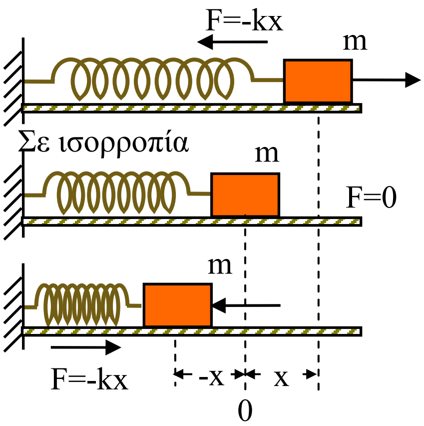
M1 Θεωρία ταλαντώσεων

1. Θεωρία

1.1 Αρμονική ταλάντωση

Μια ταλάντωση που επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα καλείται περιοδική κίνηση. Γραμμική αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η παλινδρομική κίνηση σώματος σε ευθύγραμμη τροχιά γύρω από ένα σημείο που θεωρούμε κέντρο της (θέση ισορροπίας) και η δύναμη που την προκαλεί είναι ανάλογη κάθε στιγμή της απομάκρυνσης του σώματος από το κέντρο αυτό. Ένα από τα απλούστερα συστήματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση είναι ένα σώμα με μάζα m που κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένο στην άκρη ελατηρίου σταθεράς k που υπακούει στο νόμο του Hooke (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Η δύναμη F του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας και καλείται δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη F και η μετατόπιση x έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα, ανεξάρτητα εάν το σώμα βρίσκεται αριστερά ή δεξιά της θέσης ισορροπίας.

Παρακάτω αναφέρονται μερικοί όροι που χρησιμοποιούνται στη μελέτη των αρμονικών ταλαντώσεων.

1. Το πλάτος Α της ταλάντωσης είναι η μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας κατά την απόλυτη τιμή. Μια πλήρης ταλάντωση είναι η διαδρομή από το Α στο – Α και ξανά πίσω στο Α.

2. Η περίοδος Τ είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση και μετριέται σε sec.

3. Η συχνότητα f είναι ο αριθμός των επαναλήψεων των ταλαντώσεων στη μονάδα του χρόνου και μετριέται σε Hz (Hertz), μάλιστα ισχύει : 1 Hz = 1 c /sec = sec^{-1}

4. Η γωνιακή συχνότητα ω είναι το γινόμενο της συχνότητας f επί το 2π δηλαδή : ω = 2πf. Η γωνιακή συχνότητα ω εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός γω-

νιακού μεγέθους και μετριέται σε rad/sec. Από τον ορισμό της περιόδου T και της συχνότητας f προκύπτει η σχέση : $T= 1/f$, ομοίως ισχύει : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

1.2 Μελέτη αρμονικής ταλάντωσης

Ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς k πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, όταν κινείται χωρίς τριβές εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση εάν απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας του. Η σχέση μεταξύ της επιτάχυνσης και της θέσης του σώματος με την χρησιμοποίηση του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα θα είναι :

$F=-k\,x = m\alpha = m\, d^2x / dt^2$ και τελικά: $d^2x / dt^2 + (k/m)\, x = 0$

Άρα ένα σώμα θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση εάν η απομάκρυνση του x ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση. Μια λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι η :

$$x = A \sin [(k/m)^{1/2}\, t + \varphi_o] \qquad (1)$$

Η σταθερά φ_o ονομάζεται αρχική φάση και δείχνει από ποιο σημείο του κύκλου της ταλάντωσης άρχισε η κίνηση την χρονική στιγμή t=0. Η τιμή του ημίτονου κυμαίνεται μεταξύ των τιμών -1 και +1 άρα το x θα βρίσκεται πάντοτε μεταξύ του –A και +A. Επομένως το A θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης.

Η περίοδος T είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση. Η συνάρτηση του ημίτονου επαναλαμβάνεται και έτσι η ποσότητα μέσα στην παρένθεση της εξίσωσης (1) θα αυξάνει κατά 2π σε μια πλήρη επανάληψη, δηλαδή σε χρόνο μιας περιόδου T. Επομένως:

$$\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right) T = 2\pi \text{ ή}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται :

$x = A \sin(\omega t + \varphi_o)$.

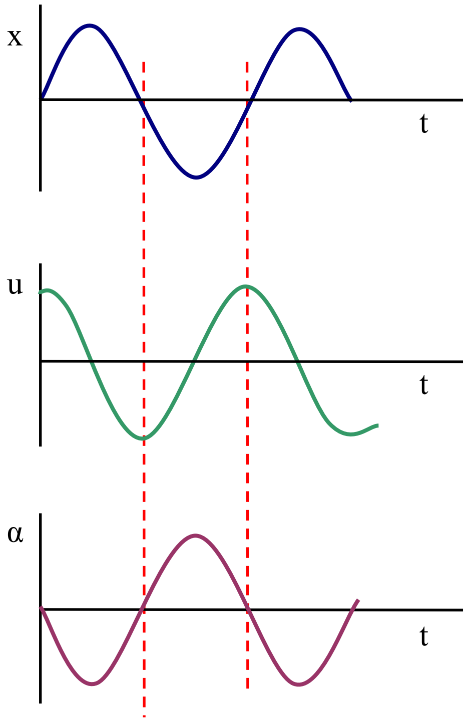
Η ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται από την σχέση $\upsilon = dx / dt$ και επομένως

$\upsilon = \omega A \cos(\omega t + \varphi_o)$

ενώ η επιτάχυνση $\alpha = d\upsilon / dt$ θα είναι

$\alpha = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_o)$.

Από τις προηγούμενες σχέσεις παρατηρείται ότι η ταχύτητα προηγείται της απομά-



Σχήμα 2

κρυνσης κατά π/2 ενώ η επιτάχυνση κατά π. Εάν η αρχική φάση $φ_o$ είναι μηδέν τότε οι σχέσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης θα είναι οι εξής : $x = A \sin(ωt)$, $υ = ωA \cos(ωt)$ και $α = -ω^2 A \sin(ωt)$. Στο Σχήμα 2 δίνονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

1.2.1 Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση (Ταλάντωση με απόσβεση)

Όταν ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση το πλάτος της πρακτικά ελαττώνεται και τελικά μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή η ταλάντωση λέγεται φθίνουσα (ή με απόσβεση). Στην φθίνουσα ταλάντωση εκτός από την δύναμη $F = -ky$ ασκείται και μια άλλη δύναμη F΄ (αντίσταση του αέρα ή τριβή) που συνήθως είναι, κάθε στιγμή, ανάλογη της ταχύτητας του σώματος και αντίθετη αυτής δηλαδή ισχύει : $F΄ = - λυ$. Η σταθερά λ λέγεται σταθερά αποσβέσεως και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου σώματος καθώς και από την φύση του μέσου εντός του οποίου κινείται το σώμα. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι :

$ΣF = F + F΄ = - ky – λυ$ αλλά και διότι $ΣF = mα$ ισχύει : $ky + λυ + mα = 0$ μάλιστα διότι $α = d^2 y / dt^2$ η προηγούμενη σχέση γράφεται :

$$m\, d^2 y / dt^2 + ky + λυ = 0$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής :

$$y = A\ ημ\ (ω΄t + φ_o)$$

Το πλάτος Α στη φθίνουσα ταλάντωση δίνεται από τη σχέση :

$A = A_o \exp[-(\lambda t/2m)]$

Όπου A_o το πλάτος της ελεύθερης, αμείωτης ταλάντωσης και m η μάζα του ταλαντωτή. Από την προηγούμενη σχέση παρατηρείται ότι το πλάτος Α στην φθίνουσα ταλάντωση ελαττώνεται με τον χρόνο και γίνεται ακριβώς ίσο με το πλάτος της αμείωτης ταλάντωσης όταν λ=0 δηλαδή όταν δεν υπάρχουν τριβές (ή αντιστάσεις). Η κυκλική συχνότητα ω΄ της φθίνουσας ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση :

$\omega' = [(D/m) – (\lambda / 2m)^2]$ όπου $(D/m)^{1/2} = \omega_o$

δηλαδή η κυκλική συχνότητα στην αμείωτη ταλάντωση. Επομένως ισχύει :

$\omega' = [\omega_o^2 – (\lambda / 2m)^2]^{1/2}$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η κυκλική συχνότητα ω΄ της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη της συχνότητας ω_o της αμείωτης ταλάντωσης. Έτσι προκύπτει ότι στην φθίνουσα ταλάντωση η περίοδος Τ' είναι μεγαλύτερη από την τιμή της περιόδου Τ της αμείωτης ταλάντωσης. Εάν ο συντελεστής απόσβεσης είναι τόσο μεγάλος ώστε : $(\lambda / 2m) > \omega_o^2$ τότε το ω΄ δεν μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Σε αυτή τη περίπτωση δεν έχουμε ταλάντωση αλλά ο ταλαντωτής ξαναγυρίζει στην θέση ισορροπίας χωρίς να κάνει ούτε μια πλήρη ταλάντωση. Η κίνηση αυτή καλείται απεριοδική π.χ. κίνηση ενός εκκρεμούς μέσα σε πυκνόρρευστο υγρό (μέλι).