

1. Σκοπός

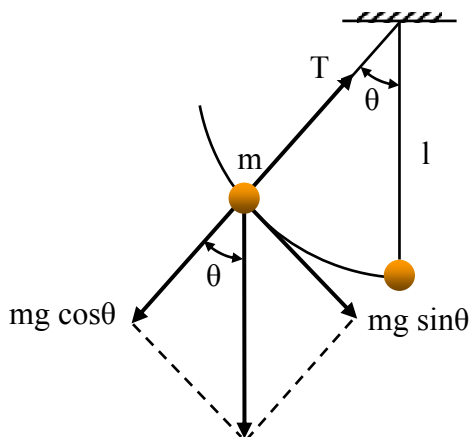
Η εργαστηριακή αυτή άσκηση αποσκοπεί στη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας σε ένα τόπο. Αυτή η μέτρηση επιτυγχάνεται υπολογίζοντας πειραματικά την περίοδο ταλάντωσης ενός απλού εκκρεμούς.

2. Θεωρία

2.1 Απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές είναι ένα ιδανικό σύστημα το οποίο αποτελείται από μια σημειακή μάζα εξαρτημένη από ακλόνητο σημείο με την βοήθεια αβαρούς, μη εκτατού νήματος. Κατά προσέγγιση ένα απλό εκκρεμές πραγματοποιείται εάν από σταθερό σημείο εξαρτηθεί δια λεπτού νήματος μια σφαίρα μικρής διαμέτρου της οποίας την μάζα θεωρούμε συγκεντρωμένη στο κέντρο της.

Όταν ένα απλό εκκρεμές μετατοπισθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο τότε αυτό αιωρείται σε κατακόρυφο επίπεδο λόγω της επίδρασης της βαρύτητας. Η κίνησή του είναι περιοδική και εκτελεί ταλάντωση. Το Σχήμα 1 δείχνει ένα εκκρεμές μήκους l με μάζα m που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα μάζας m είναι η δύναμη του βάρους του mg και η τάση του νήματος



Σχήμα 1

T.

Η δύναμη του βάρους αναλύεται σε δυο συνιστώσες: μια είναι ακτινική και ισούται με $mg \cos \theta$ και η άλλη εφαπτομενική και ισούται με $mg \sin \theta$. Η ακτινική συνιστώσα δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο επιτάχυνση για να κινηθεί το σώμα επάνω σε κυκλικό τόξο. Η εφαπτομενική συνιστώσα είναι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται

στη μάζα m και την επαναφέρει στη θέση ισορροπίας. Άρα η δύναμη επαναφοράς είναι : $F = -mg\sin\theta$. Εάν η γωνία θ είναι μικρή τότε το $\sin\theta$, με μεγάλη προσέγγιση είναι ίσο με την ίδια τη γωνία θ εκφρασμένη όμως σε ακτίνια (rad).

Για παράδειγμα :

$$\begin{aligned}\theta = 0^\circ &= 0.000 \text{ (rad)} & \sin\theta &= 0.000 & \text{διαφορά } &0\% \\ \theta = 2^\circ &= 0.035 \text{ (rad)} & \sin\theta &= 0.035 & \text{διαφορά } &0.00\% \\ \theta = 10^\circ &= 0.175 \text{ (rad)} & \sin\theta &= 0.174 & \text{διαφορά } &0.51\% \\ \theta = 15^\circ &= 0.262 \text{ (rad)} & \sin\theta &= 0.259 & \text{διαφορά } &1.14\%\end{aligned}$$

Η μετατόπιση κατά μήκος του τόξου s είναι $x = l\theta$ και για μικρές γωνίες η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν ευθύγραμμη. Άρα υποθέτοντας ότι : $\sin\theta \sim \theta$ θα ισχύει :

$$F = -mg\theta = -mg(x/l) = -(mg/l)x$$

Επομένως για μικρές απομακρύνσεις η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη για να εκτελέσει το απλό εκκρεμές απλή αρμονική ταλάντωση. Η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς με μικρό πλάτος ταλάντωσης θα είναι :

$$T = 2\pi(m/k)^{1/2} = 2\pi(l/g)^{1/2}$$

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι αρκετά μικρό η γενική εξίσωση για την περίοδο αποδεικνύεται ότι είναι :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \dots\right)}$$

όπου θ_m η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση.

Από την τελευταία σχέση γίνεται κατανοητό ότι η περίοδος μπορεί να υπολογιστεί με όση ακρίβεια επιθυμούμε αρκεί να ληφθούν υπ' όψη όλοι οι αναγκαίοι όροι της σειράς.

2.2 Νόμος της παγκόσμιας έλξης – Επιτάχυνση της βαρύτητας

Μεταξύ δυο σωμάτων που έχουν μάζες m_1 και m_2 και απέχουν απόσταση r αναπτύσσεται μια ελκτική δύναμη επάνω στην ευθεία που ενώνει τα σώματα και έχει μέτρο :

$$F = -G(m_1m_2/r^2)$$

Όπου G είναι μια παγκόσμια σταθερά που έχει την ίδια τιμή για όλα τα ζευγάρια σωμάτων και ονομάζεται σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Η τιμή της σταθεράς αυτής βρέθηκε πειραματικά και είναι (στο SI) $G=6.6710^{-11} \text{ N m}^2/\text{Kg}$.

Η σταθερά G της παγκόσμιας έλξης δεν εξαρτάται από το είδος των μαζών αλλά ούτε και από το μέσον το οποίο τις περιβάλλει. Εάν θεωρηθεί όλη η μάζα M της γης συγκεντρωμένη στο κέντρο της, από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης υπολογίζεται η ελ-

κτική δύναμη που ασκεί η γη σε ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται στην επιφάνειά της :

$$F = G (M m / R^2)$$

όπου R είναι η ακτίνα της γης. Βέβαια, λόγω του ότι η δύναμη F είναι ακριβώς το βάρος $B (=mg)$ του σώματος θα ισχύει : $mg = G (M m / R^2)$ και έτσι τελικά :

$$g = G M / R^2$$

Δηλαδή η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ανεξάρτητη από την μάζα των σωμάτων. Στον ίδιο τόπο η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της γης δίνεται από την σχέση :

$$g = G M / (R + h)^2$$

όπου $(R + h)$ είναι η απόσταση από το κέντρο της γης. Άρα το g σε ένα τόπο φαίνεται να ελαττώνεται όσο αυξάνεται το υψόμετρο του συγκεκριμένου τόπου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας εξαρτάται ακόμη και από το γεωγραφικό πλάτος (μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της γης στον ισημερινό από ότι στους πόλους). Η τιμή του g στον ισημερινό μετρήθηκε σε 9.78 m/s^2 ενώ η αντίστοιχη τιμή στους πόλους είναι : 9.83 m/s^2 .

3. Πειραματική διαδικασία

Εάν το νήμα του απλού εκκρεμούς είναι αβαρές και μη εκτατό τότε θα μετρούσαμε το μήκος l από το σταθερό σημείο εξάρτησης μέχρι το κέντρο βάρους της σφαίρας το οποίο μάλιστα συμπίπτει και με το γεωμετρικό της κέντρο. Επειδή όμως το νήμα δύσκολα εκπληρώνει τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την ακριβή θέση του κέντρου βάρους του συστήματος νήματος – σφαιριδίου. Προκειμένου να ξεπεραστεί η προηγούμενη δυσκολία καταφεύγουμε στο εξής τέχνασμα. Δένουμε ένα κόμπο στο νήμα, το μήκος y από το κόμπο μέχρι το σημείο εξάρτησης μπορεί να μετρηθεί με αρκετή ακρίβεια ενώ η απόσταση a του ίδιου κόμπου από το κέντρο βάρους του συστήματος εξακολουθεί να παραμένει άγνωστη. Έτσι η σχέση :

$$T = 2\pi (l/g)^{1/2} \text{ γίνεται : } T = 2\pi [(y+a) / g]^{1/2} \text{ η οποία και μετατρέπεται στην}$$

$$y = (g / 4 \pi^2) T^2 - a$$

δηλαδή η γραφική παράσταση : $y = f(T^2)$ είναι ευθεία γραμμή η κλίση της οποίας δίνεται από την σχέση :

$$\text{κλίση} = g / 4 \pi^2$$

Για την μέτρηση λοιπόν της επιτάχυνσης της βαρύτητας g μετράμε εργαστηριακά την περίοδο T για διάφορες τιμές του μήκους y και χαράσσουμε την πειραματική ευθεία $y = f(T^2)$, βρίσκουμε την κλίση της και έτσι υπολογίζουμε στη συνέχεια την επιτάχυνση της βαρύτητας g .

3.1 Εργασίες

1. Μετράμε το χρόνο 10 περιόδων ταλάντωσης του εκκρεμούς για 10 διαφορετικές τιμές του μήκους y και συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί.

α.α.	y (cm)	$10T$ (sec)	T (sec)	T^2 (sec) ²
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

2. Χαράσσουμε την γραφική παράσταση $y = f(T^2)$.
3. Υπολογίζουμε την κλίση της πειραματικής ευθείας και από αυτήν βρίσκεται η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Γράφουμε τα τελικά αποτελέσματα : κλίση = (σε m/s^2), $g =$ (σε m/s^2).
4. Από το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα υπολογίζουμε το άγνωστο μήκος a .

Παρατήρηση: Απαραίτητη είναι η γνώση της θεωρίας που αναπτύσσεται στην ενότητα Μ1 (Θεωρία Ταλαντώσεων)