	0.030	0.040	0.050
c. Dragline-excavated or dredged			
1. No vegetation	0.025	0.028	0.033
2. Light brush on banks	0.035	0.050	0.060
d. Rock cuts			
1. Smooth and uniform	0.025	0.035	0.040
2. Jagged and irregular	0.035	0.040	0.050
e. Channels not maintained, weeds and brush uncut			
1. Dense weeds, high as flow depth	0.050	0.080	0.120
2. Clean bottom, brush on sides	0.040	0.050	0.080
3. Same, highest stage of flow	0.045	0.070	0.110
4. Dense brush, high stage	0.080	0.100	0.140
D. NATURAL STREAMS			
D-1. Minor streams (top width at flood stage <100 ft)			
a. Streams on plain			
1. Clean, straight, full stage, no rifts or deep pools	0.025	**0.030**	0.033
2. Same as above, but more stones and weeds	0.030	0.035	0.040
3. Clean, winding, some pools and shoals	0.033	0.040	0.045
4. Same as above, but some weeds and stones	0.035	0.045	0.050
5. Same as above, lower stages, more ineffective slopes and sections	0.040	0.048	0.055
6. Same as 4, but more stones	0.045	0.050	0.060
7. Sluggish reaches, weedy, deep pools	0.050	0.070	0.080
8. Very weedy reaches, deep pools, or floodways with heavy stand of timber and underbrush	0.075	0.100	0.150

TABLE 12-1 Values of the roughness coefficient n. (**Boldface** figures are values generally recommended in design.) (Chow, 1959) *(continued)*

Type of channel and description	Minimum	Normal	Maximum
b. Mountain streams, no vegetation in channel, banks usually steep, trees and brush along banks submerged at high stages			
1. Bottom: gravels, cobbles, and few boulders	0.030	0.040	0.050
2. Bottom: cobbles with large boulders	0.040	0.050	0.070
D-2. Flood plains			
a. Pasture, no brush			
1. Short grass	0.025	0.030	0.035
2. High grass	0.030	0.035	0.050
b. Cultivated areas			
1. No crop	0.020	0.030	0.040
2. Mature row crops	0.025	0.035	0.045
3. Mature field crops	0.030	0.040	0.050
c. Brush			
1. Scattered brush, heavy weeds	0.035	0.050	0.070
2. Light brush and trees, in winter	0.035	0.050	0.060
3. Light brush and trees, in summer	0.040	0.060	0.080
4. Medium to dense brush, in winter	0.045	0.070	0.110
5. Medium to dense brush, in summer	0.070	0.100	0.160
d. Trees			
1. Dense willows, summer, straight	0.110	0.150	0.200
2. Cleared land with tree stumps, no sprouts	0.030	0.040	0.050
3. Same as above, but with heavy growth of sprouts	0.050	0.060	0.080
4. Heavy stand of timber, a few down trees, little undergrowth, flood stage below branches	0.080	0.100	0.120
5. Same as above, but with flood stage reaching branches	0.100	0.120	0.160
D-3. Major streams (top width at flood stage >100 ft). The n value is less than that for minor streams of similar description, because banks offer less effective resistance.			
a. Regular section with no boulders or brush	0.025	—	0.060
b. Irregular and rough section	0.035	—	0.100

IV. **Πίνακας Π.2** Γεωμετρικά στοιχεία διατομών αγωγών (Chow, 1959)

TABLE 12-3 Geometric elements of channel sections. (Taken from Chow, 1959.)

Section	Area A	Wetted perimeter P_w	Hydraulic radius R	Top width T	Hydraulic depth D
 Rectangle	by	$b + 2y$	$\dfrac{by}{b+2y}$	b	y
 Trapezoid	$(b + zy)y$	$b + 2y\sqrt{1+z^2}$	$\dfrac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b + 2zy$	$\dfrac{(b+zy)y}{b+2zy}$
 Triangle	zy^2	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\dfrac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\frac{1}{2}y$
 Circle	$\frac{1}{8}(\theta - \sin\theta)\,d_0^2$	$\frac{1}{2}\theta d_0$	$\frac{1}{4}\left(1 - \dfrac{\sin\theta}{\theta}\right) d_0$	$(\sin \frac{1}{2}\theta)\, d_0$ or $2\sqrt{y(d_0 - y)}$	$\frac{1}{8}\left(\dfrac{\theta - \sin\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right) d_0$
 Parabola	$\frac{2}{3}Ty$	$T + \dfrac{8}{3}\dfrac{y^2}{T}$ *	$\dfrac{2T^2y}{3T^2 + 8y^2}$ *	$\dfrac{3}{2}\dfrac{A}{y}$	$\frac{2}{3}y$
 Round-cornered rectangle ($y>r$)	$\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\right)r^2 + (b + 2r)y$	$(\pi - 2)r + b + 2y$	$\dfrac{(\pi/2 - 2)r^2 + (b+2r)y}{(\pi - 2)r + b + 2y}$	$b + 2r$	$\dfrac{(\pi/2 - 2)r^2}{b + 2r} + y$
 Round-bottomed triangle	$\dfrac{T^2}{4z} - \dfrac{r^2}{z}(1 - z\cot^{-1} z)$	$\dfrac{T}{z}\sqrt{1+z^2} - \dfrac{2r}{z}(1 - z\cot^{-1}z)$	$\dfrac{A}{P}$	$2[z(y - r) + r\sqrt{1+z^2}]$	$\dfrac{A}{T}$

* Satisfactory approximation for the interval $0 < x \leqq 1$, where $x = 4y/T$. When $x > 1$, use the exact expression $P = (T/2)[\sqrt{1+x^2} + 1/x \ln(x + \sqrt{1+z^2})]$.

IV. Πίνακας Π.3 Γεωμετρικά στοιχεία βέλτιστων διατομών αγωγών (Chow, 1959)

TABLE 12-2 Best hydraulic sections. (Adapted from Chow, 1959.)

Cross Section	Area A	Wetted Perimeter P	Hydraulic Radius R	Top Width T	Hydraulic Depth D
Trapezoid, half of a hexagon	$\sqrt{3}\,y^2$	$2\sqrt{3}\,y$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{4}{3}\sqrt{3}\,y$	$\frac{3}{4}y$
Rectangle, half of a square	$2y^2$	$4y$	$\frac{1}{2}y$	$2y$	y
Triangle, half of a square	y^2	$2\sqrt{2}\,y$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}\,y$	$2y$	$\frac{1}{2}y$
Semicircle	$\frac{\pi}{2}y^2$	πy	$\frac{1}{2}y$	$2y$	$\frac{\pi}{4}y$
Parabola, $T = 2\sqrt{2}\,y$	$\frac{4}{3}\sqrt{2}\,y^2$	$\frac{8}{3}\sqrt{2}\,y$	$\frac{1}{2}y$	$2\sqrt{2}\,y$	$\frac{2}{3}y$
Hydrostatic catenary	$1.39586y^2$	$2.9836y$	$0.46784y$	$1.917532y$	$0.72795y$